Automatique des systèmes mécaniques:

Asservissement des Systèmes Linéaires Continus et Invariants (SLCI): Séance 2

LEFI ABDELLAOUI: INGÉNIEUR DOCTEUR AGRÉGÉ EN GÉNIE MÉCANIQUE

IPEIB 2020

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Avant tout

L'identification expérimentale consiste à déterminer expérimentalement la fonction de transfert d'un système. Deux approches peuvent etre considérées:

- Identification en boucle ouverte (le système n'est pas asservi)
- Identification en boucle fermée (un régulateur asservi le système)

Identification en boucle ouverte:

e(t): Signal d'entrée → **Système** → **s(t): Signal de sortie**

Identification temporelle

Impulsion de Dirac
Echelon d'amplitude a
Rampe de pente a

Réponse Impulsionnelle
Réponse indicielle (système de premier ordre, système de 2° ordre (courbe en S, courbe avec oscillation))
Courbe intégratrice (réponse à une rampe)

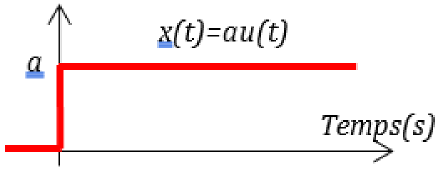
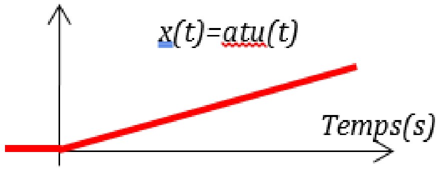
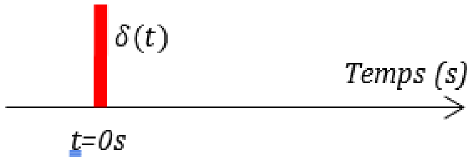
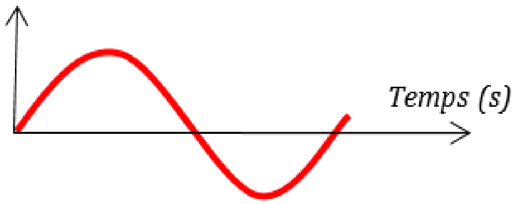
Sinusoide d'amplitude a et φ

Sinusoide d'amplitude a2 et $\varphi 2$: (diagramme de Bode, etc.)

Identification fréquentielle

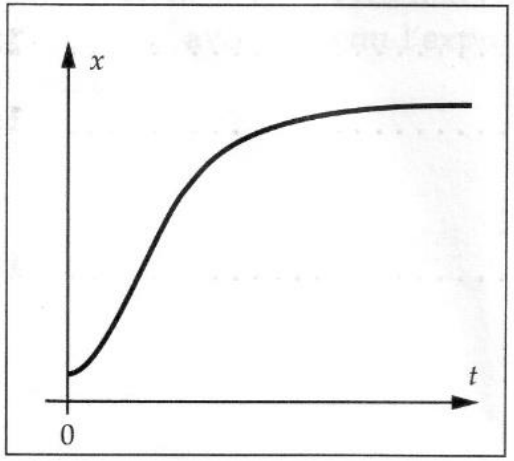
Identification expérimentale de la fonction de transfert

Avant tout **Identification en boucle ouverte:** e(t): Signal d'entrée

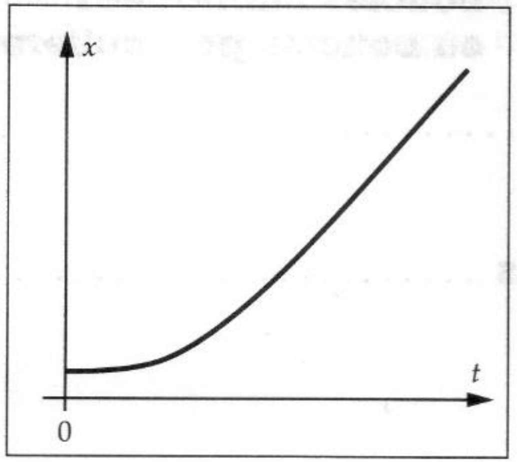
Echelon d'amplitude a	Rampe de pente a
 $Pour t < 0,\ x(t) = 0$ $Pour t > 0,\ x(t) = a$ L'échelon est unitaire si a=1 (*x(t)=au(t)*) $L[u(t)] = \frac{1}{p}$	 $Pour t < 0,\ x(t) = 0$ $Pour t > 0,\ x(t) = at$ $L[atu(t)] = \frac{a}{p^2}$
Impulsion de Dirac	**Sinusoïde**
L'impulsion de Dirac vérifie les propriétés : $\delta(t) = 0\ si\ t \neq 0$ $\delta(t) = \infty\ si\ t = 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$  $L[\delta(t)] = 1$	 $pour t < 0, x(t) = 0$ $pour t > 0, x(t) = a \sin(\omega t)\, u(t)$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

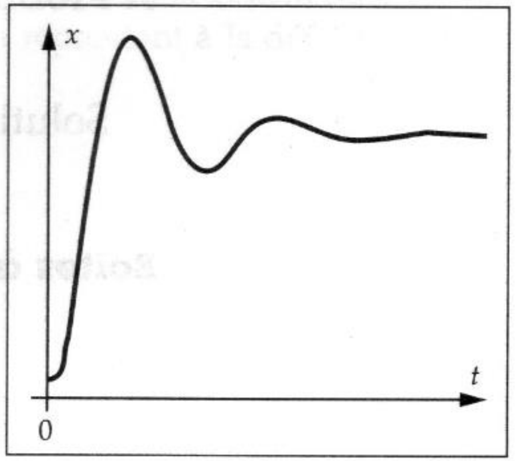
Avant tout **Identification en boucle ouverte:** **s(t): Signal de sortie**



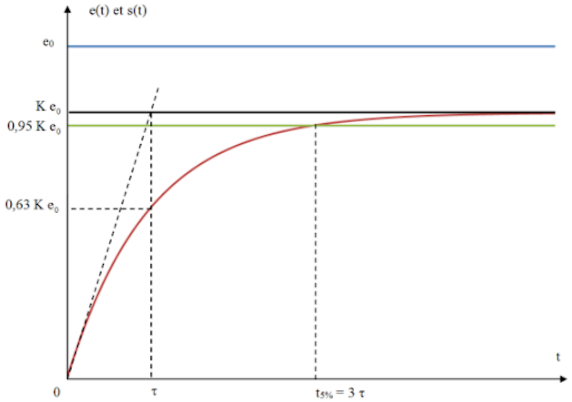
a Courbe « en S »

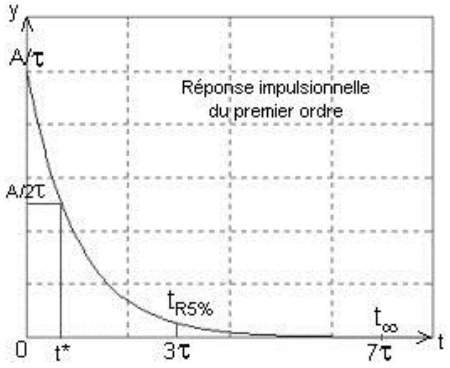


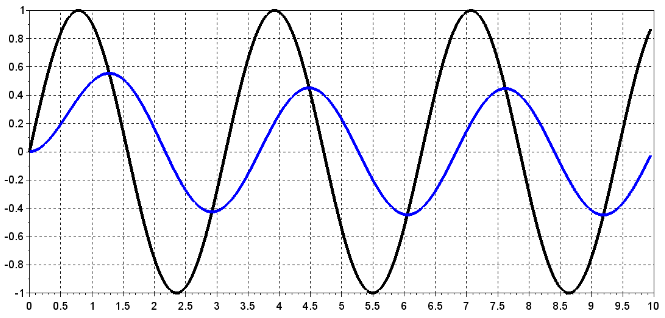
b Courbe « intégratrice »



c Courbe « avec oscillations »

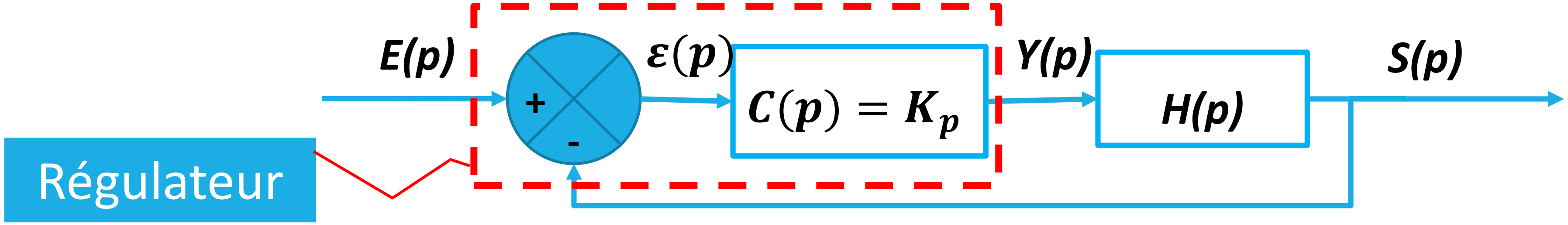






Identification expérimentale de la fonction de transfert

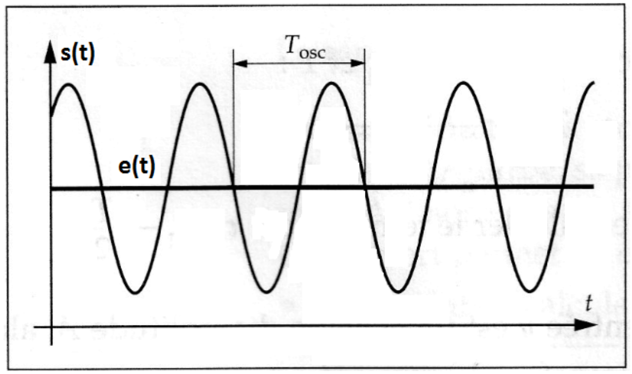
Avant tout   Identification en boucle fermée:



Deux essais sont nécessaires afin d'identifier la fonction de transfert H(p):

Premier essai: Permet de savoir si le procédé est naturellement stable (dans ce cas on détermine le gain statique Ks) ou naturellement instable (intégrateur)

Deuxième essai: Augmenter K_p et chercher à mettre le système en oscillation juste entretenue puis enregistrer la sortie s(t)



