Automatique des systèmes mécaniques: Asservissement des Systèmes Linéaires Continus et Invariants (SLCI): Séance 3

LEFI ABDELLAOUI: INGÉNIEUR DOCTEUR AGRÉGÉ EN GÉNIE MÉCANIQUE

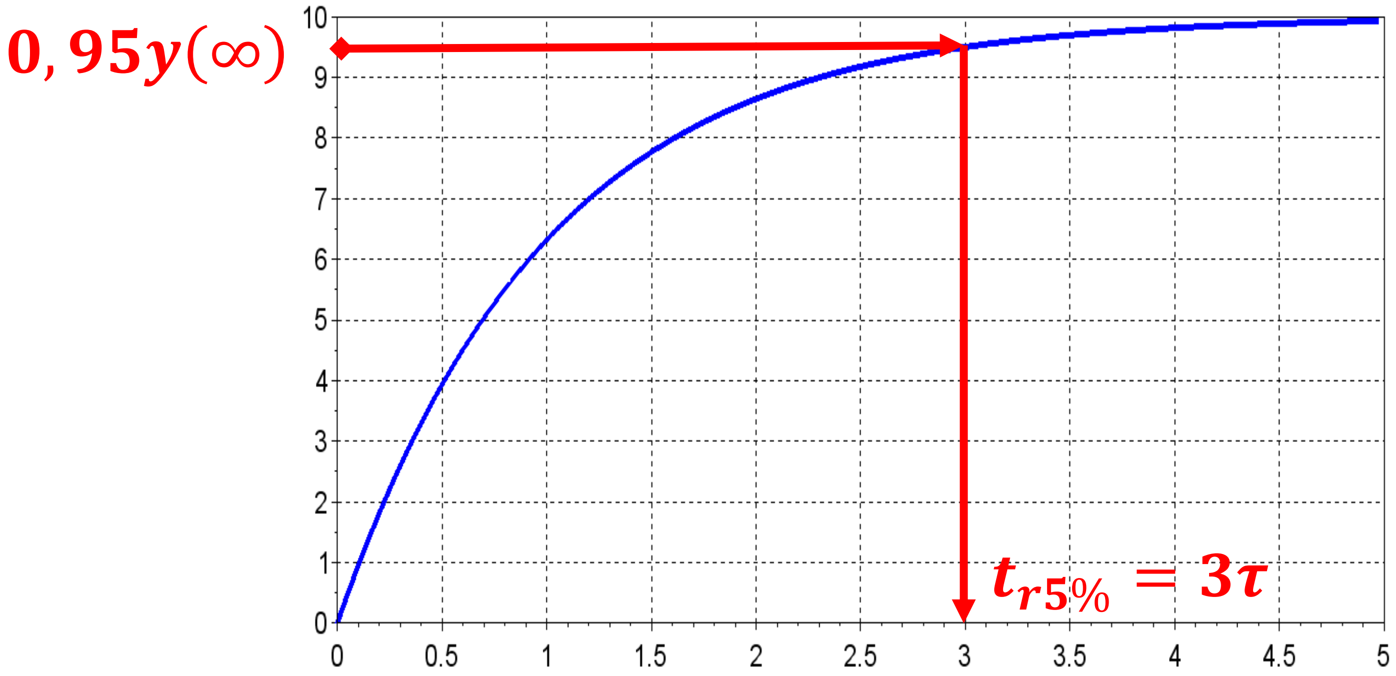
IPEIB 2020

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Rapidité   Système de premier ordre

La rapidité d'un système asservi est caractérisée par le temps de réponse à 5% ($t_{r5\%}$)

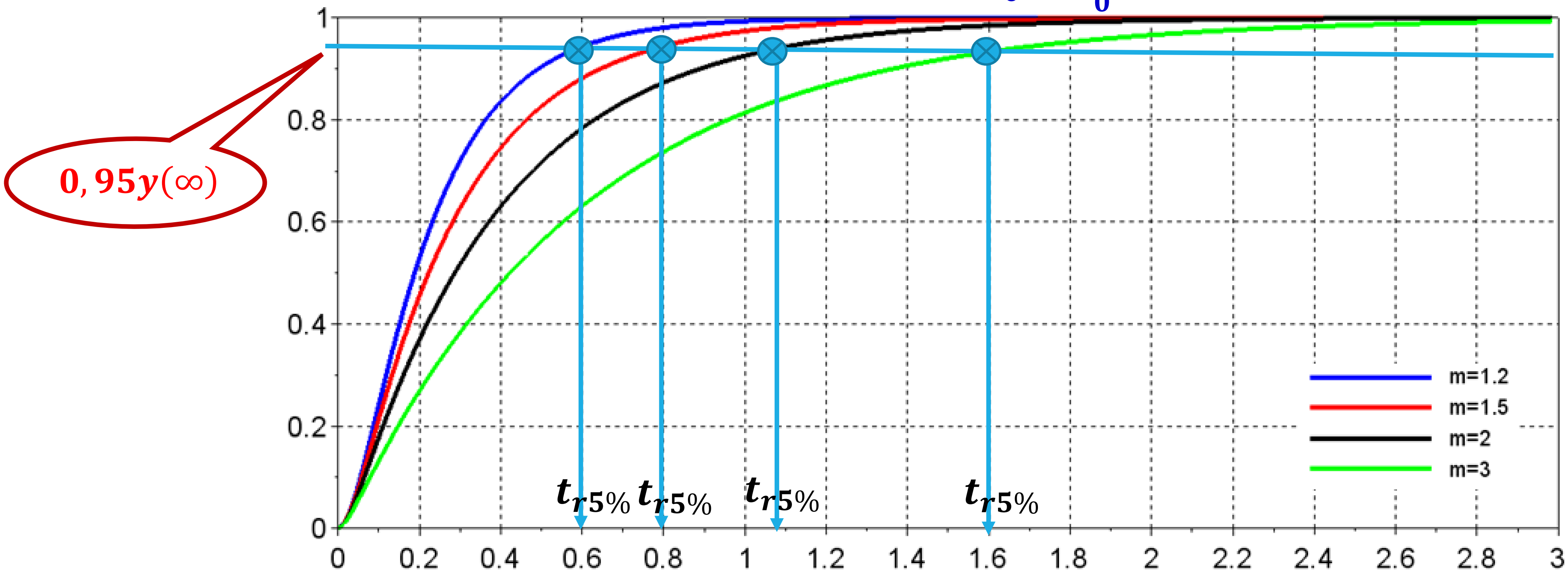
Pour un système de premier ordre: $H(p) = \frac{k}{1+\tau p}$ ⇒ $t_{r5\%} = 3\tau$



Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Rapidité Système de second ordre m≥ 1

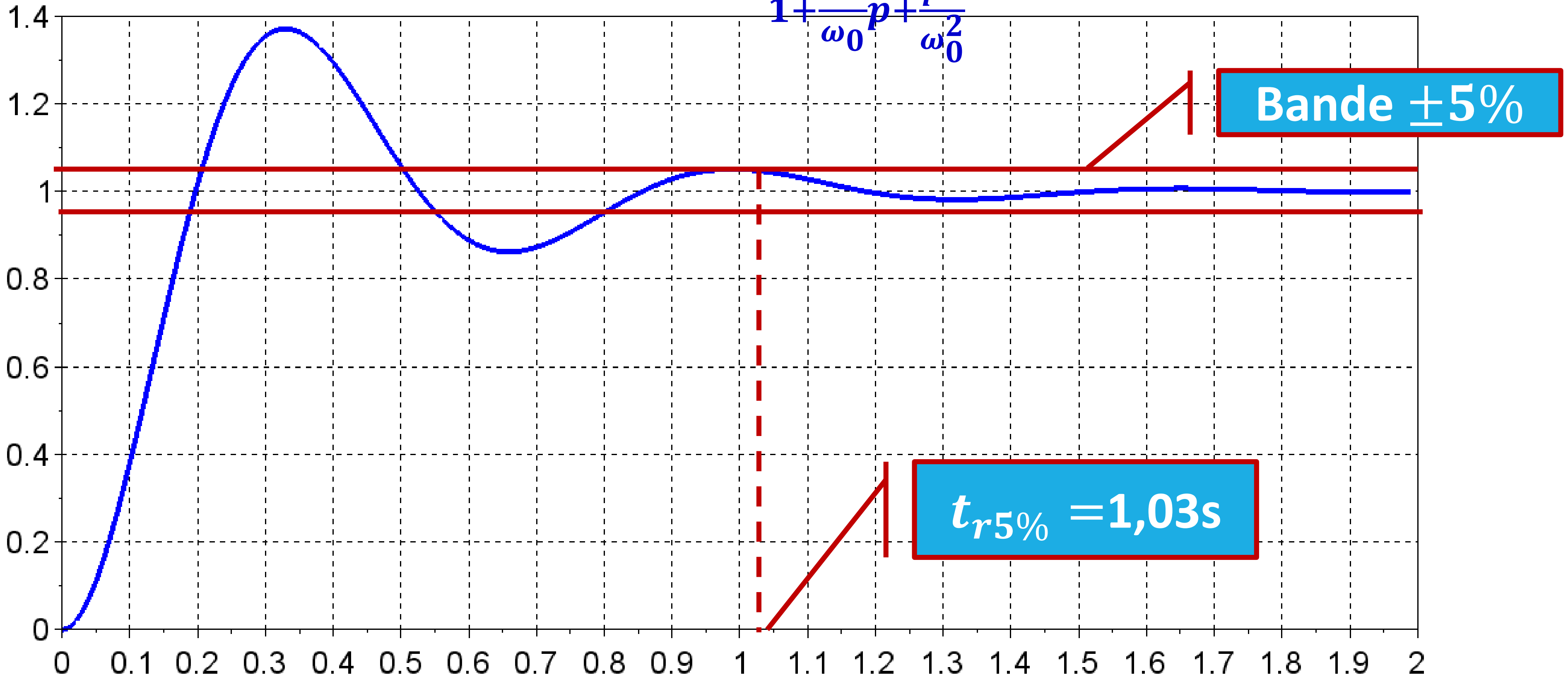
Pour un système de premier ordre: $H(p) = \frac{k}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$



Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Rapidité   Système de second ordre $m < 1$

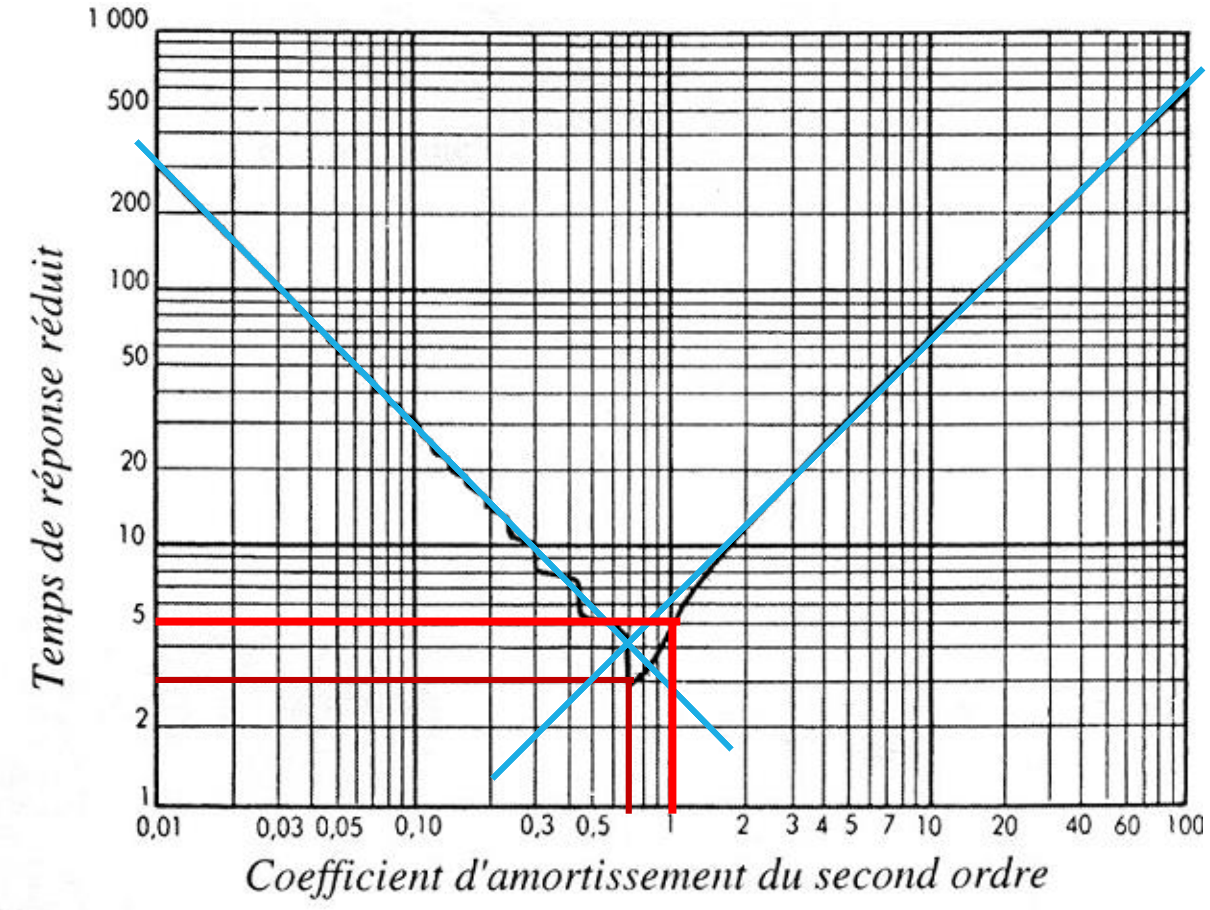
Pour un système de premier ordre: $H(p) = \dfrac{k}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$



Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Rapidité   Système de second ordre

$\omega_0 t_{r5\%}$



La réponse la plus rapide est pour m=0,7

$$t_{r5\%} = \frac{3}{\omega_0}$$

Si m<0,7 $\quad t_{r5\%} = \frac{m}{3\omega_0}$

Si m>0,7 $\quad t_{r5\%} = \frac{6m}{\omega_0}$

La réponse la plus rapide sans dépassement est pour m=1

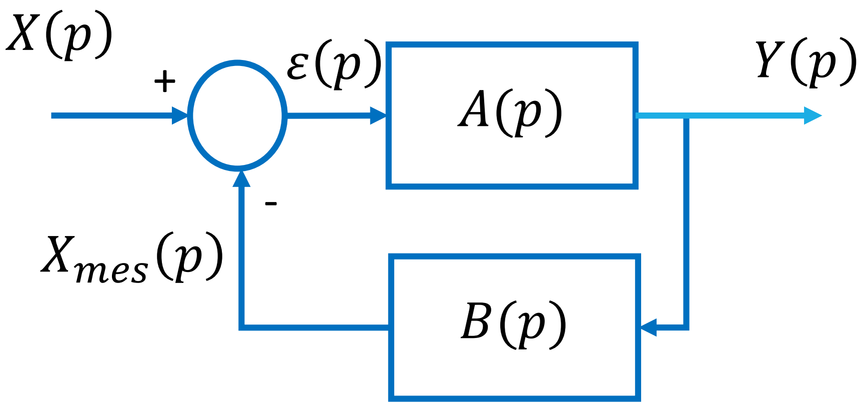
$$t_{r5\%} = \frac{5}{\omega_0}$$

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Complément FTBF et FTBO

FTBF: Fonction de Transfert en Boucle Fermée

FTBO: Fonction de Transfert en Boucle Ouverte



$$FTBF(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

$$FTBO(p) = A(p)B(p)$$

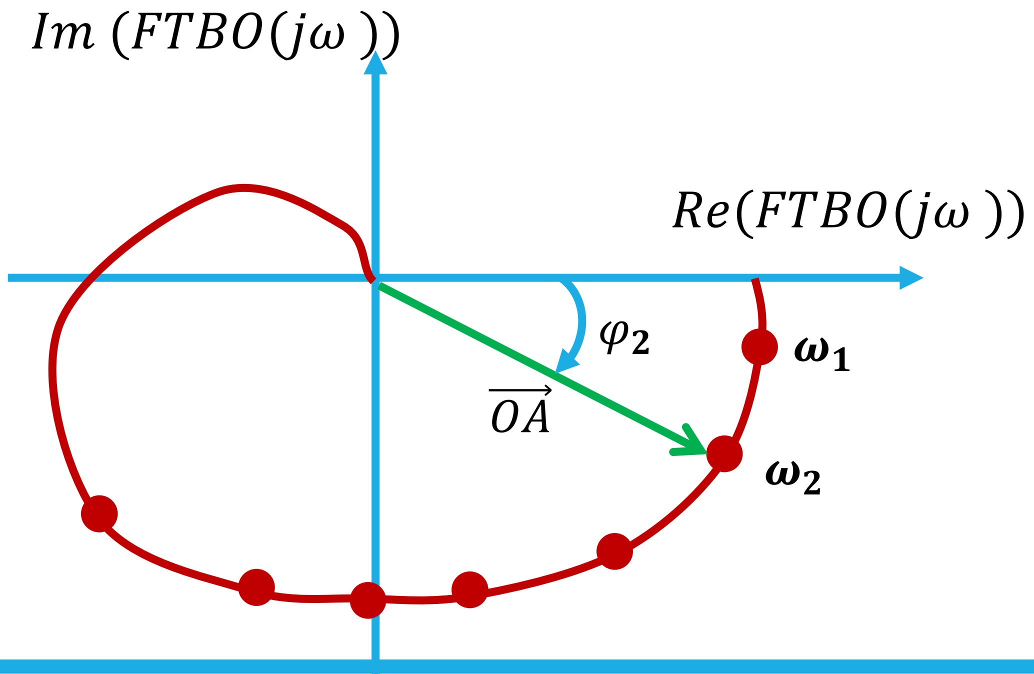
$$FTBF(p) = \frac{A(p)}{1 + FTBO(p)}$$

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Complément   Diagramme de Nyquist

$$H(j\omega) = R_e(H(j\omega)) + jIm(H(j\omega))$$

$\omega(rad/s$	ω_1	ω_2	...
$R_e(\omega)$	**	**	...
$I_m(\omega)$	**	**	...



$$Gdb = 20\log|H(j\omega)|$$
$$= 20\log\sqrt{R_e{}^2(H(j\omega)) + I_m{}^2(H(j\omega))} = 20\log\|\overrightarrow{OA}\|$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega))$$
$$= \arctan\frac{Im(H(j\omega))}{R_e(H(j\omega))}$$

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité Analyse des pôles de la FTBF

- Un système linéaire est dit stable si, après qu'une perturbation l'a écarté de sa position d'équilibre, il revient spontanément à cette position.

Cela veut dire :

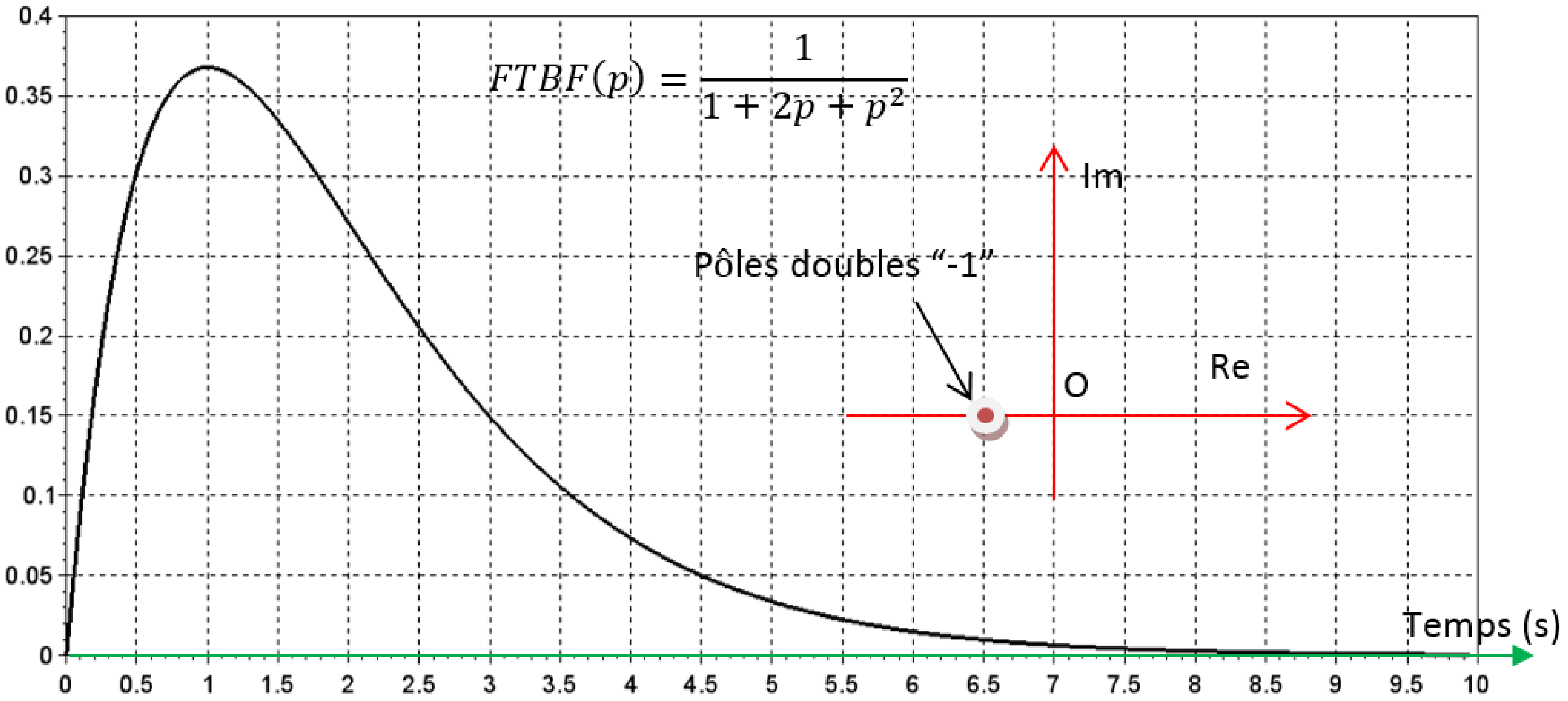
- Un système linéaire est stable si et seulement si la réponse impulsionnelle tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Cela veut dire encore :

- Un système linéaire est stable si et seulement si **tous les pôles de la FTBF sont à partie réelle strictement négative**. Pour cela, la réponse impulsionnelle est donc une combinaison d'exponentielles décroissantes.

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

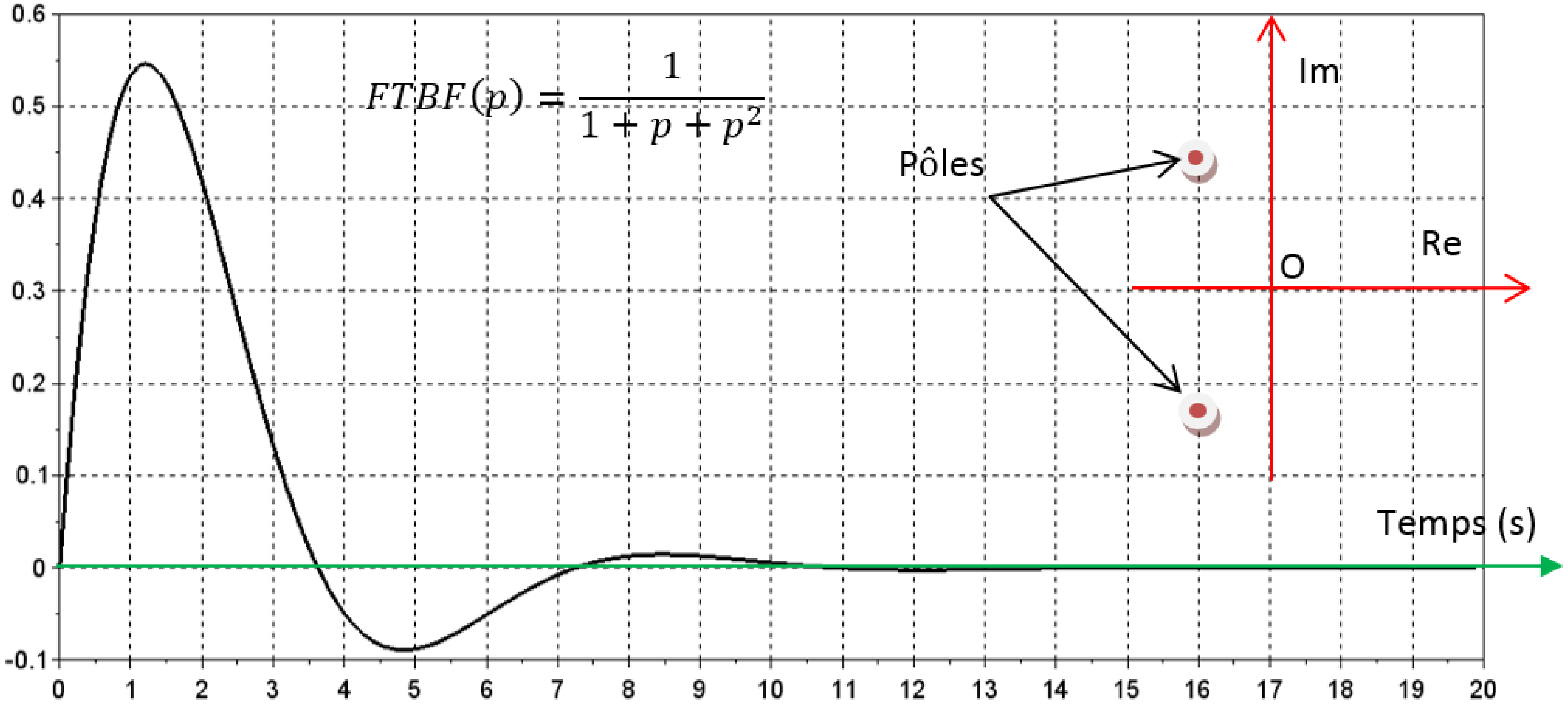
Stabilité — Analyse des poles de la FTBF