Identification expérimentale de la fonction de transfert

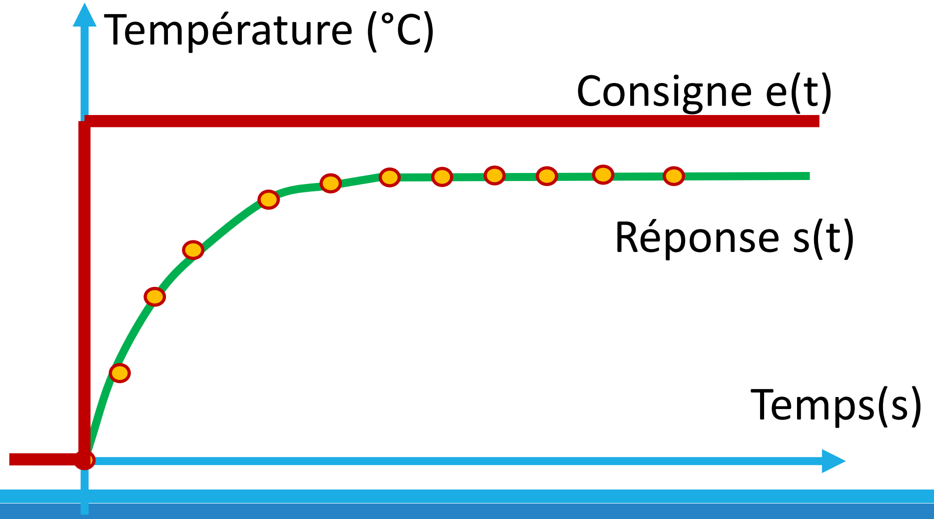
Avant tout Identification temporelle en boucle ouverte:

e(t): Signal d'entrée → **Système** → **s(t): Signal de sortie**

Echelon d'amplitude a=180°C   Réponse indicielle

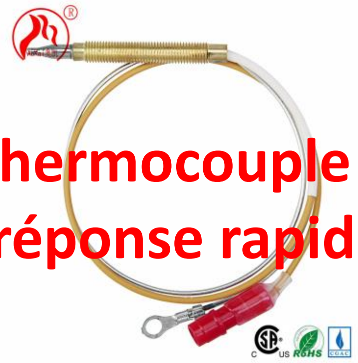
Four électrique

Temps (s)	0	10	20	30	40	Etc.
Température (°C)	**	**	**	**	**	...



Système de premier ordre

$$\boldsymbol{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}}$$



Thermocouple à réponse rapide

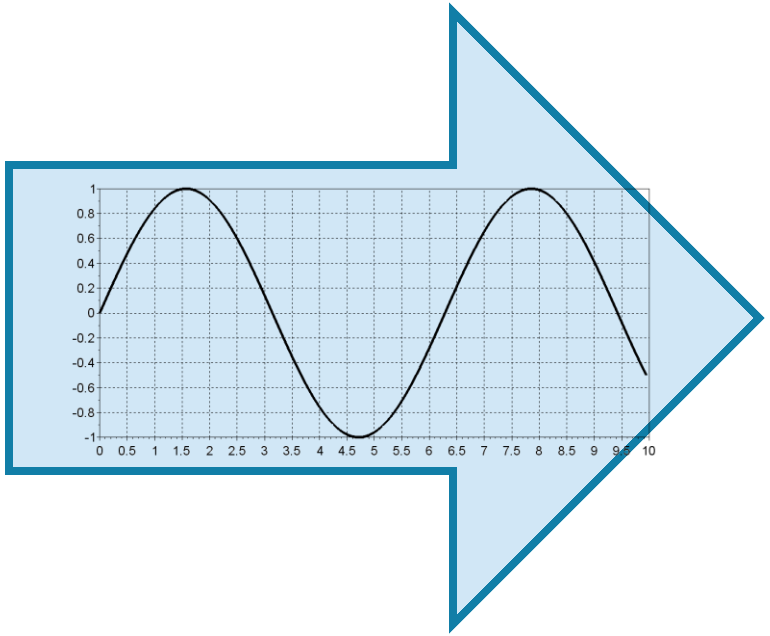
Identification expérimentale de la fonction de transfert

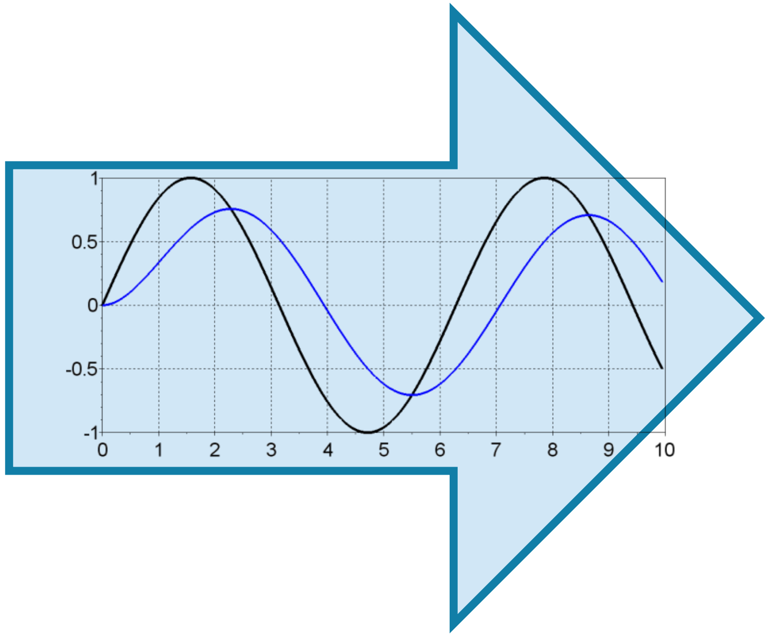
Avant tout   Identification fréquentielle en boucle ouverte:

e(t): Signal d'entrée **Système** s(t): Signal de sortie

Sinusoide d'amplitude A_1 et φ_1

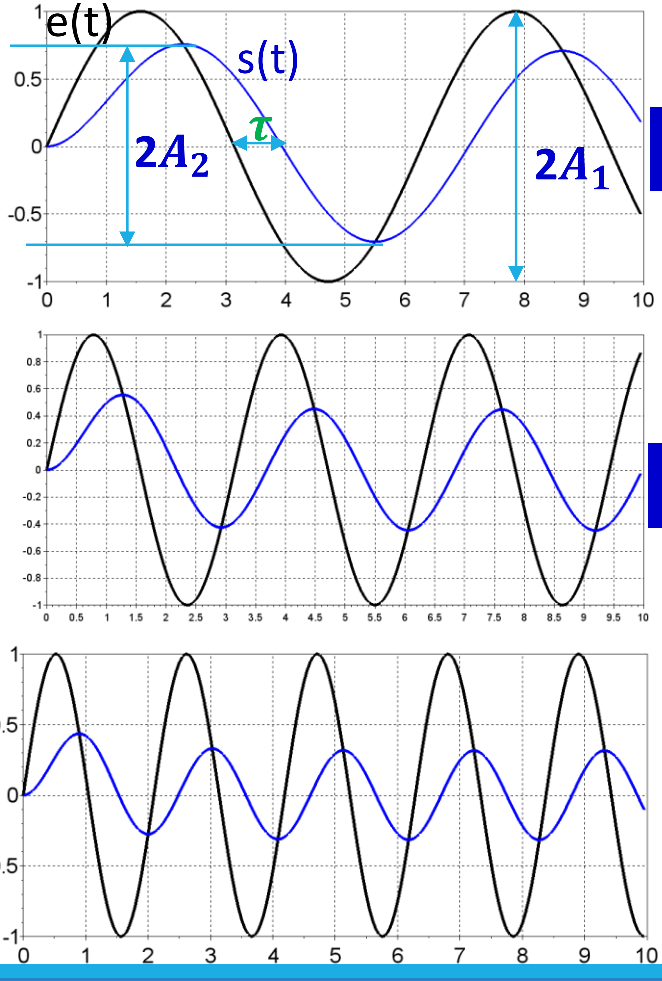
Sinusoide d'amplitude A_2 et φ_2





Identification expérimentale de la fonction de transfert

Avant tout   Identification fréquentielle en boucle ouverte:



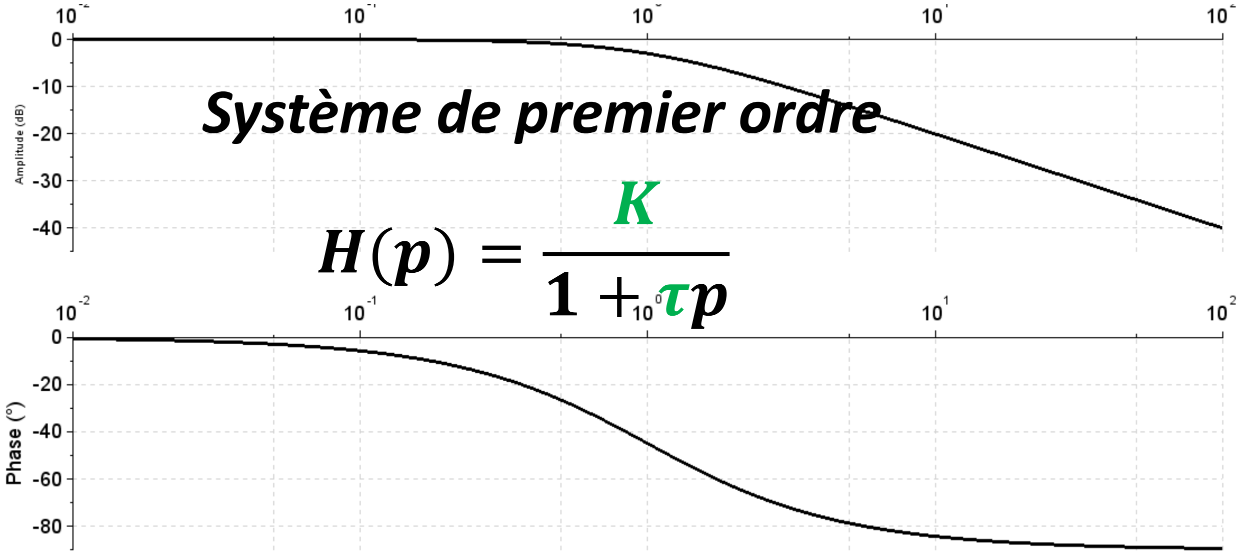
$\omega = 1rad/s$

$\omega = 2rad/s$

$\omega = 3rad/s$

$$GdB = 20log\,\frac{A_2}{A_1}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\tau$$



Système de premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de 1er ordre: Fonction de transfert

$$\boldsymbol{x(t)} \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{H(p)}} \longrightarrow \boldsymbol{y(t)}$$

Un système est dit de premier ordre si la relation entre son entrée et sa sortie est une équation différentielle du premier ordre.

$$y(t) + \boldsymbol{\tau}\dot{y}(t) = \boldsymbol{K}x(t)$$

- $\boldsymbol{K}$: Gain statique ;
- $\boldsymbol{\tau}$: Constante de temps du système

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est de la forme :

$$\boldsymbol{H(p) = \frac{K}{(1 + \tau p)}}$$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de 1er ordre: Réponse indicielle

Une réponse est dite indicielle si l'entrée est de type échelon. Soit :

$x(t) = au(t) \Rightarrow X(p) = L(x(t)) = \frac{a}{p}$

$Y(p) = H(p)X(p) = \frac{K}{(1+\tau p)}\frac{a}{p} = Ka\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{(1+\tau p)}\right)$

$y(t) = Ka\left(1 - exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)$,On a : $\begin{cases} \boldsymbol{y(0) = 0} \\ \boldsymbol{y(\infty) = Ka} \end{cases}$

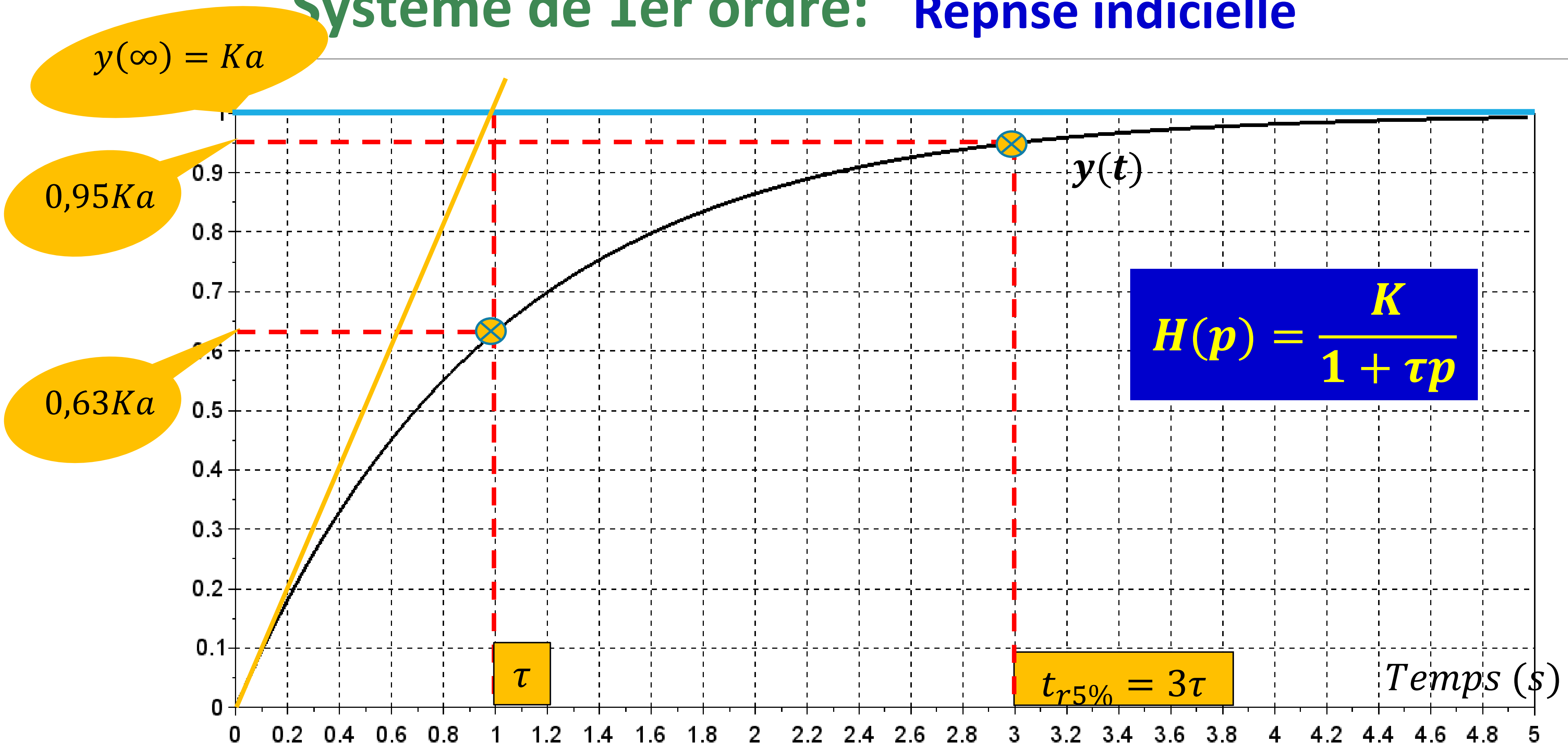
Soit $t_{r5\%}$: Le temps de réponse à 5%, c'est-à-dire, le temps nécessaire pour atteindre 95% de $y(\infty)$.

$y(t_{r5\%}) = 0{,}95Ka = Ka(1 - exp(\frac{-t_{r5\%}}{\tau})) \Rightarrow t_{r5\%} = -\ln 0.05 \approx 3\tau$, $\boldsymbol{t_{r5\%} \approx 3\tau}$ et $y(t_{r5\%}) = 0{,}95Ka$

Soit encore : $y(\tau) = Ka(1 - exp(-1)) = 0{,}63Ka$, $\boldsymbol{y(\tau) = 0,63y(\infty) = 0,95Ka}$

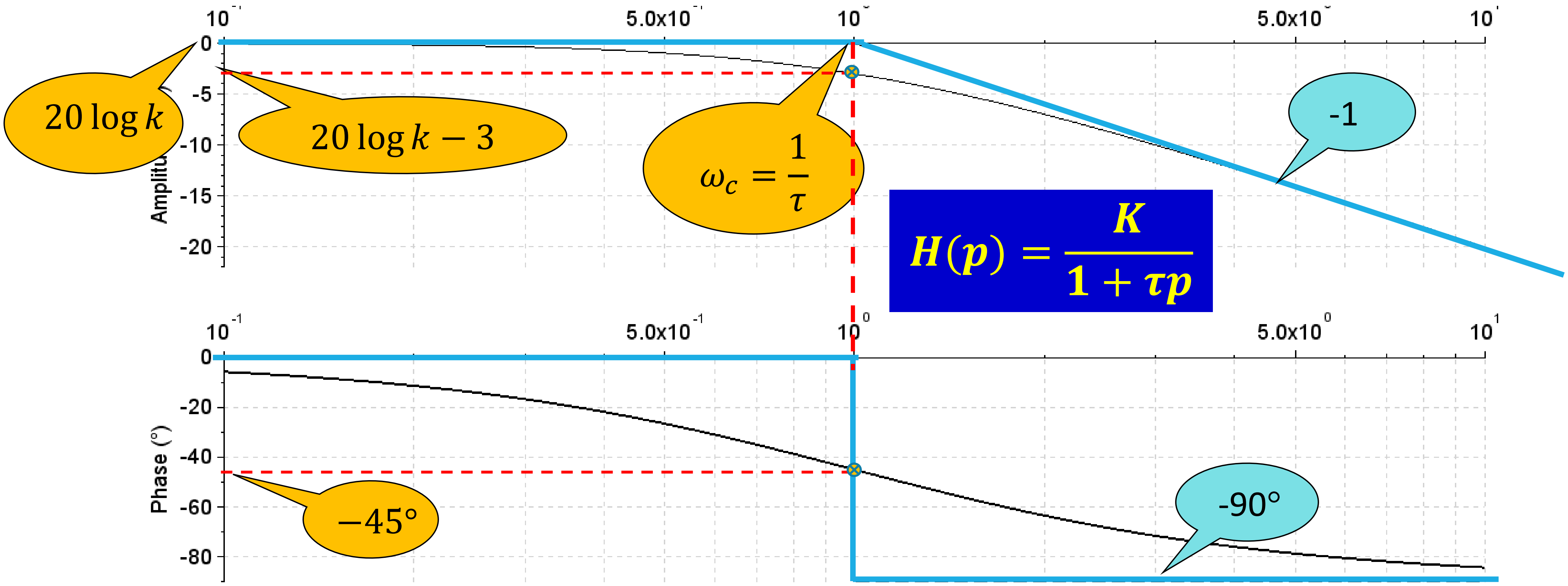
Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de 1er ordre: Répnse indicielle



Identification expérimentale de la fonction de transfert

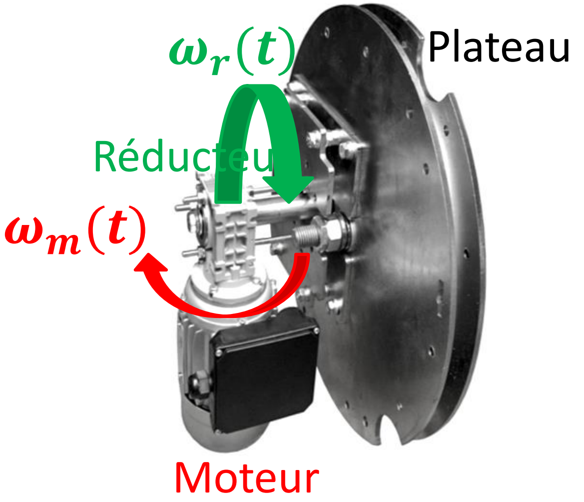
Système de 1er ordre: Réponse fréquentielle



Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de 1er ordre: Application

Un plateau est entrainé en rotation à travers un réducteur par un moteur à courant continu.



les équations qui régissent le fonctionnement du moteur sont :

$$\begin{cases} e(t) = u(t) - Ri(t) \\ e(t) = k_e \omega(t) \\ c_m(t) = k_t i(t) \\ c_m(t) = J_{eq} \dfrac{d\omega(t)}{dt} \end{cases}$$

Avec :

- $e(t)$: La force électromotrice en V ;
- $u(t)$: La tension d'entrée en V ;
- $i(t)$: Le courant d'induit du moteur en A ;
- $\omega(t)$: La vitesse angulaire de l'arbre du moteur en rad/s ;
- $c_m(t)$: Le couple électromécanique délivré par le moteur en Nm ;
- R : La résistance de l'induit en Ω ;
- k_e : La constante de la force électromotrice en $\mathrm{V/rad\ s^{-1}}$;
- k_t : La constante du couple électromécanique m N A^{-1}
- Jeq : Moment d'inertie équivalente rapportée sur l'arbre de sortie du moteur en Kg m^2 ;

1. **Traduire les équations dans le domaine de Laplace sachant que les conditions initiales sont supposées nulles ;**