Réponse impulsionnelle : stabilité asymptotique apériodique

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité   **Analyse des poles de la FTBF**

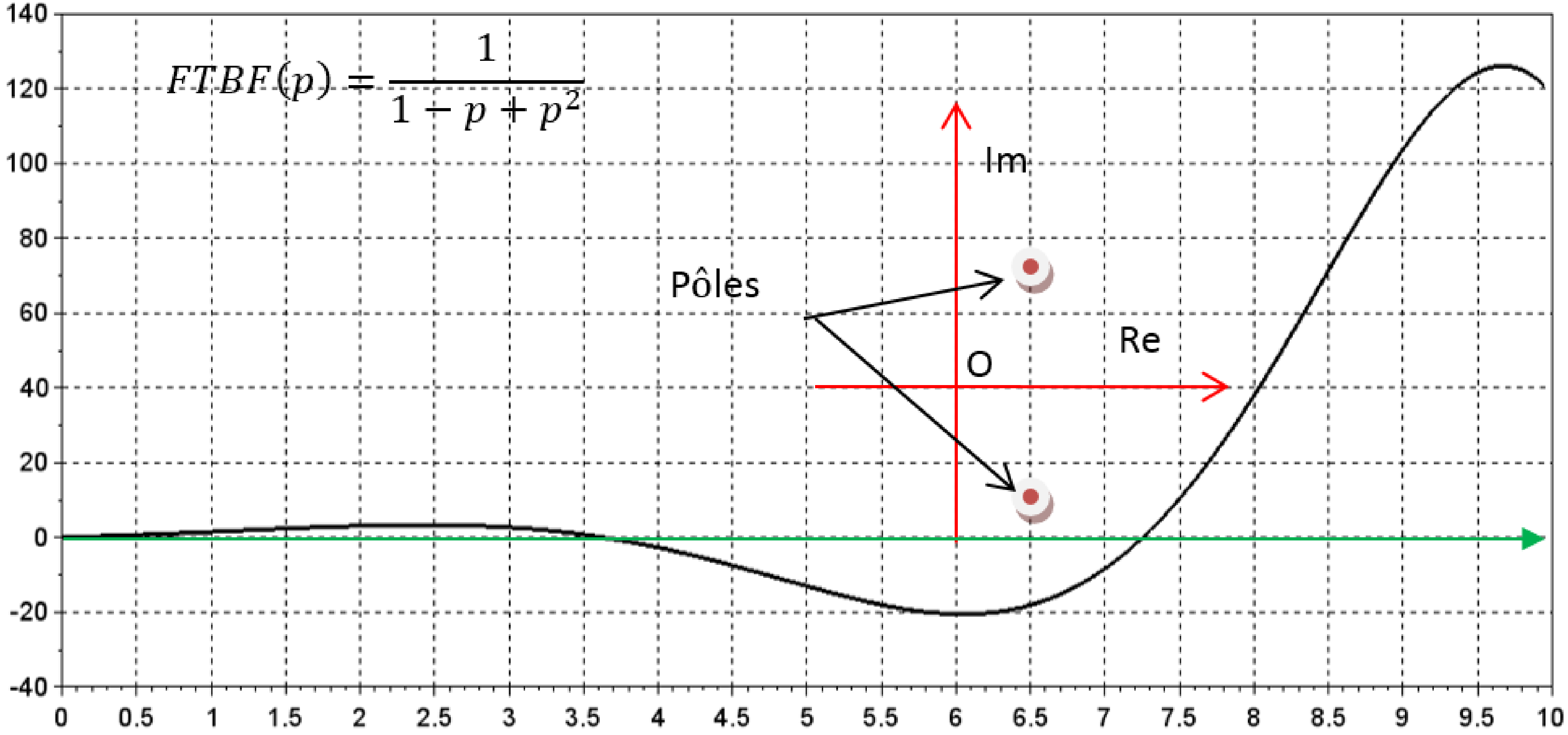


Réponse impulsionnelle : stabilité asymptotique oscillatoire

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité

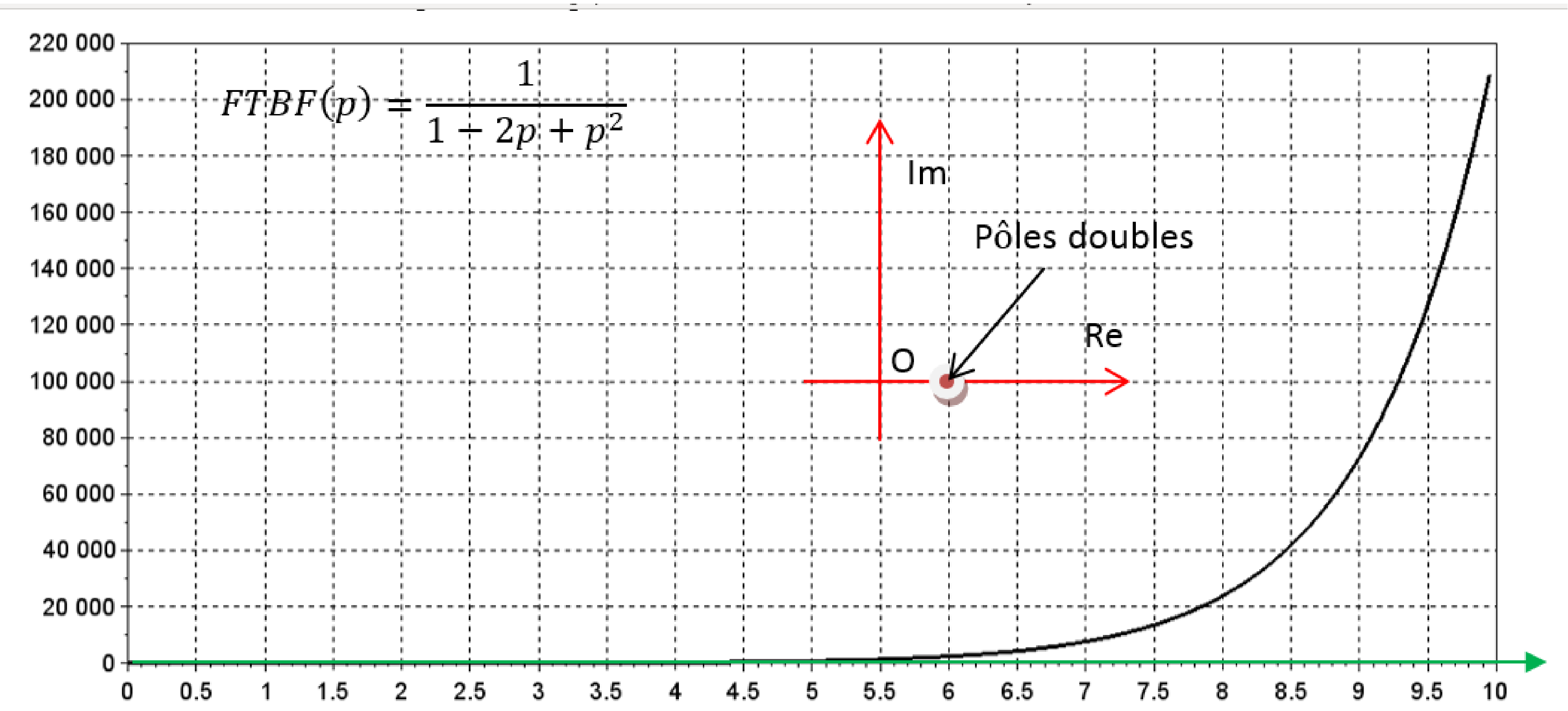
Analyse des poles de la FTBF



Réponse impulsionnelle : instabilité oscillatoire

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité   Analyse des poles de la FTBF



Réponse impulsionnelle : instabilité apériodique

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité

Critère de Routh

Demo

$$FTBF(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ avec } D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0$$

Condition 1: nécessaire mais insuffisante

- Tous les coefficients a_i existent et de même signe.

Cela veut dire:

- Si l'un des coefficients a_i est nul, le système est instable
- Si tous les coefficients sont différents de 0, il suffit qu'ils ne soient pas tous de même signe pour conclure à l'instabilité.
- Si tous les coefficients a_i sont de même signe, l'examen de la première colonne du tableau de Routh permet de conclure à la stabilité du système.

N.B. Tous les a_i sont supposés positifs, quitte à changer le signe de N(P) et de D(p) de la fonction de transfert).

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité Critère de Routh

Tableau de Routh

$$FTBF(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ avec } D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0$$

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
p^{n-2}	$A_{n-2} = -\frac{a_n a_{n-3} - a_{n-1} a_{n-2}}{a_{n-1}}$	$B_{n-2} = -\frac{a_n a_{n-5} - a_{n-1} a_{n-4}}{a_{n-1}}$	$C_{n-2} = -\frac{a_n a_{n-7} - a_{n-1} a_{n-6}}{a_{n-1}}$
p^{n-3}	$A_{n-3} = -\frac{a_{n-1} B_{n-2} - A_{n-2} a_{n-3}}{A_{n-2}}$	$B_{n-3} = -\frac{a_{n-1} C_{n-2} - A_{n-2} a_{n-5}}{A_{n-2}}$	C_{n-3}
…	…	…	…
p^2	A_2	B_2	C_2
p^1	A_1	B_1	C_1
p^0	$A_0 = -\frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1}$	$B_0 = -\frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1}$	C_0

Tous les coefficients de la première colonne >0

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité   Critère de Routh

Applications

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité Critère de Routh

Application 1:

1. Etudier la stabilité des systèmes dont leurs fonctions de transfert en boucle fermée sont : $\boldsymbol{H_1(p) = \frac{1}{1+p+p^2-p^3+p^4+p^5}}$ et $\boldsymbol{H_2(p) = \frac{1}{6+11p+6p^2+p^3}}$

$$\boldsymbol{H_1(p) = \frac{1}{1+p+p^2-p^3+p^4+p^5}} \Rightarrow \boldsymbol{D(p) = 1+p+p^2-p^3+p^4+p^5}$$

$\Rightarrow$ Instable car les coefficients de D(p) ne sont pas de meme signes

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité   Critère de Routh

1. Etudier la stabilité des systèmes dont leurs fonctions de transfert en boucle fermée sont : $H_1(p) = \frac{1}{1+p+p^2-p^3+p^4+p^5}$ et $H_2(p) = \frac{1}{6+11p+6p^2+p^3}$

$$H_2(p) = \frac{1}{6 + 11p + 6p^2 + p^3} \Rightarrow D(p) = 6 + 11p + 6p^2 + p^3$$

Tableau de Routh

p^3	1	11	0
p^2	6	6	0
p^1	10	0	
p^0	6		

Condition 1 de Routh est vérifée

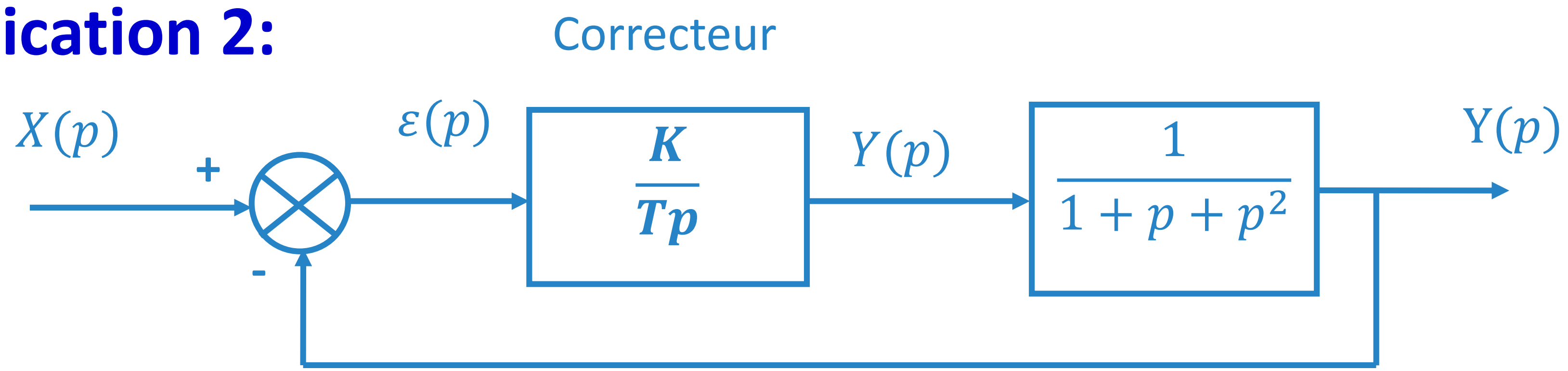
Condition 2 de Routh est vérifée

Système stable

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité   Critère de Routh

Application 2:



Etudier la stabilité en fonction de K et T.

$$FTBF(p) = \frac{K}{K + Tp + Tp^2 + Tp^3}$$

$$D(p) = K + Tp + Tp^2 + Tp^3$$

Condition 1 de Routh: $K > 0 \; et \; T > 0$

Tableau de Routh

p^3	T	T	0
p^2	T	K	0
p^1	α	0	
p^0	K		

$$\alpha = \frac{T^2 - KT}{T} = T - K$$

Condition 2 de Routh:

$T - K > 0$

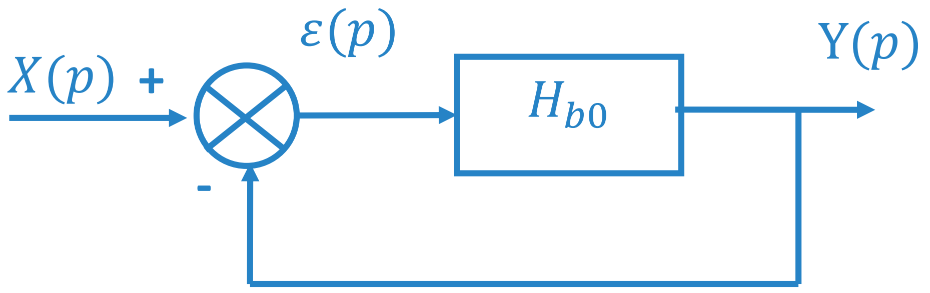
Condition générale de stabilité:

$0 < K < T$

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité   Critère de Routh

Application 3: Etudier la stabilité



$$H_{1BO} = \frac{K}{1+\tau p}$$

$$H_{2BO} = \frac{K}{2+ap+p^2}$$

$$H_{1BF} = \frac{K}{K+1+\tau p}$$

$\boldsymbol{D(p)}$=K + 1 + τp **Condition de stabilité:** $\boldsymbol{K \succ -1 \ et\ \tau > 0}$

$$H_{2BF} = \frac{K}{K+2+ap+p^2}$$

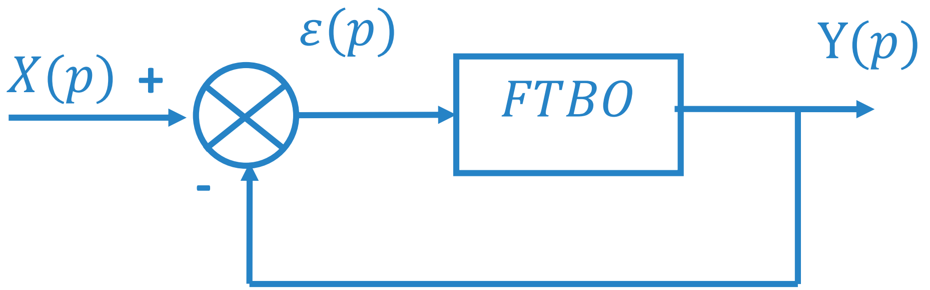
⇒ $\boldsymbol{D(p)}$=$K + 2 + ap + p^2$ **Condition de stabilité:** $\boldsymbol{K \succ -2 \ et\ a > 0}$

La première condition de Routh est suffisante si D(p) est d'ordre ≤ 2

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité

Critère de Revers



$$\boldsymbol{FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}}$$

$$\boldsymbol{FTBO(p) \neq -1}$$

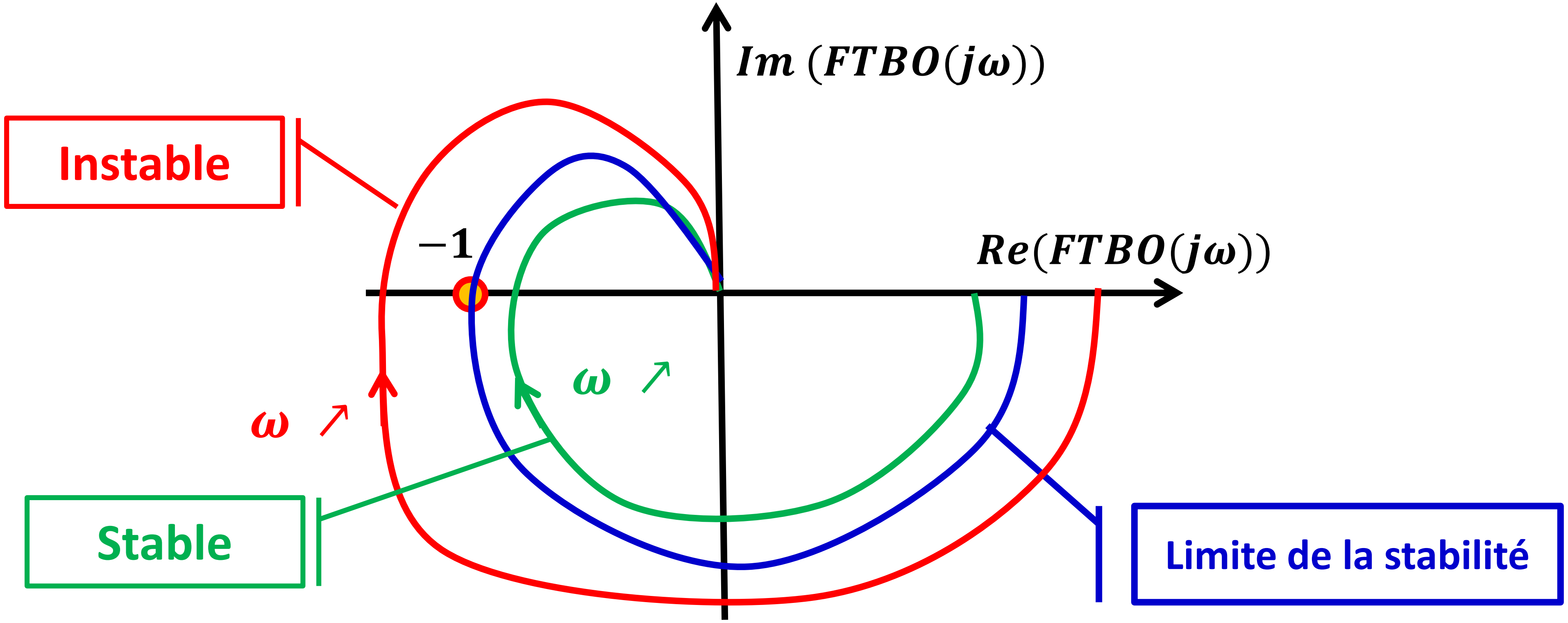
Un système est stable en boucle fermée si le lieu de Nyquist de la $\boldsymbol{FTBO}$ laisse le point critique d'affixe -1 à gauche lorsque la pulsation $\boldsymbol{\omega}$ augmente de 0 à l'infini.

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité

Critère de Revers

Un système est stable en boucle fermée si le lieu de Nyquist de la $FTBO$ laisse le point critique d'affixe – 1 à gauche lorsque la pulsation ω augmente de 0 à l'infini.



Stabilité

Conditions de stabilité en pratique (Marges de sécurité)

Un système à la limite de la stabilité est mal amorti. Son bon fonctionnement n'est pas assuré car une faible modification de ses caractéristiques peut le rendre instable.

Les lieux des fonctions de transfert peuvent être obtenus par modélisation ou expérimentalement. Quels que soit la méthode utilisée, ces lieux ne sont pas connus de manière exacte.

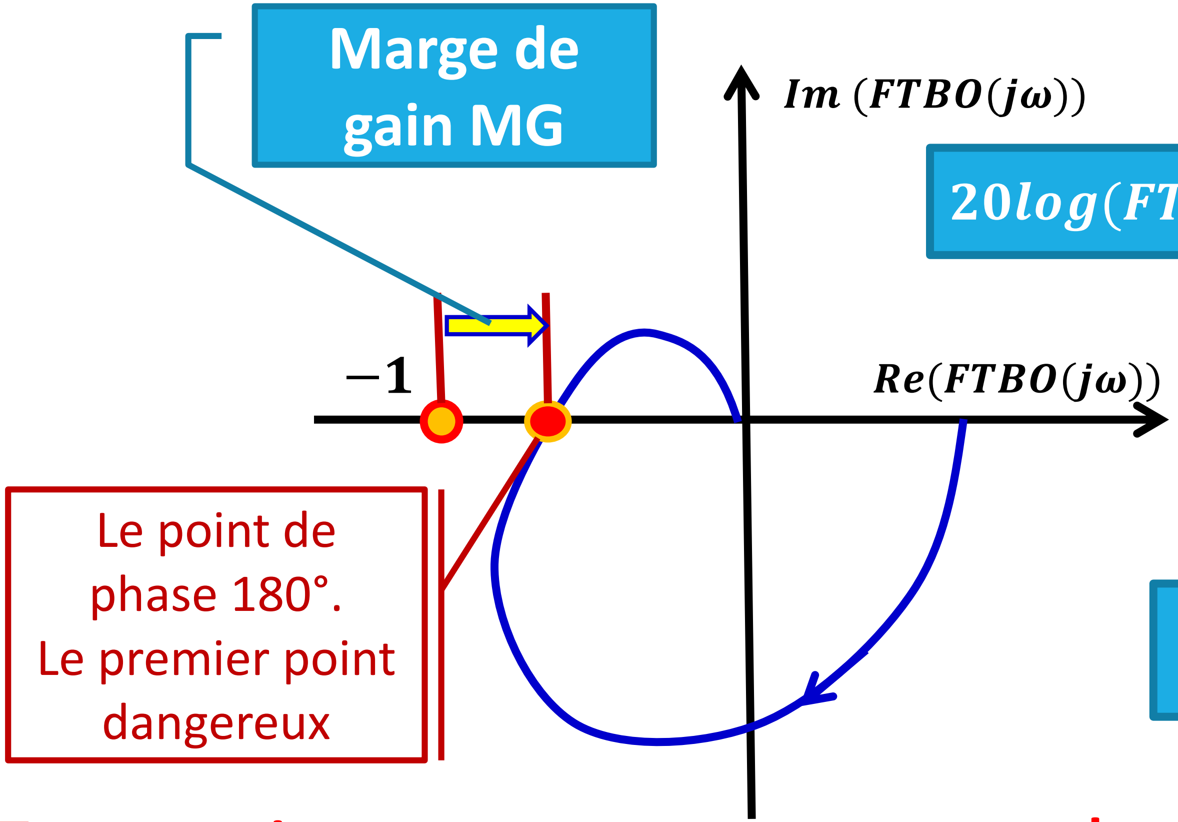
Ces raisons expliquent qu'en pratique on ne se contente pas de réaliser un système théoriquement stable. On assure la stabilité d'un système en prenant des marges de sécurité. Ces marges se traduisent par une distance à respecter entre le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte et le point critique d'affixe -1.

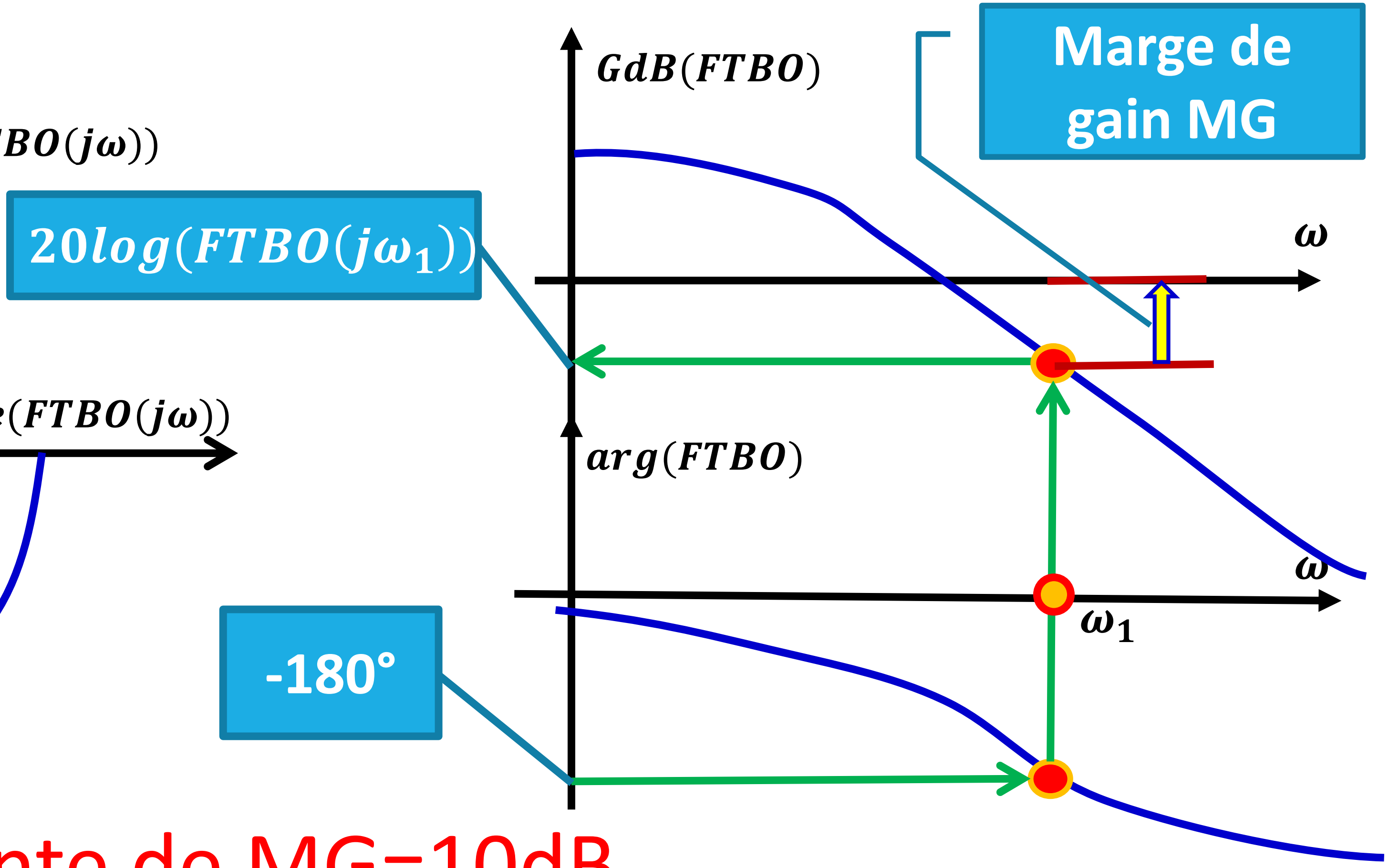
Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité

Marge de gain

$$MG = 0 - 20\log|FTBO(j\omega_1)|$$
$$\text{Avec } \arg(FTBO(j\omega_1)) = -180°$$





En pratique on se contente de MG=10dB

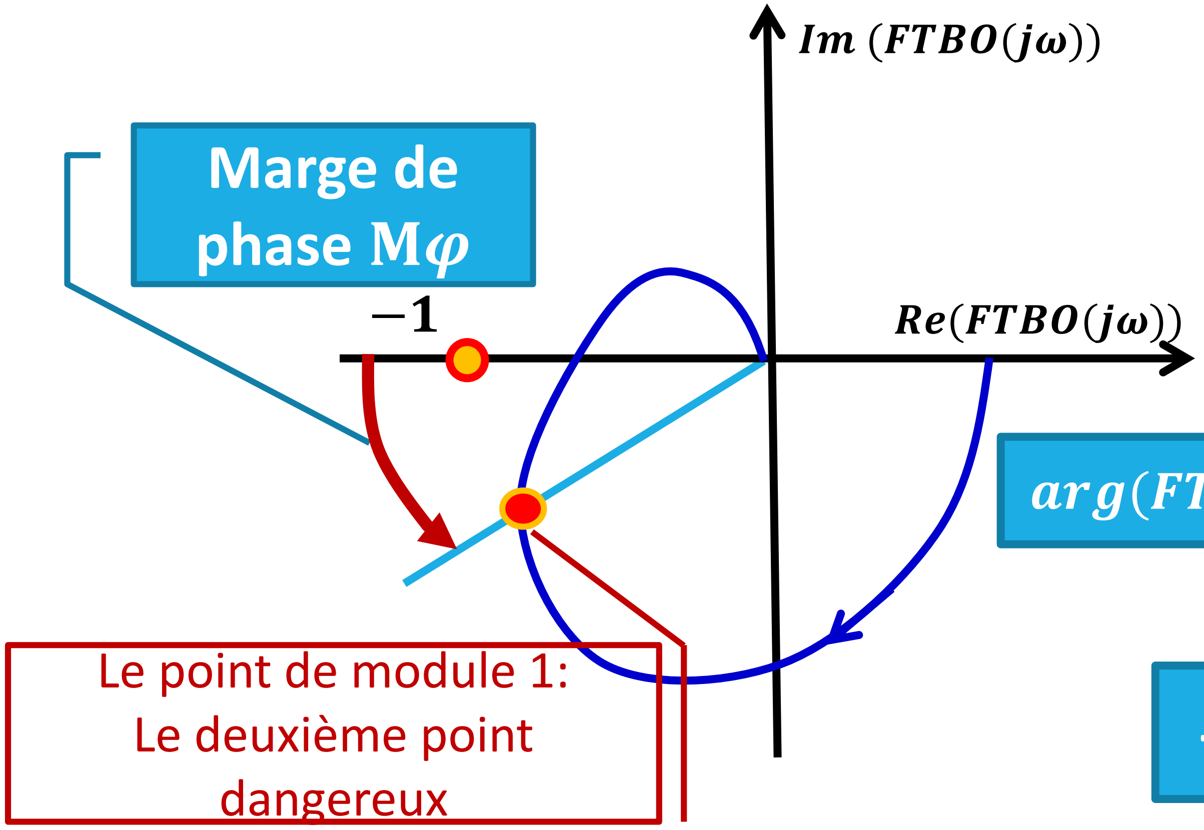
Performances (Rapidité, stabilité et précision)

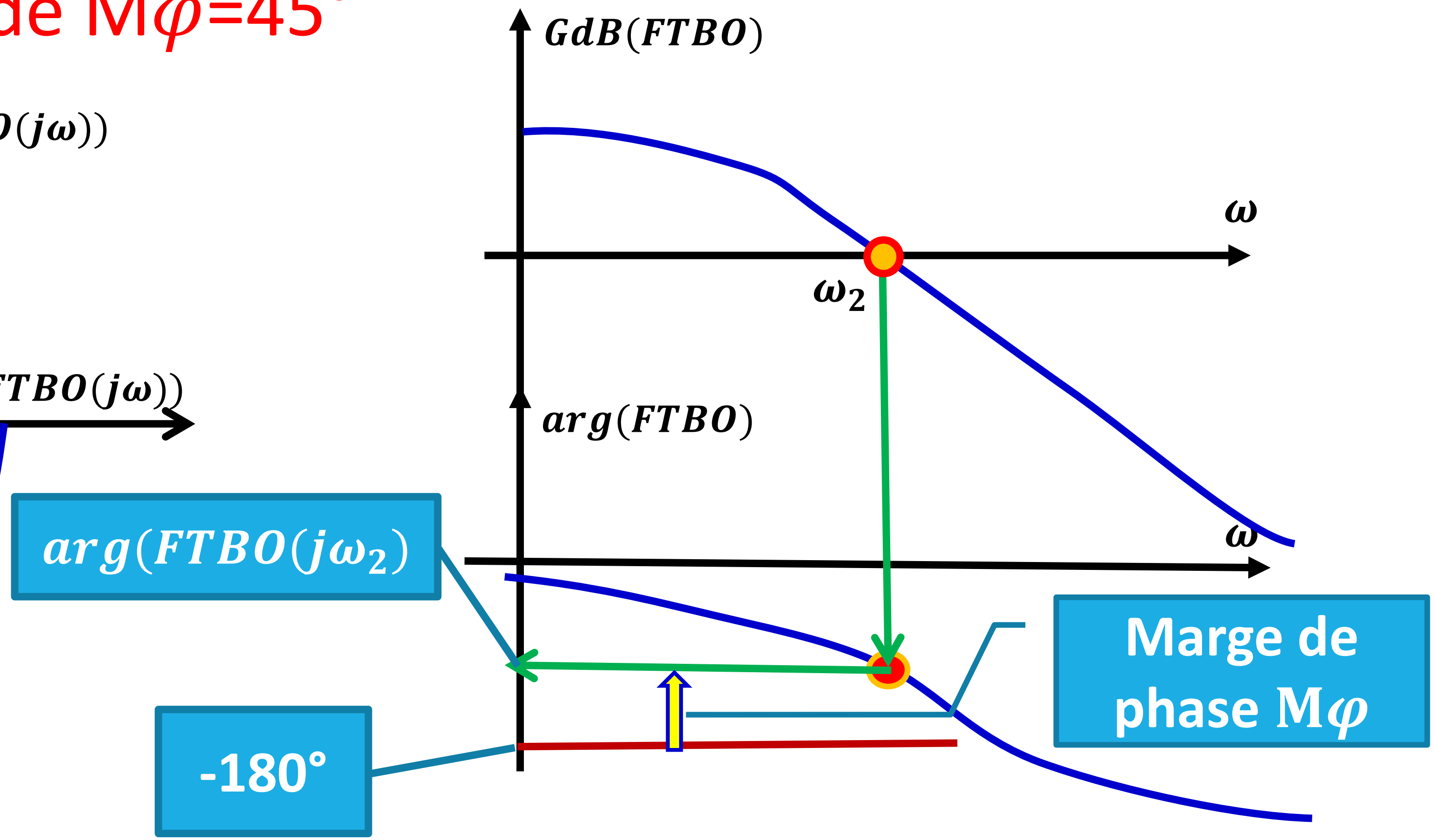
Stabilité

Marge de phase

$$M\varphi = arg\,(FTBO(j\omega_2)) + 180$$
Avec $|FTBO(j\omega_2)| = 1$

En pratique on se contente de Mφ=45°





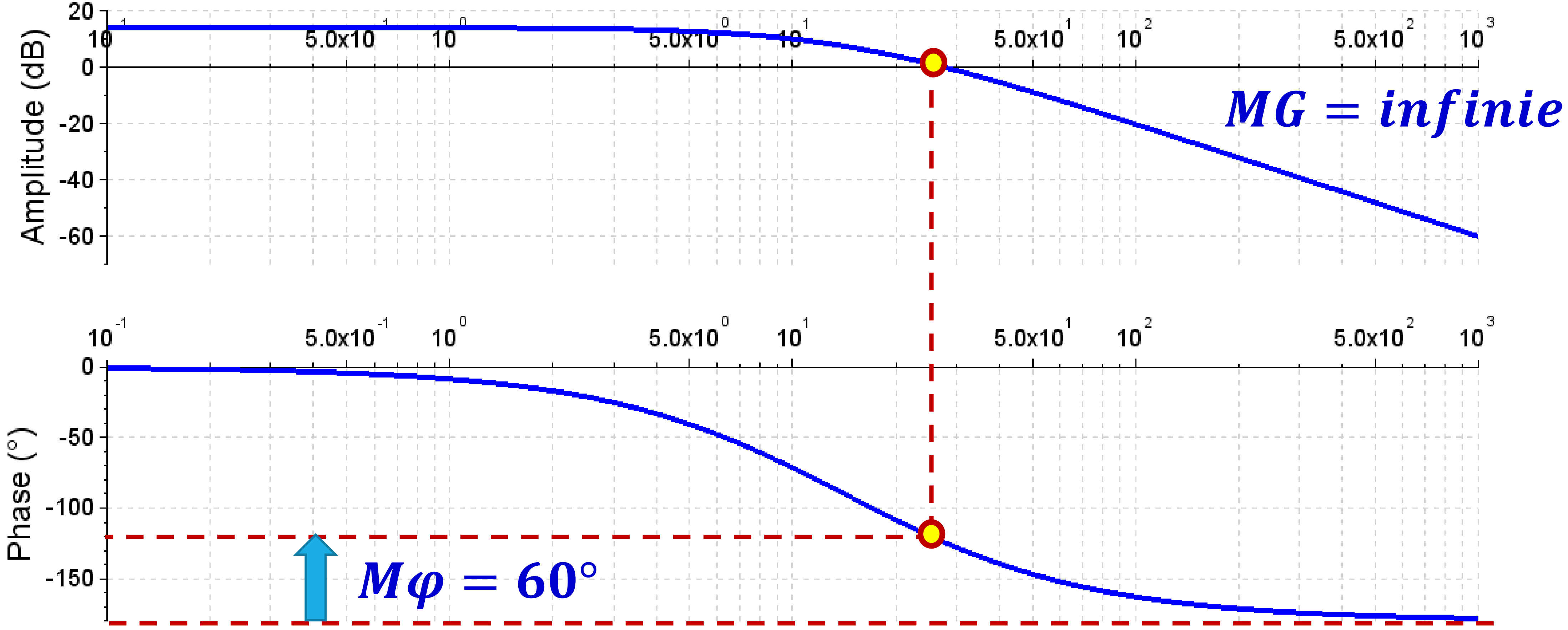
Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité   Critère de Revers