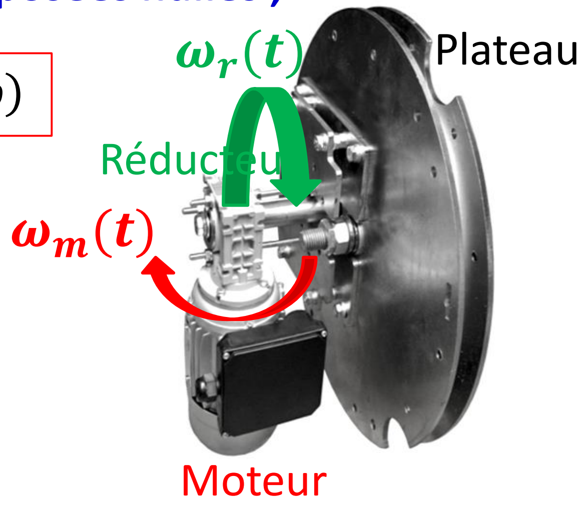
$$\boxed{E(p) = U(p) - RI(p)} \quad \boxed{E(p) = k_e\Omega(p)} \quad \boxed{C_m(p) = k_t I(p)} \quad \boxed{C_m(p) = J_{eq} p\Omega(p)}$$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

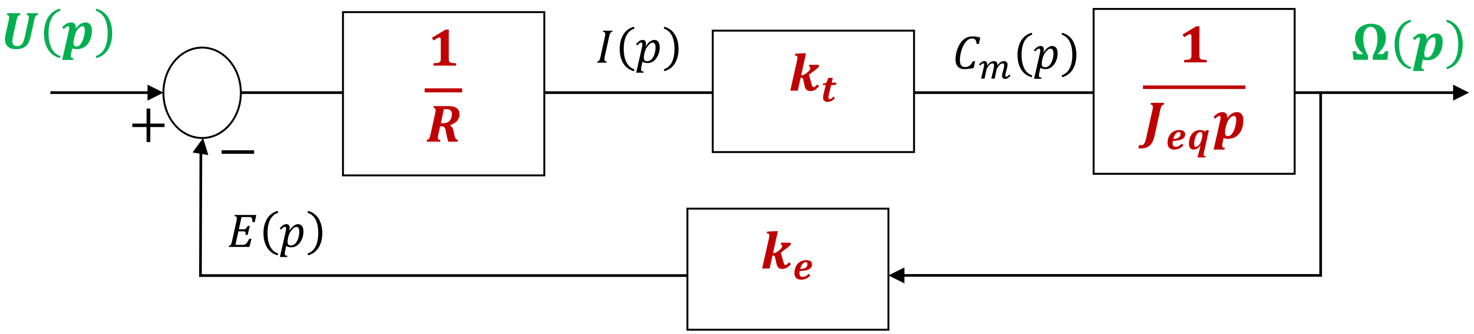
Système de 1er ordre: Application

1. Traduire les équations dans le domaine de Laplace sachant que les conditions initiales sont supposées nulles ;

$\boxed{E(p) = U(p) - RI(p)}$ $\boxed{E(p) = k_e\Omega(p)}$ $\boxed{C_m(p) = k_t I(p)}$ $\boxed{C_m(p) = J_{eq}p\Omega(p)}$



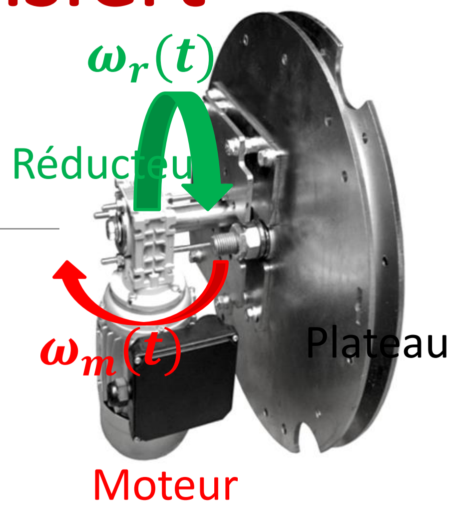
2. Compléter le schéma blocs suivant:



3. Déterminer la fonction de transfert du moteur $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{k_t}{k_t k_e + RJ_{eq}p} = \frac{\frac{1}{k_e}}{1 + \frac{RJ_{eq}}{k_t k_e}p}$$

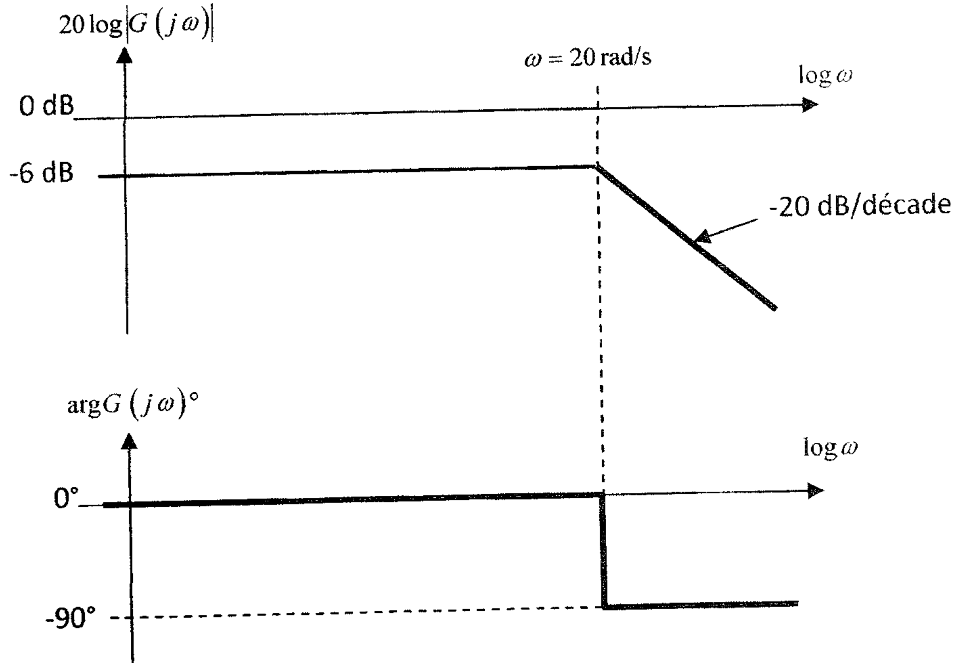
Identification expérimentale de la fonction de transfert



Système de 1er ordre: Application

Lors du fonctionnement de ce moteur en charge, on a relevé les diagrammes de Bode. A partir de ces courbes, on donne ci-après les diagrammes asymptotiques correspondants.

4. Identifier la fonction de transfert numériquement ;



Système de premier ordre car:

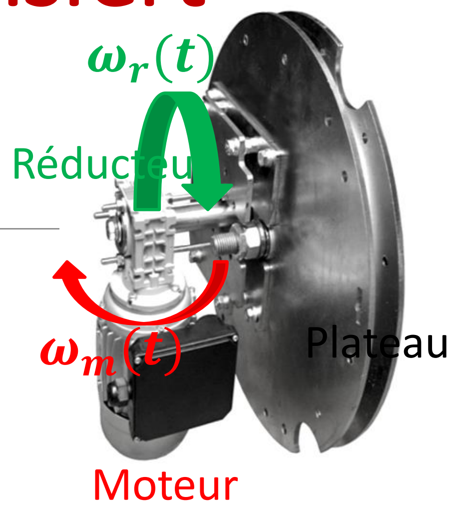
1. Gain de pente -20db/décade
2. Phase entre 0 et -90°

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

$20\log K = -6$ ➡ $K = 10^{-0,3} = 0,5$

$\omega_c = \frac{1}{\tau} = 20rad/s$ ➡ $\tau = 0,05s$

Identification expérimentale de la fonction de transfert



Système de 1er ordre: Application

Lors du fonctionnement de ce moteur en charge, on a relevé les diagrammes de Bode. A partir de ces courbes, on donne ci-après les diagrammes asymptotiques correspondants.

4. Identifier la fonction de transfert numériquement ;

Système de premier ordre car:

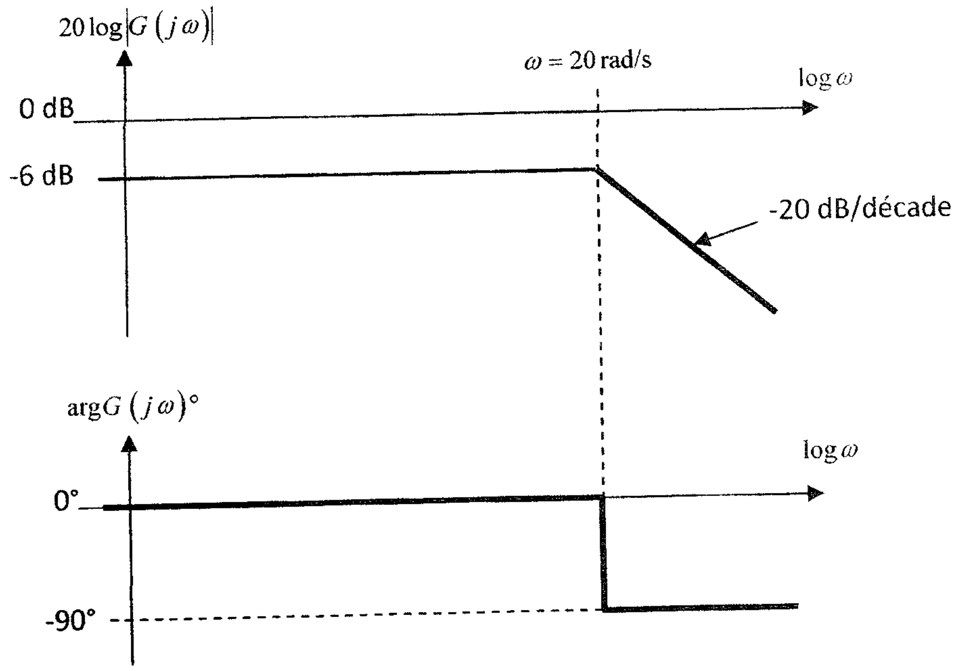
1. Gain de pente -20db/décade
2. Phase entre 0 et -90°