Applications

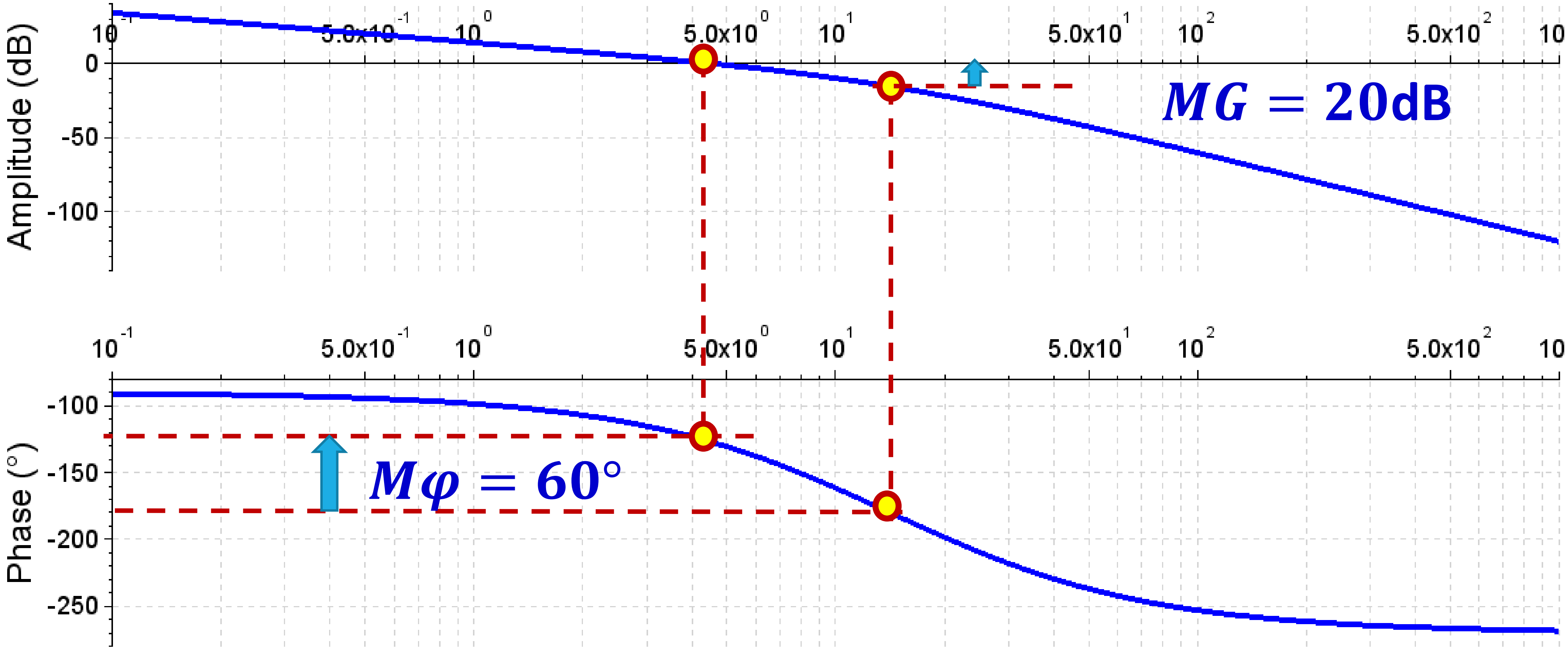
Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité **Déterminer les marges de gain et de phase**



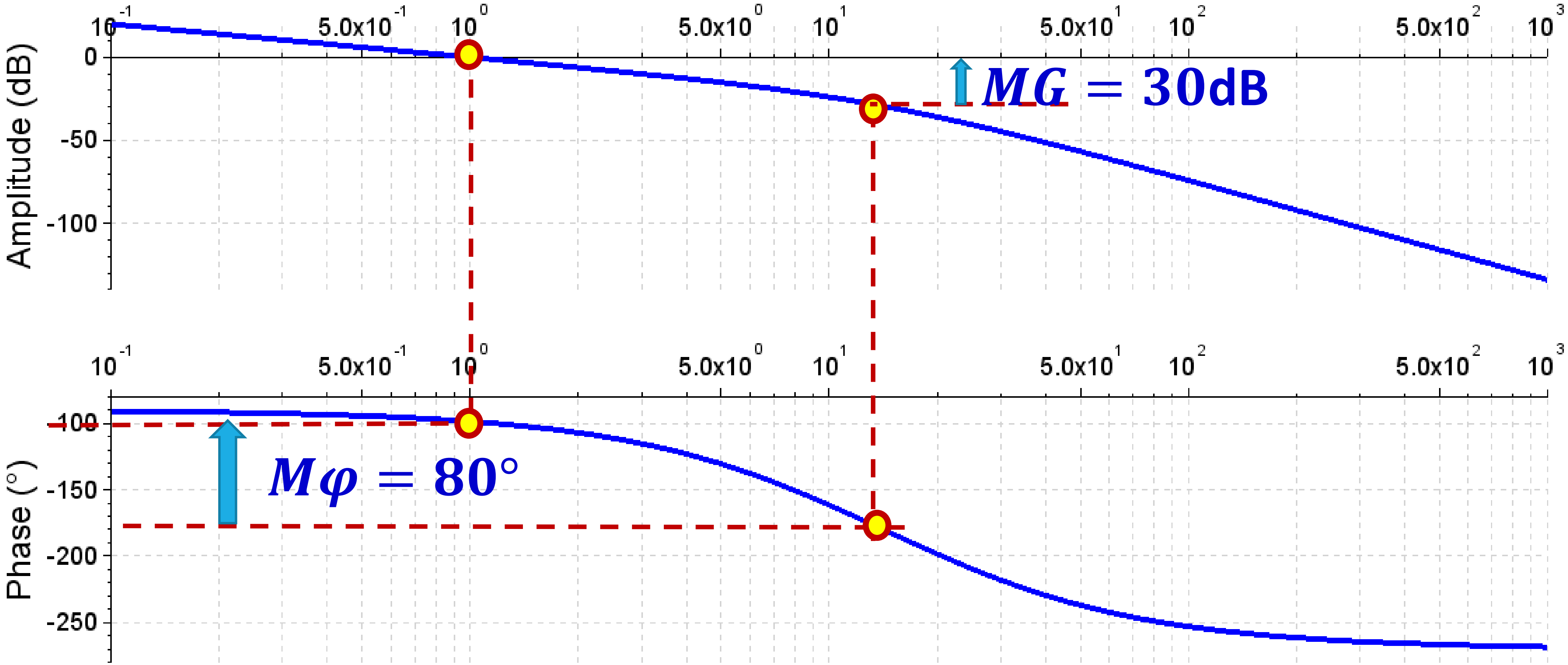
Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité **Déterminer les marges de gain et de phase**



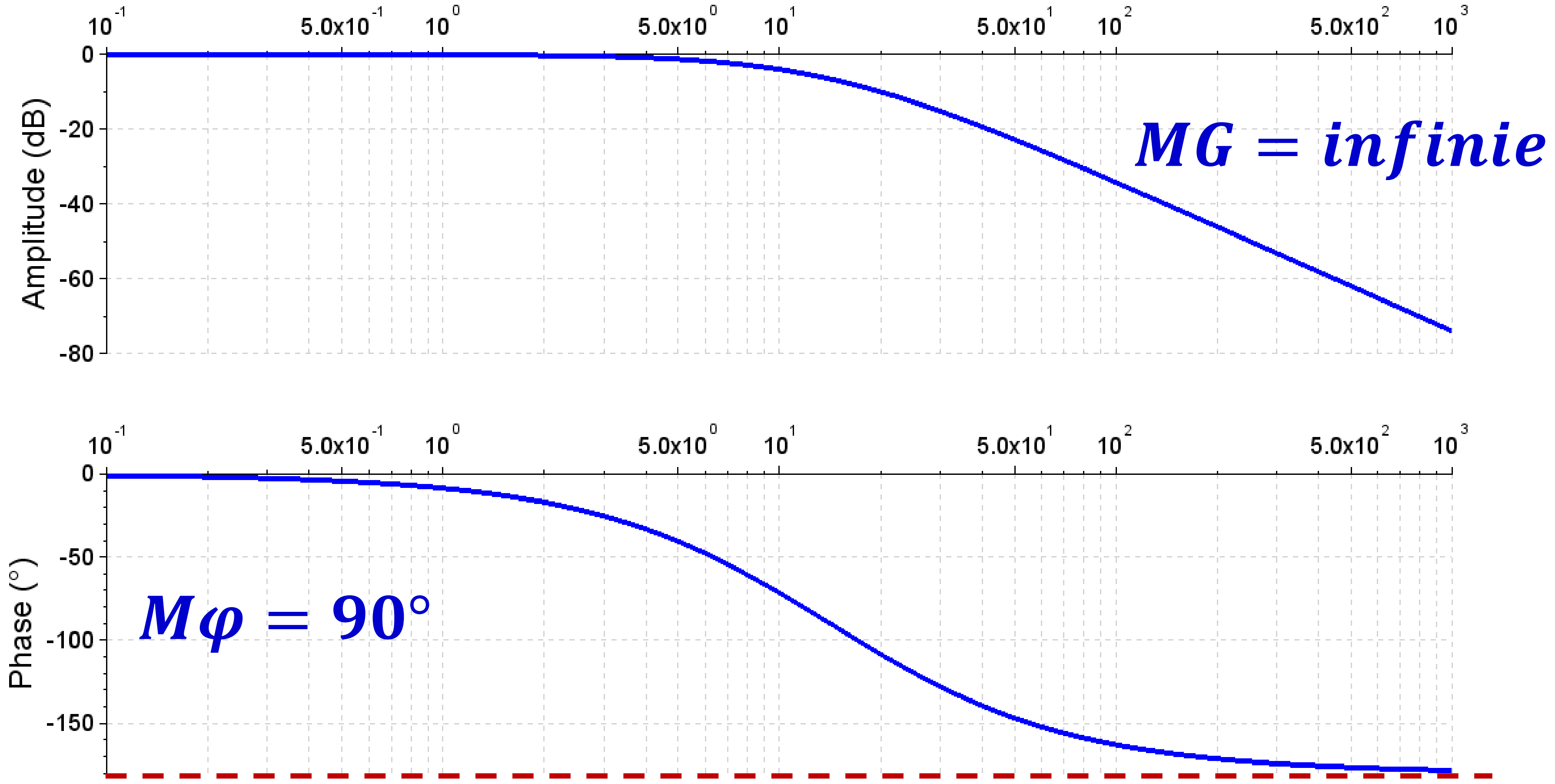
Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité **Déterminer les marges de gain et de phase**



Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité **Déterminer les marges de gain et de phase**



Performances (Rapidité, stabilité et précision)

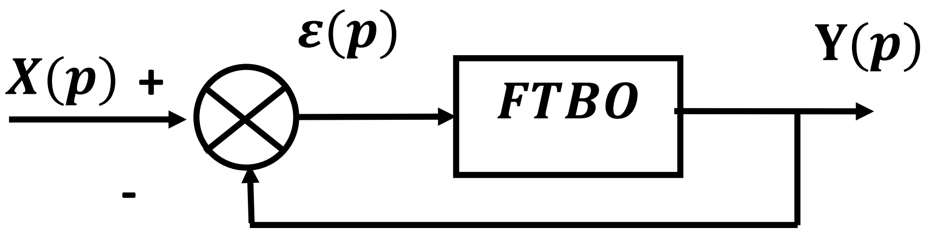
Stabilité

Application 2

Un asservissement à retour unitaire est défini par la fonction de transfert en chaîne directe :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p(1+0,1p)(1+4p)}$$

Calculer la valeur limite de K par le critère de Routh afin d'obtenir la limite de stabilité en BF.



$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1+FTBO(p)} = \frac{1}{k+p(1+0,1p)(1+4p)}$$

$$D(p) = k + p(1+0,1p)(1+4p)$$
$$= k + p + 4,1p^2 + 0,4p^3$$

Condition 1 de Routh: k>0

Tableau de Routh

p^3	0,4	1	0
p^2	4,1	k	0
p^1	α	0	
p^0	K		

Condition 2 de Routh:

$$\alpha = \frac{4,1-0,4k}{4,1} > 0$$

Condition générale de stabilité:

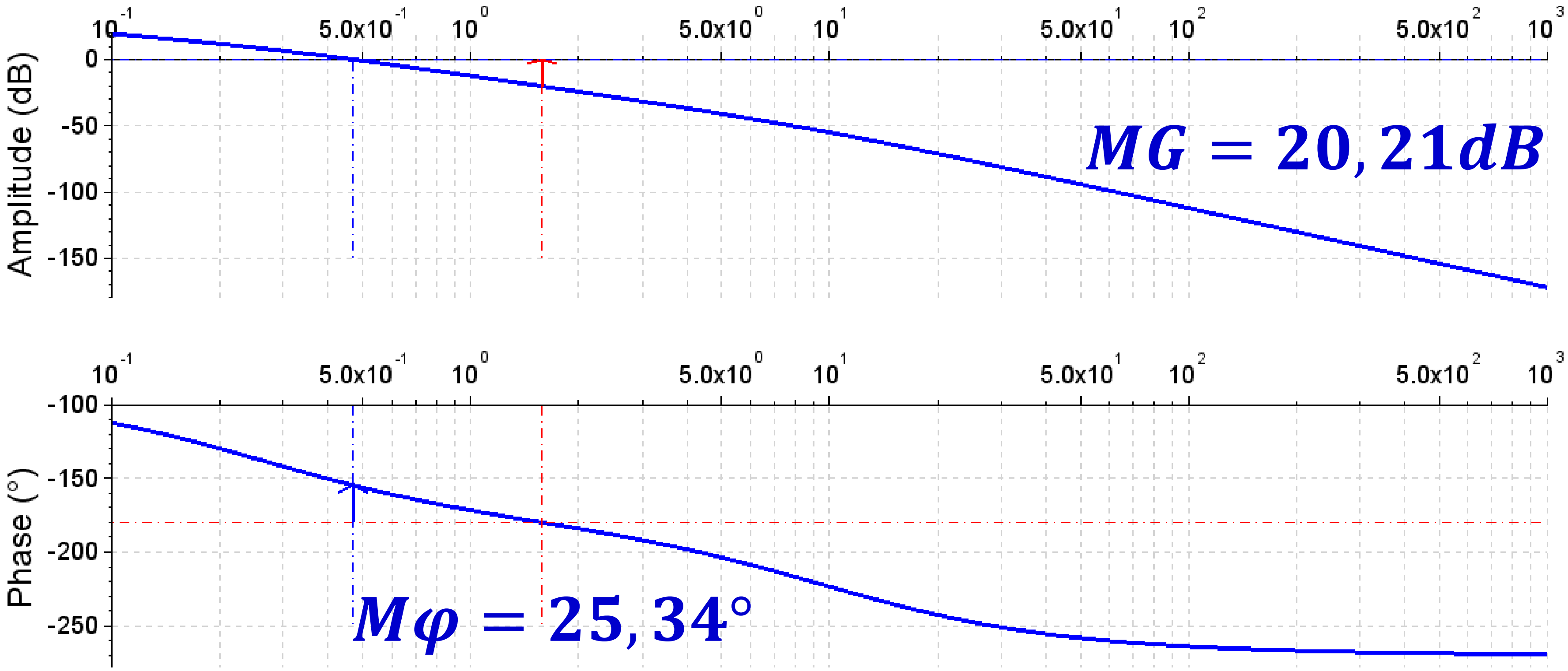
$$0 < K < 10,25$$

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité

Application 2

On donne ci-dessous le diagramme de Bode de cette fonction de transfert en boucle ouverte pour K= 1
Calculer la valeur limite de K graphiquement afin d'obtenir la limite de stabilité en BF.