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{1+\tau p}$$

$20 \log K = -6 \Rightarrow K = 10^{-0,3} = 0,5$

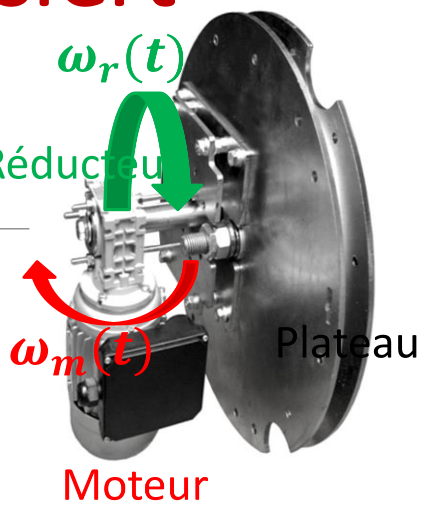
$\omega_c = \frac{1}{\tau} = 20 rad/s \Rightarrow \tau = 0,05s$

$$\boxed{H(p) = \frac{0,5}{1+0,05p}}$$



Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de 1er ordre: Application



5. Déterminer k_e et J_{eq} sachant que $R = 3,4\Omega$ et $k_t = 0,85 \mathrm{mNA}^{-1}$

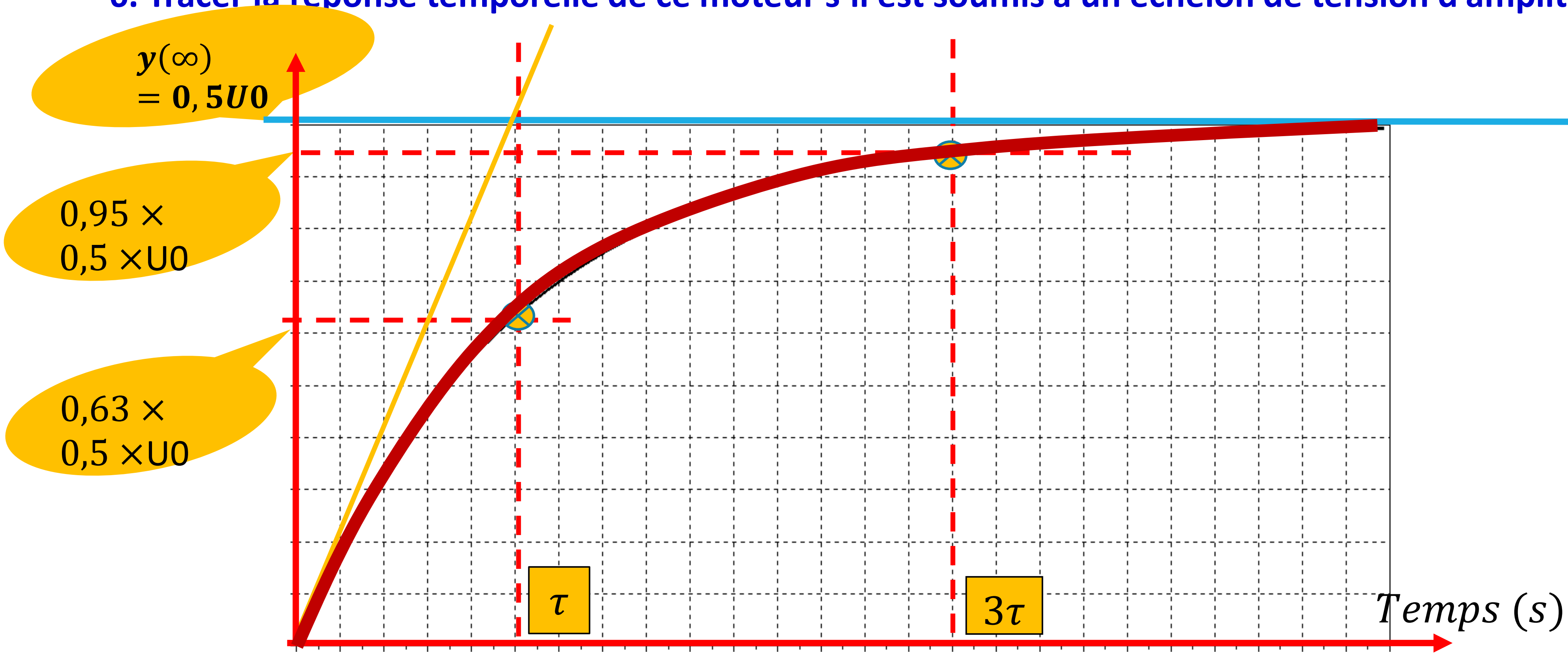
$$H(p) = \frac{\frac{1}{k_e}}{1 + \frac{RJ_{eq}}{k_t k_e} p} = \frac{0,5}{1 + 0,05p}$$

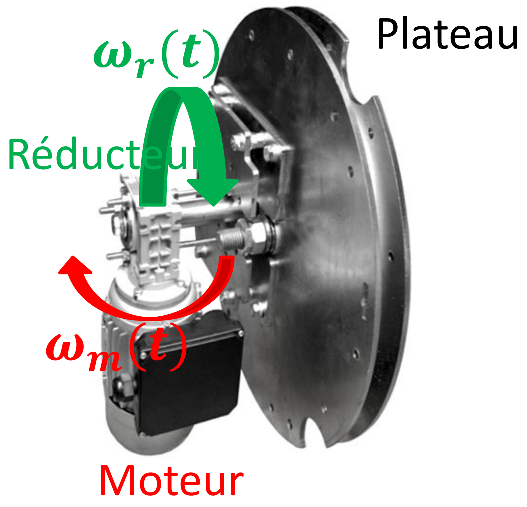
$$\begin{cases} k_e = 2\mathrm{V/rad}\ s^{-1} \\ J_{eq} = \dfrac{0,05 k_t k_e}{R} = \dfrac{0,05 \times 0,85 \times 2}{3,4} = 0,025 Kgm^2 \end{cases}$$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de 1er ordre: Application

6. Tracer la réponse temporelle de ce moteur s'il est soumis à un échelon de tension d'amplitude U_0.





Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Fonction de transfert

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow y(t)$$

Un système est dit du second ordre si la relation entre son entrée et sa sortie est une équation différentielle du second ordre.

$$\ddot{y}(t) + 2m\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = k\omega_0^2 x(t)$$

Avec :

k **: gain statique (rapport des unités sortie/entrée)**

m **: coefficient d'amortissement (sans unité)**

ω_0 **: Pulsation propre non amortie en rad/s**

La fonction de transfert d'un système de second ordre est de la forme :

$$H(p) = \frac{k}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Fonction de transfert

La fonction de transfert d'un système de second ordre est de la forme :

$$H(p) = \frac{k}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$H(p) = \frac{5}{1 + p + p^2} \quad \begin{cases} k = 5 \\ \frac{2m}{\omega_0} = 1 \Rightarrow m = 0,5 \\ \frac{1}{\omega_0^2} = 1 \Rightarrow \omega_0 = 1 rad/s \end{cases}$$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Réponse indicielle

$x(t) = au(t) \rightarrow X(p) = \frac{a}{p}$

$Y(p) = H(p)X(p) = \frac{ka}{p\left(1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$

Trois cas sont à considérés en fonction du signe du discriminant réduit ($\Delta' = \frac{1}{\omega_0^2}(m^2-1)$) de $\left(1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)$.

- $\Delta' > 0 \rightarrow m > 1 \rightarrow$ **C'est le régime apériodique sans dépassement** (la réponse indicielle est une courbe en S) **;**
- $\Delta' = 0 \rightarrow m = 1 \rightarrow$ **C'est le régime critique sans dépassement** (la réponse indicielle est une courbe en S) ;
- $\Delta' < 0 \rightarrow m < 1 \rightarrow$ **C'est le régime pseudopériodique avec dépassement** (courbe avec oscillations) **;**

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Réponse indicielle

Est-ce que la réponse indicielle présente de dépassements (ou d'oscillations)

$$H(p) = \frac{5}{1+p+p^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 5 \\ \dfrac{2m}{\omega_0} = 1 \Rightarrow m = 0,5 \\ \dfrac{1}{\omega_0^2} = 1 \Rightarrow \omega_0 = 1rad/s \end{array} \right.$$

Oui la réponse indicielle présente de dépassements car m=0,5<1 → C'est le régime pseudopériodique avec dépassements ;

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Régime apériodique sans dépassement : $m > 1$

$$H(p) = \frac{k}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Soient p_1 et p_2, les racines de $\left(1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)$.

$$\begin{cases} p_1 = \omega_0\left(-m - \sqrt{m^2 - 1}\right) \\ p_2 = \omega_0\left(-m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \end{cases}, \text{ d'où : } 1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)(p - p_2)$$

La fonction de transfert $H(p)$ peut être représentée par :

$$H(p) = \frac{k}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{k}{\frac{1}{\omega_0^2}(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{k}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)} \text{ avec : } \begin{cases} \tau_1 = -\frac{1}{p_1} \\ \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \\ \tau_1\tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \end{cases}$$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Régime apériodique sans dépassement : $m > 1$

$$Y(p) = H(p)X(p) = \frac{ka}{p\left(1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)} = \frac{ka}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

$$Y(p) = ka\left(\frac{1}{p} + \frac{\tau_1^2}{(\tau_2-\tau_1)(1+\tau_1 p)} + \frac{\tau_2^2}{(\tau_1-\tau_2)(1+\tau_2 p)}\right)$$