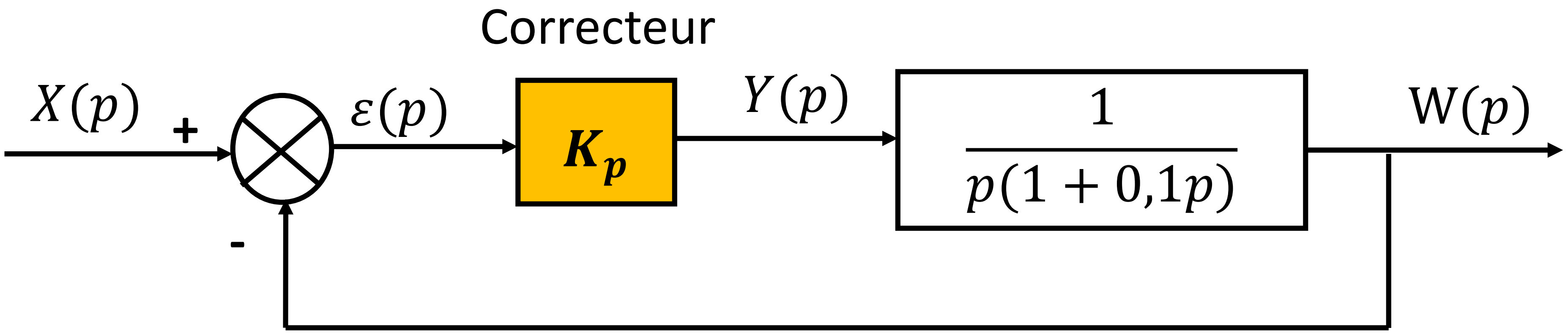
$$20 \log k_{lim} = MG$$

$$k_{lim} = 10^{\frac{20,21}{20}} = 10,25$$

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité

Application 3



Déterminer la valeur de K_p permettant d'avoir une marge de phase égale à 45°.

$$M\varphi = 180 + \arg(FTBO(j\omega_1)) \;\; avec \; |FTBO(j\omega_1)| = 1$$

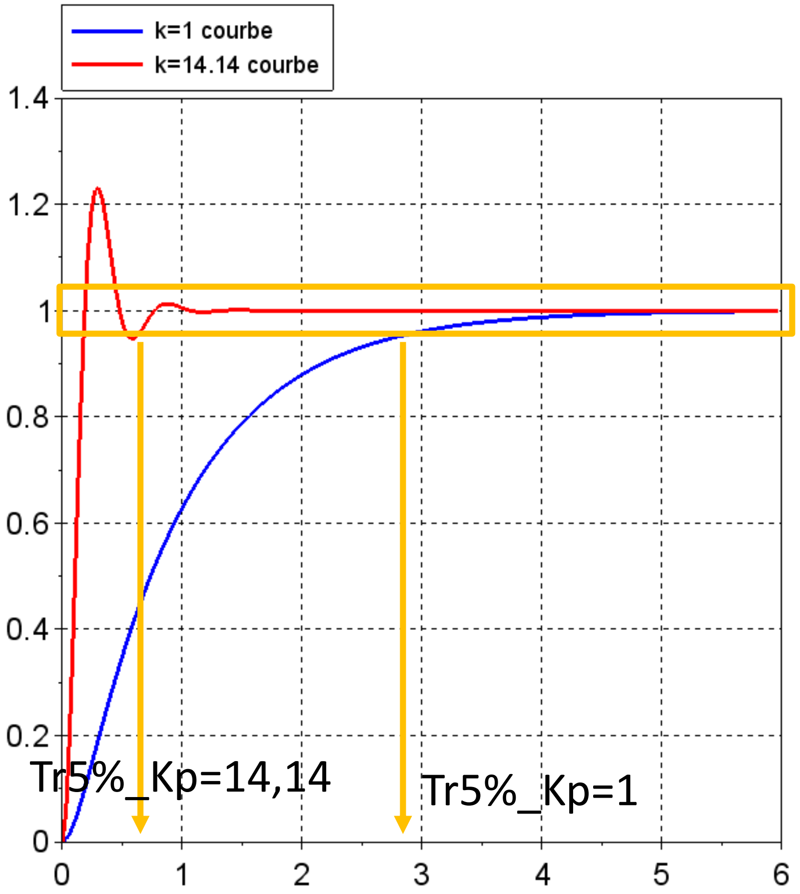
$$45 = 180 - 90 - artcan(0{,}1\omega_1) \Rightarrow \omega_1 = 10 \text{rad/s}$$

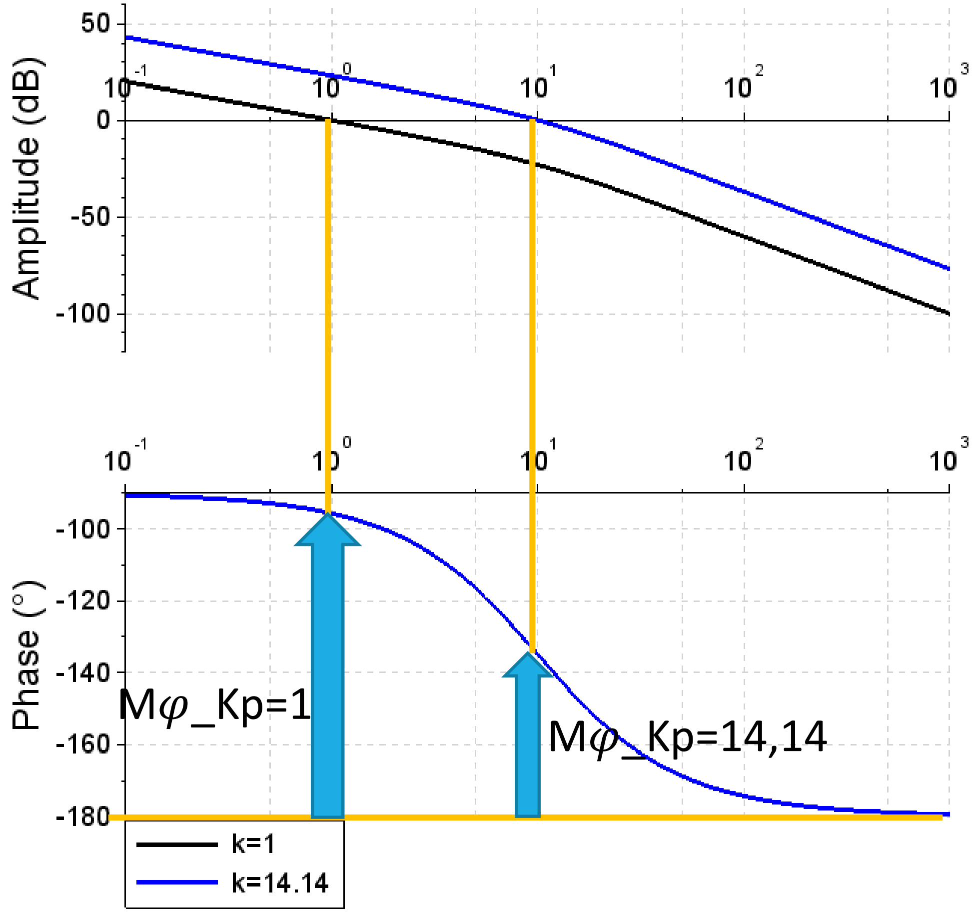
$$K_p = \omega_1\sqrt{2} = 14{,}14$$

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité

Application 3



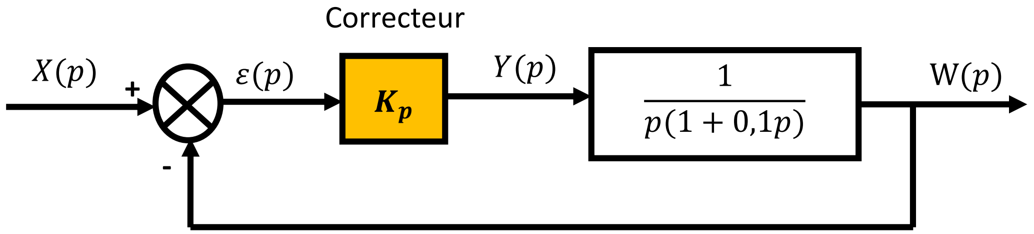


Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité

Application 3

Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée FTBO(p) et la mettre sous la forme canonique d'un système de second ordre. Déterminer la valeur de Kp permettant d'avoir la réponse la plus rapide.



$$\boldsymbol{FTBF(p) = \frac{k_p}{k_p+p+0{,}1p^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{k_p}p+\frac{0{,}1}{k_p}p} = \frac{K}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}}$$

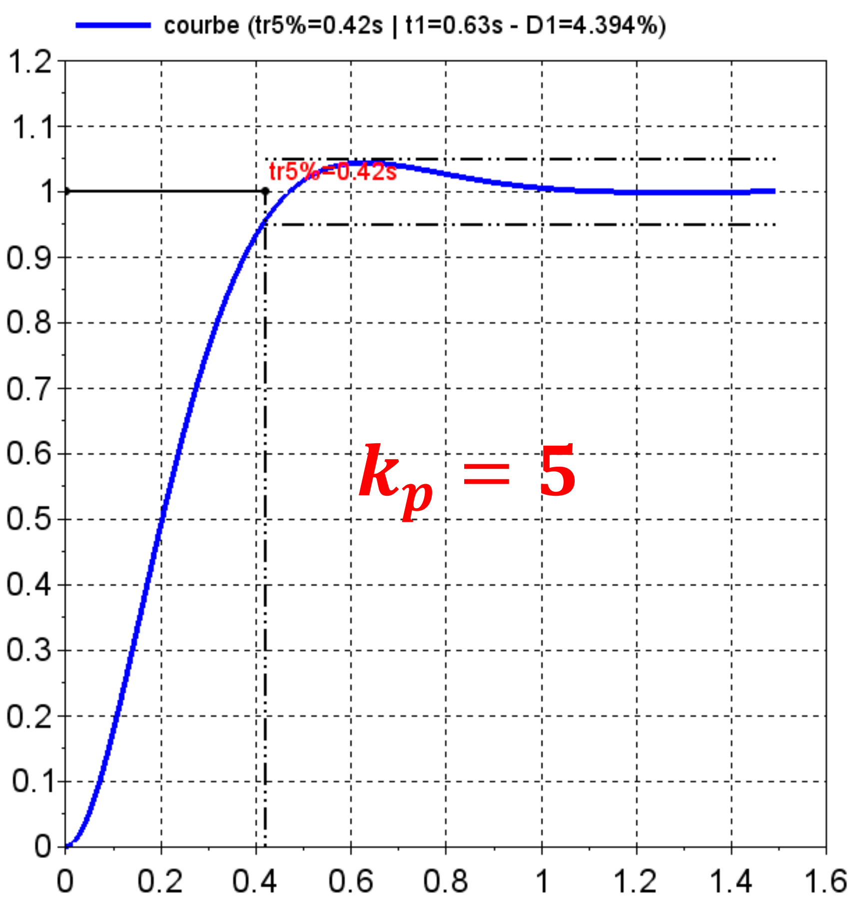
$$\left\{\begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{10k_p} \\ m = \dfrac{\omega_0}{2k_p} = \dfrac{\sqrt{10}}{2\sqrt{k_p}} \end{array}\right.$$