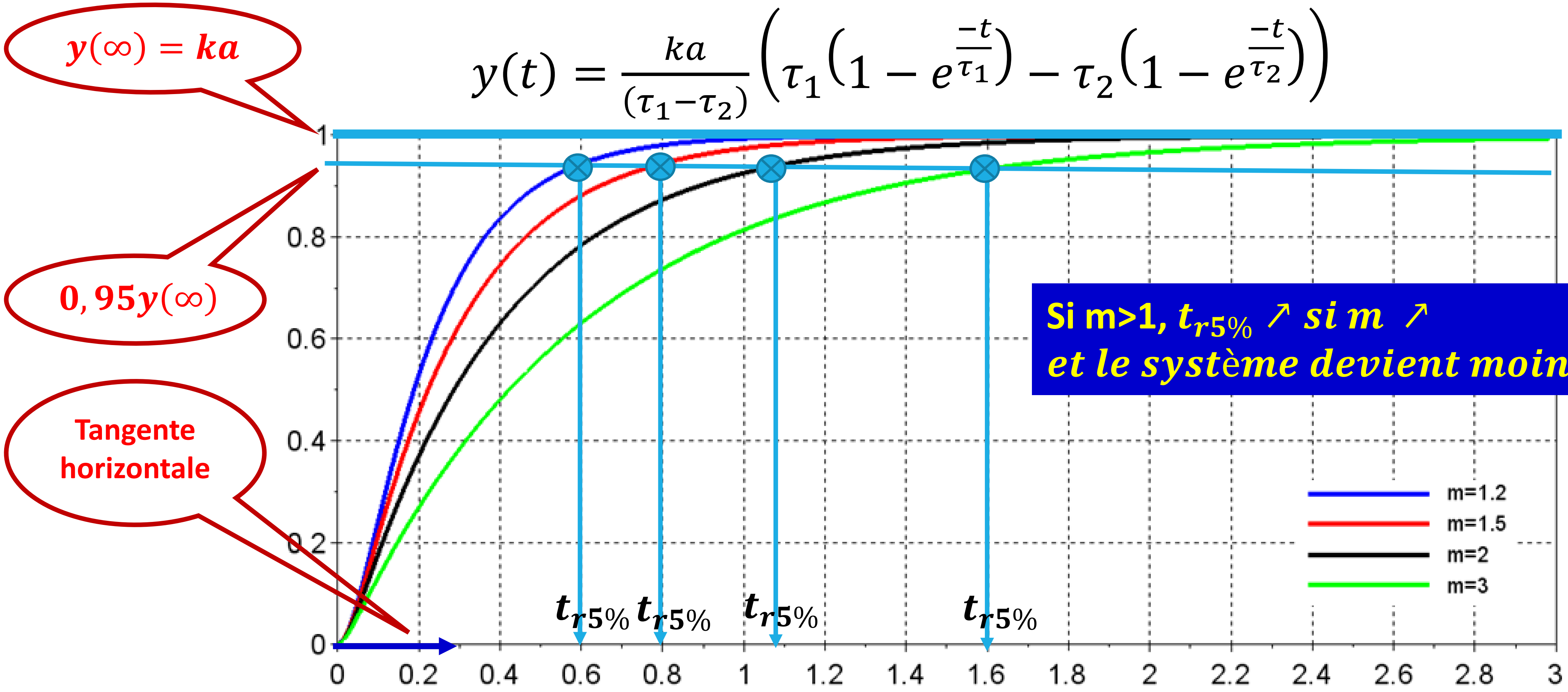
Soit finalement :

$$\boldsymbol{y(t) = \frac{ka}{(\tau_1-\tau_2)}\left(\tau_1\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_1}}\right) - \tau_2\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_2}}\right)\right)}$$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: **Régime apériodique sans dépassement : $m > 1$**

$$y(t) = \frac{ka}{(\tau_1 - \tau_2)}\left(\tau_1\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_1}}\right) - \tau_2\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_2}}\right)\right)$$



Si m>1, $t_{r5\%} \nearrow$ *si m* $\nearrow$
et le système devient moins rapide

Identification expérimentale

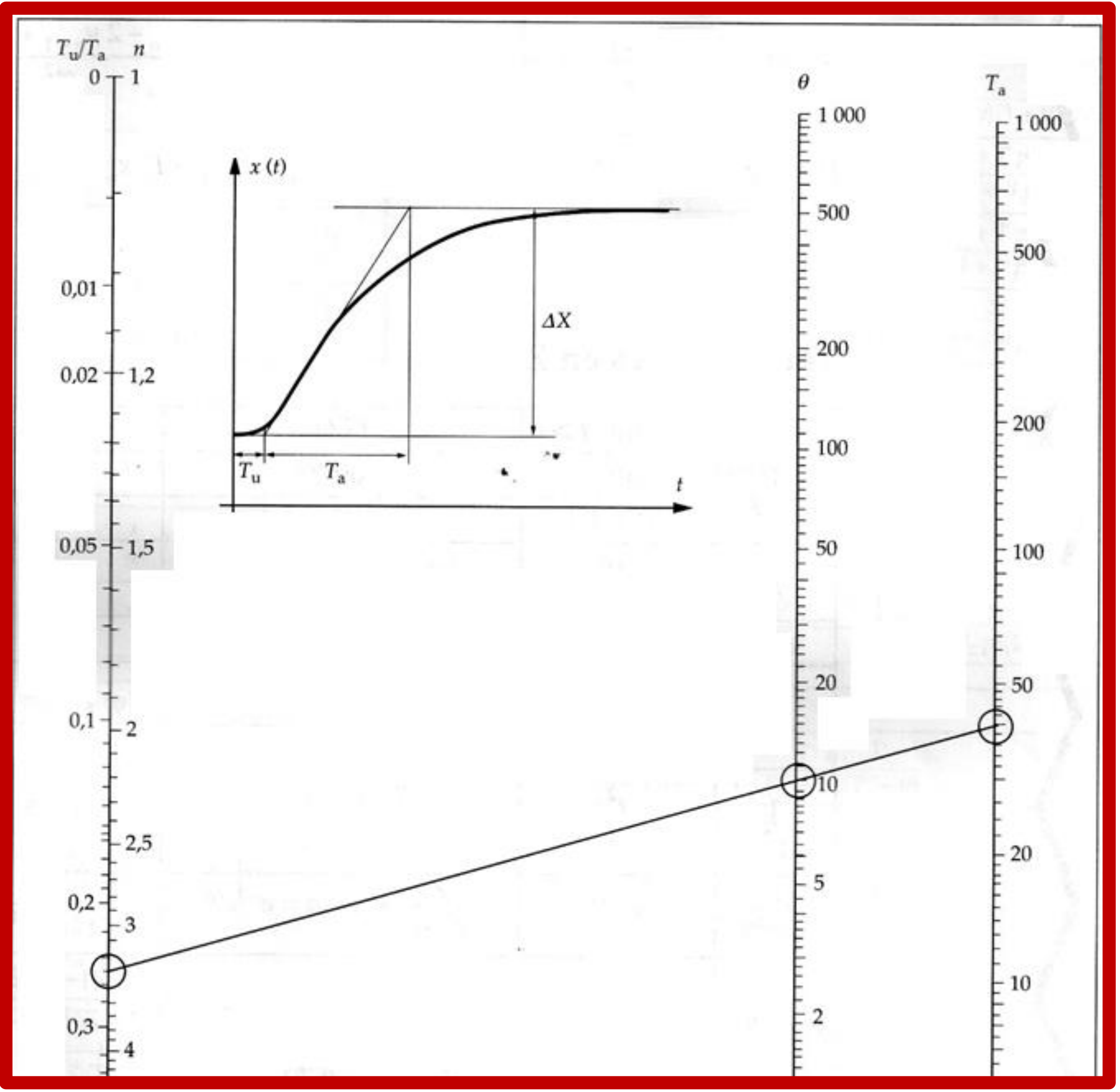
Système de deuxième ord

Méthode de Strejc

$$H(p) = \frac{K_s}{(1+\theta p)^n}$$

$$K_s = \frac{\Delta X}{A}$$

Avec A est l'amplitude de l'échelon



Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: **Régime critique sans dépassement : $\boldsymbol{m = 1}$**

Le polynôme $\left(1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)$ possède une racine double : $p_0 = -\omega_0$.

Soit $\tau_0 = \frac{-1}{p_0} = \frac{1}{\omega_0}$,

d'où : $\boldsymbol{H(p) = \frac{k}{(1+\tau_0 p)^2}}$

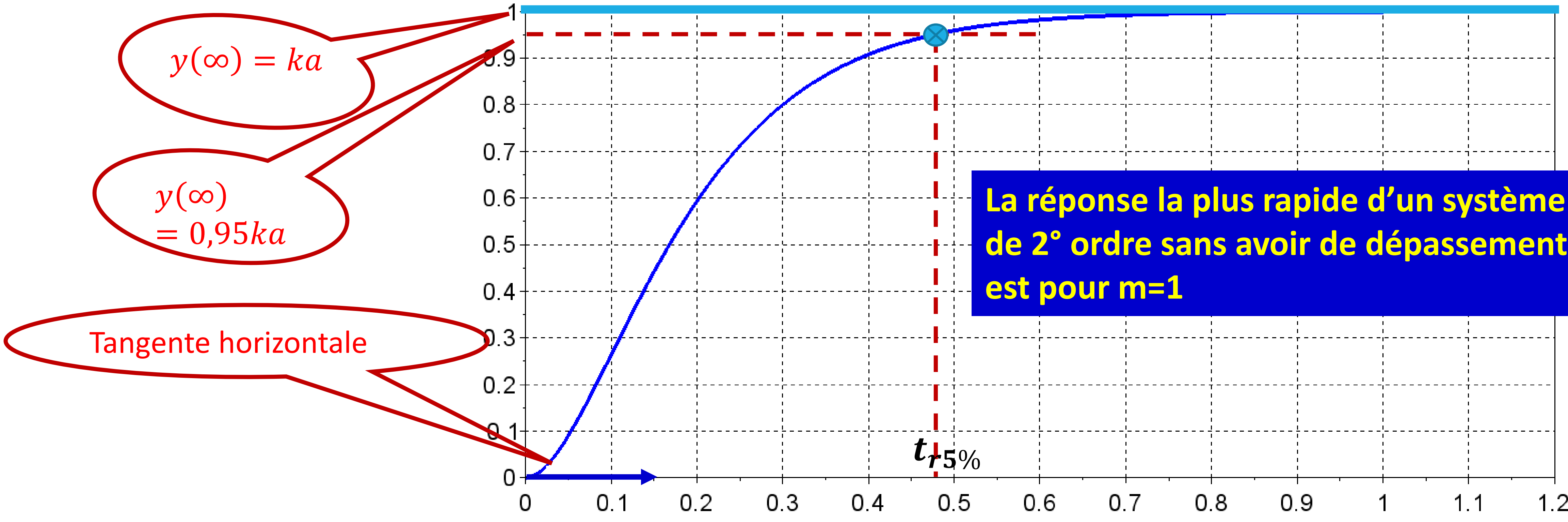
$$Y(p) = \frac{ka}{p(1+\tau_0 p)^2} = ka\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau_0}{(1+\tau_0 p)^2} - \frac{\tau_0}{1+\tau_0 p}\right)$$

D'où : $\boldsymbol{y(t) = ka\left(1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{\frac{-t}{\tau_0}}\right)}$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: **Régime critique sans dépassement : $m = 1$**

La figure suivante représente la réponse indicielle pour m=1.



La réponse la plus rapide d'un système de 2° ordre sans avoir de dépassement est pour m=1

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Régime pseudopériodique avec dépassement : $m < 1$

Le polynôme $\left(1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)$ possède deux racines complexes conjuguées $p_1 et p_2$ tel que :

$$\begin{cases} p_1 = \omega_0\left(-m - j\sqrt{1-m^2}\right) \\ p_2 = \omega_0\left(-m + j\sqrt{1-m^2}\right) \end{cases}$$

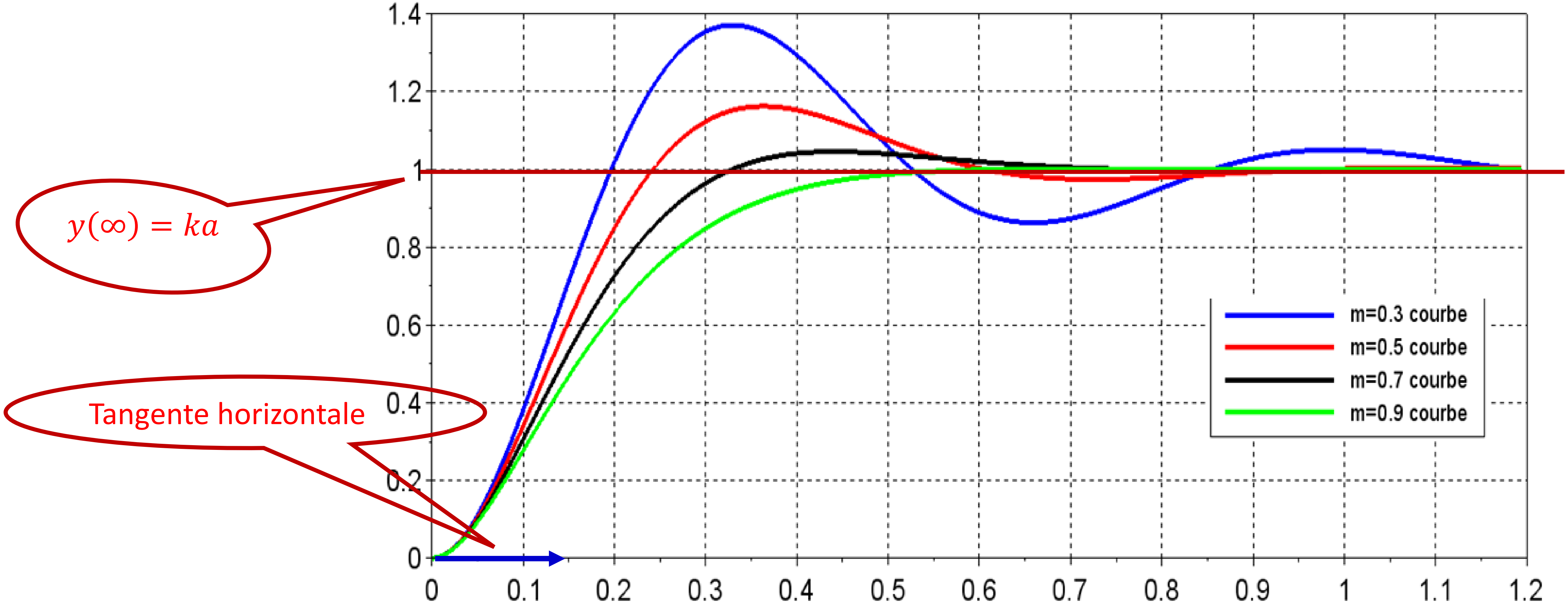
La réponse du système est donnée par l'équation suivante : $y(t) = ka\left(1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\sin(\omega t+\varphi)\right)$

Avec :

$$\begin{cases} \omega = \omega_0\sqrt{1-m^2} \\ \varphi = \operatorname{atan}\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m} \end{cases}$$

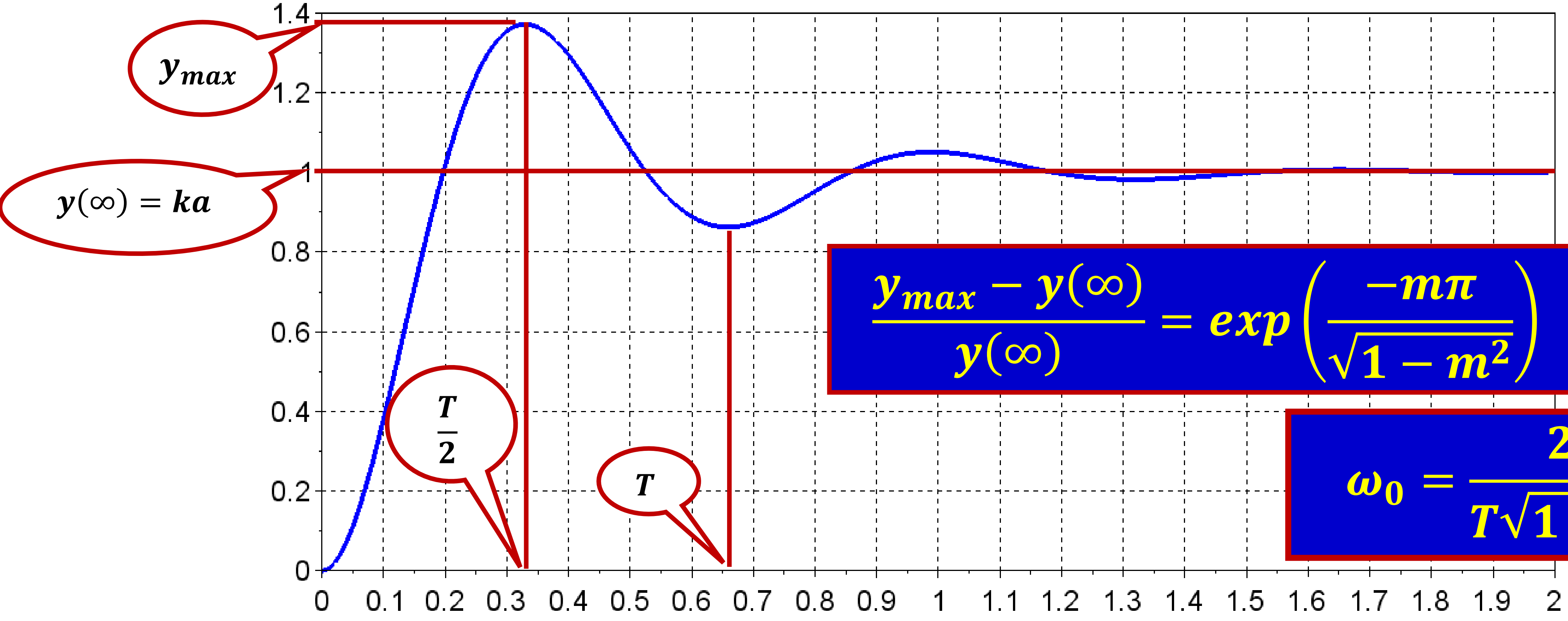
Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: **Régime pseudopériodique avec dépassement : $m < 1$**



Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Régime pseudopériodique avec dépassement : $m < 1$



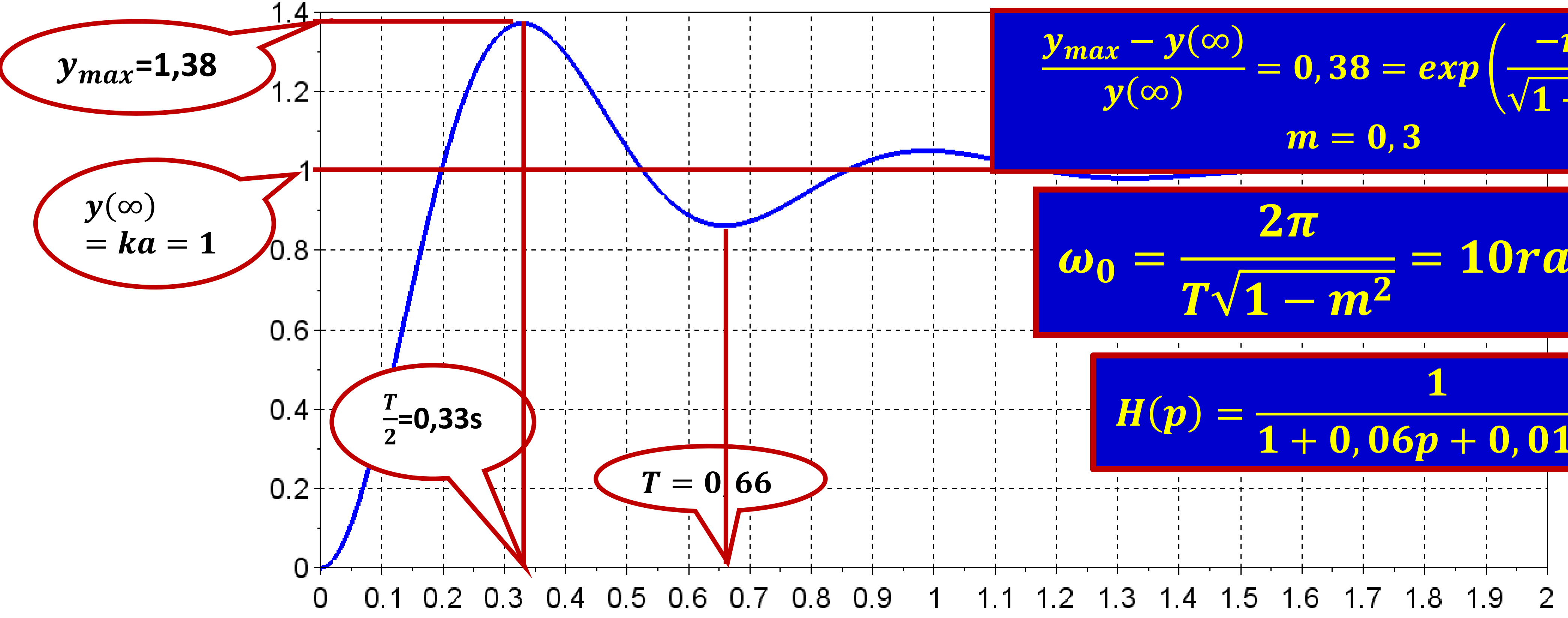
$$\frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} = exp\left(\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-m^2}}$$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Régime pseudopériodique avec dépassement : $m < 1$