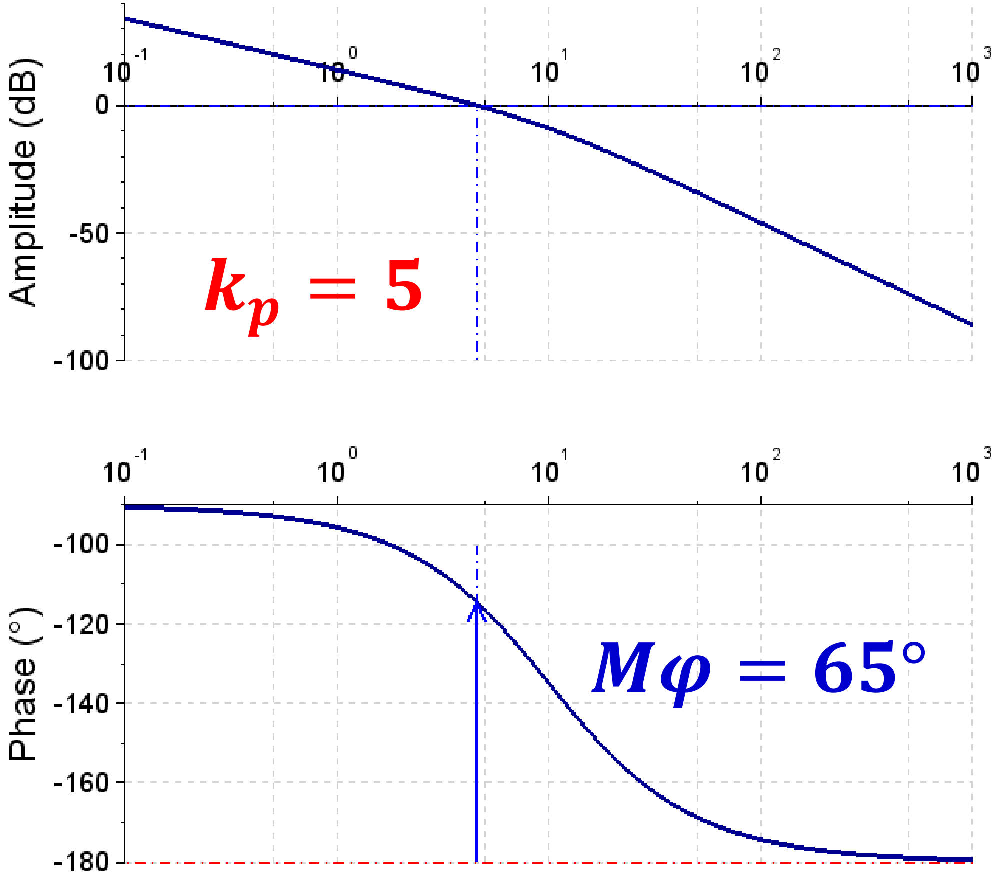
La réponse la plus rapide sans dépassement est pour $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit pour $k_p = 5$

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Stabilité

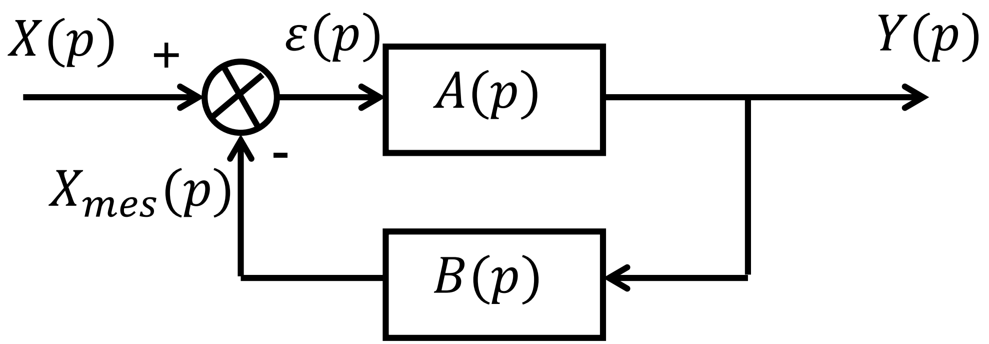
Application 3





Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Précision



$$\varepsilon(p) = X(p) - X_{mes}(p) = \frac{X(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{X(p)}{1 + FTBO(p)}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} \frac{pX(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Précision

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{pX(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

Erreur de position (statique, indicielle : $x(t) = au(t) \Rightarrow X(p) = \frac{a}{p} \Rightarrow \varepsilon_s(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{a}{1+FTBO(p)}$

Erreur de vitesse (poursuite, trainage) : $x(t) = atu(t) \Rightarrow X(p) = \frac{a}{p^2} \Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{a}{p\left(1+FTBO(p)\right)}$

Erreur d'accélération : $x(t) = at^2u(t) \Rightarrow X(p) = \frac{2a}{p^3} \Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{2a}{p^2\left(1+FTBO(p)\right)}$

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

Précision

En fonction de la classe

$$FTBO(p) = \frac{K_{bo}}{p^{\alpha}} \times \frac{1 + b_1p^1 + \cdots + b_mp^m}{1 + a_1p^1 + \cdots + a_np^n}$$

Avec :

- K_{bo}: Gain de la $FTBO$
- α: Classe du système

- $FTBO(p) = \frac{10}{2+p+p^2}$ ➔ $K_{bo} = 5\ et\ \alpha = 0$
- $FTBO(p) = \frac{10}{p(1+p+p^2)}$ ➔ $K_{bo} = 10\ et\ \alpha = 1$

Au voisinage de 0,

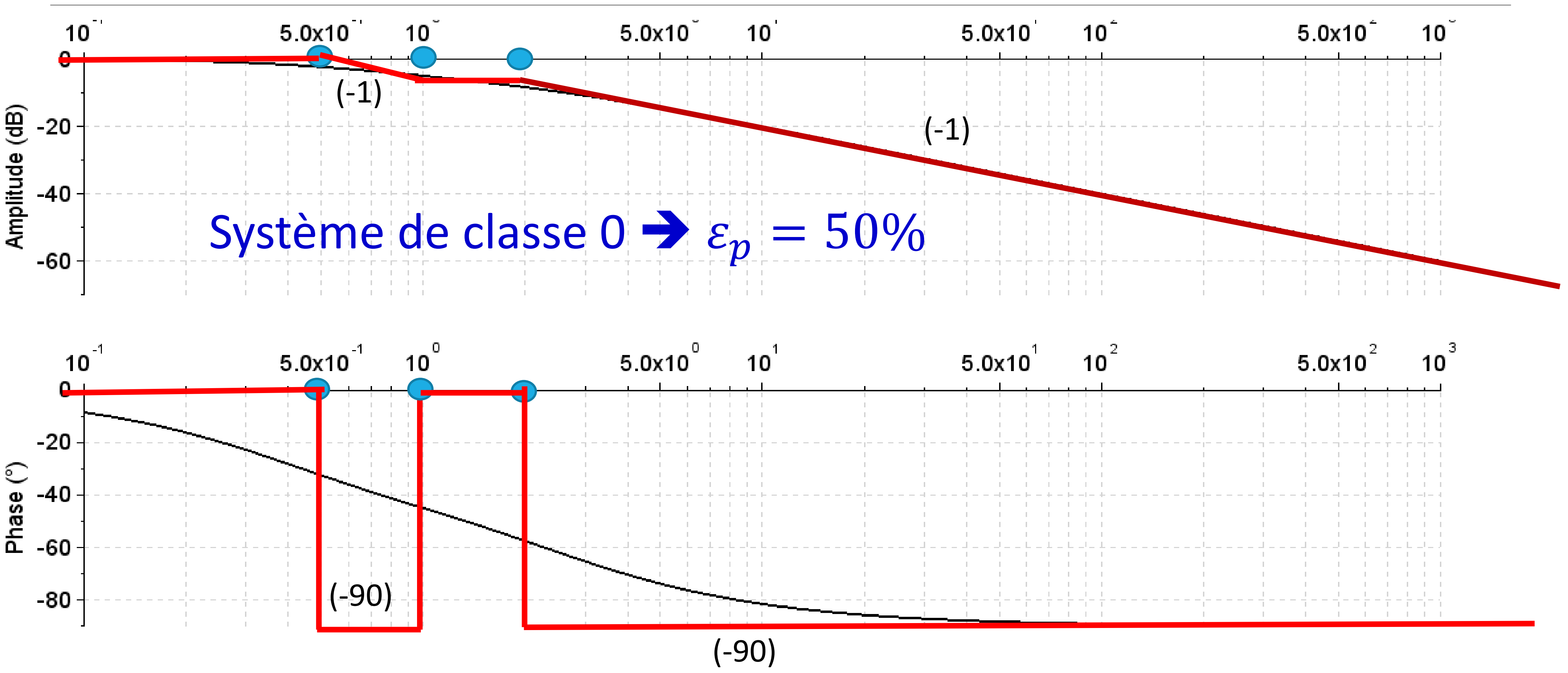
$$FTBO(p) \sim \frac{K_{bo}}{p^{\alpha}}$$

Performances (Rapidité, stabilité et précision)

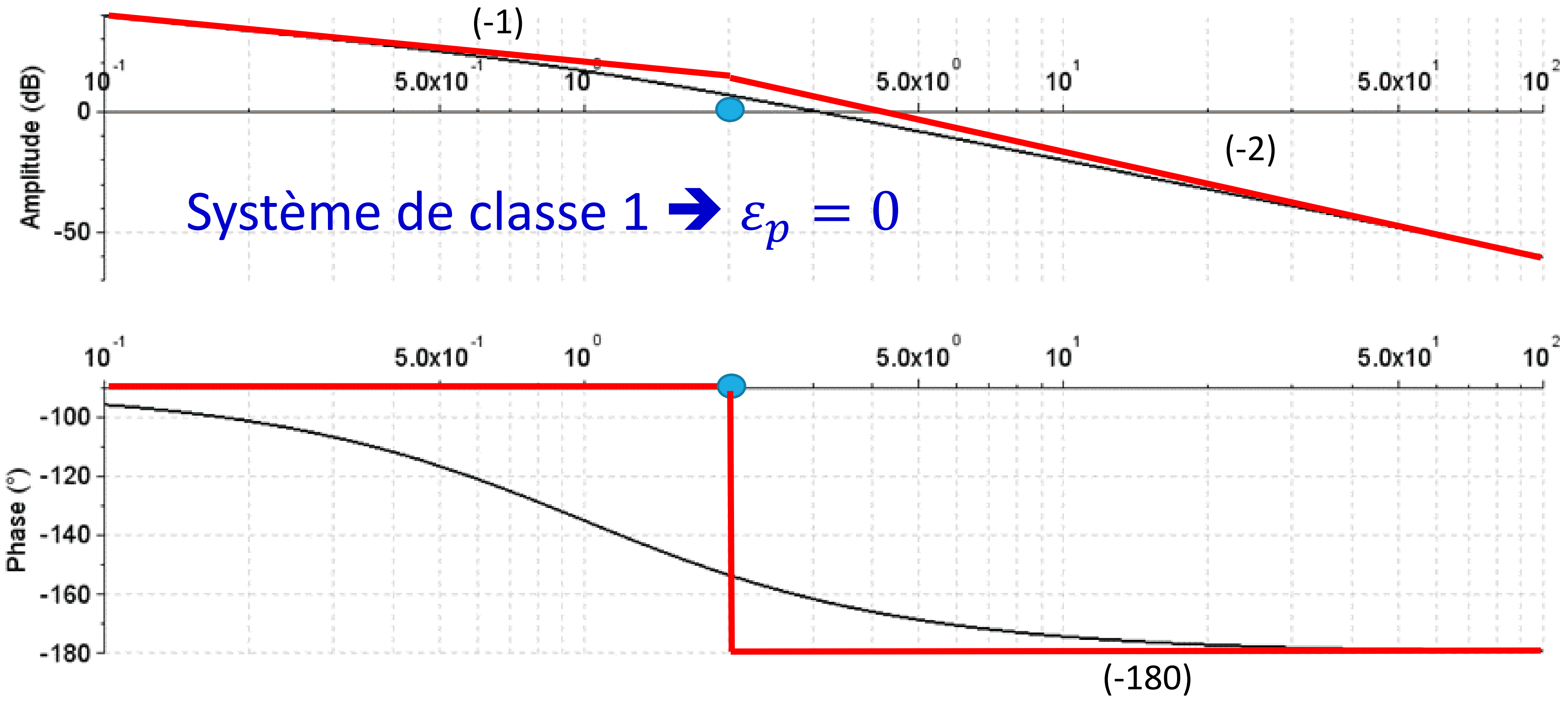
Précision En fonction de la classe

		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Erreur statique	$\varepsilon_s = \lim\limits_{p \to 0} \frac{a}{1+FTBO(p)}$	$\frac{a}{1+K_{bo}}$	0	0
Erreur de vitesse	$\varepsilon_v = \lim\limits_{p \to 0} \frac{a}{p\left(1+FTBO(p)\right)}$	$+\infty$	$\frac{a}{K_{bo}}$	0
Erreur d'accélération	$\varepsilon_a = \lim\limits_{p \to 0} \frac{2a}{p^2\left(1+FTBO(p)\right)}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{2a}{K_{bo}}$

On donne ci-dessous les tracés réels de la FTBO d'un asservissement à retour unitaire. On demande d'étudier la précision du système en boucle fermée



On donne ci-dessous les tracés réels de la FTBO d'un asservissement à retour unitaire. On demande d'étudier la précision du système en boucle fermée



Système de classe 1 ➔ $\varepsilon_p = 0$

Merci pour votre attention