Déterminer la fonction de transfert si la réponse indicielle unitaire est la suivante:



$$\frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} = 0,38 = exp\left(\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}\right)$$

$$m = 0,3$$

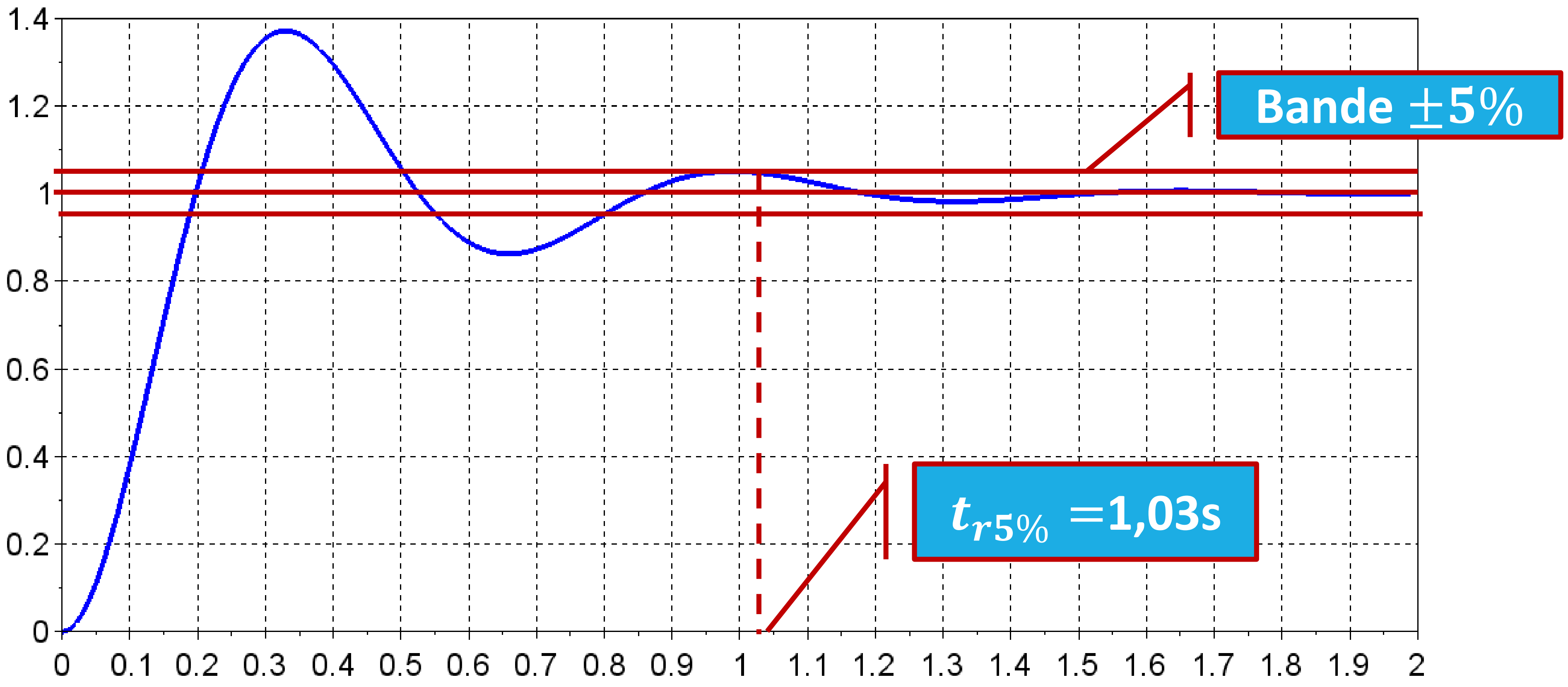
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-m^2}} = 10rad/s$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + 0,06p + 0,01p^2}$$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

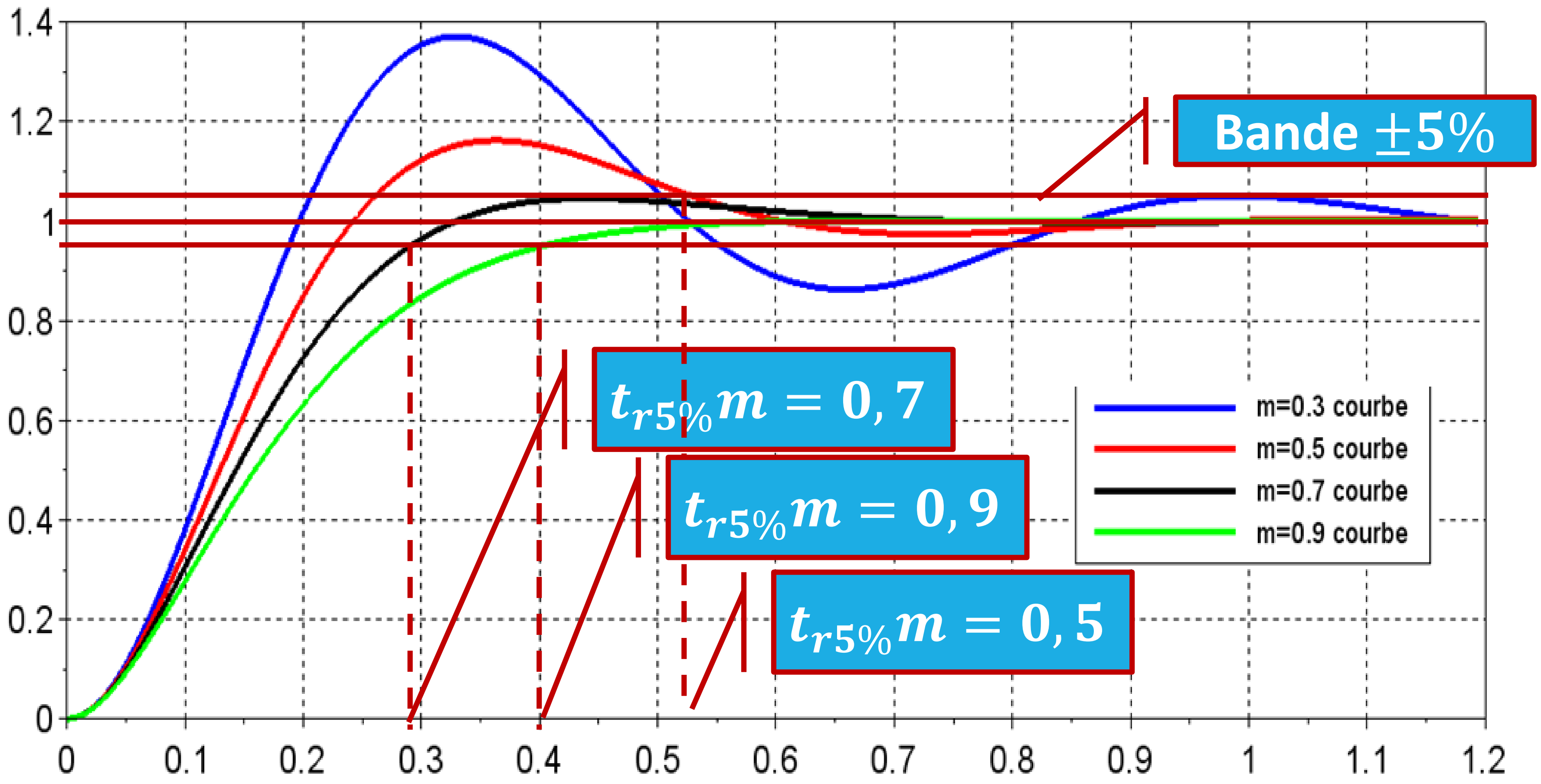
Système de deuxième ordre: **Régime pseudopériodique avec dépassement : $m < 1$**

Déterminer le temps de réponse à 5%:



Identification expérimentale de la fonction de transfert

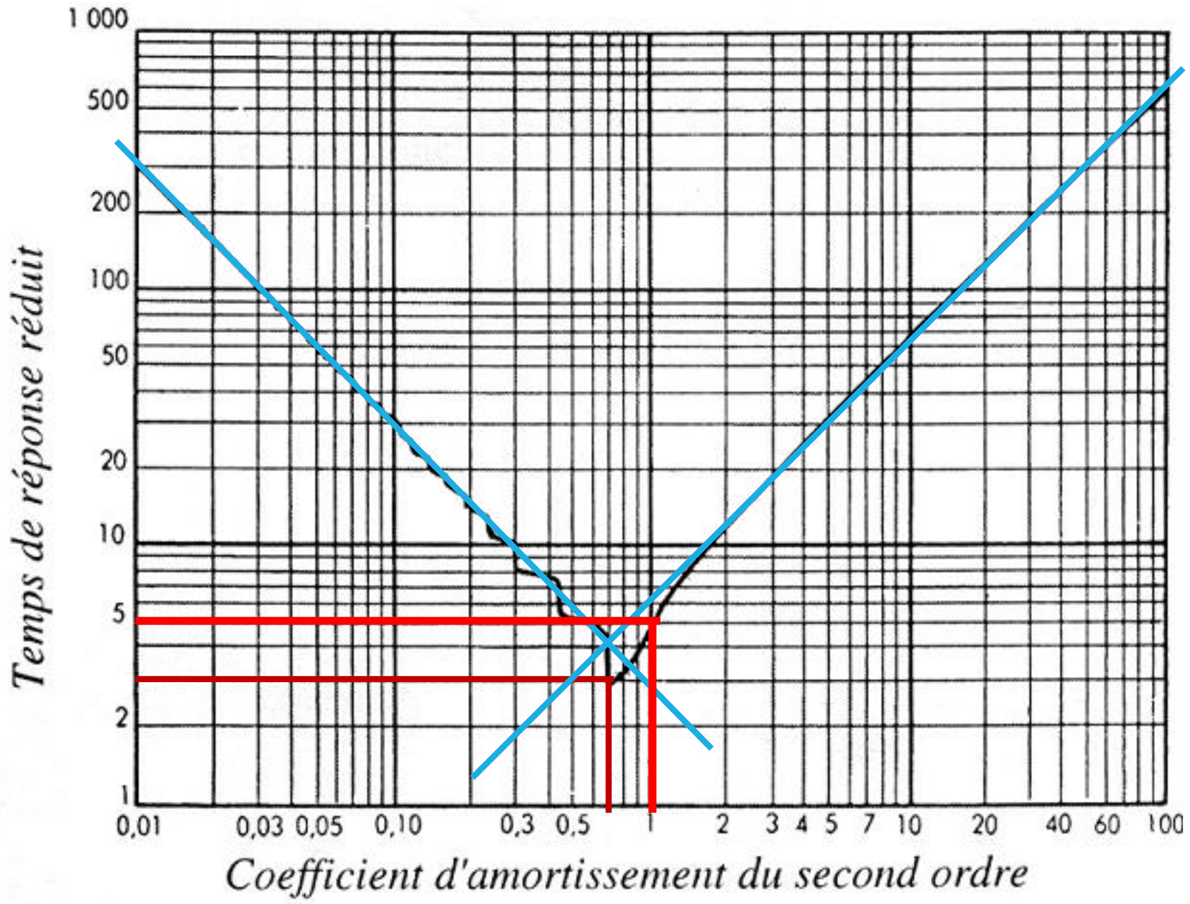
Système de deuxième ordre: **Régime pseudopériodique avec dépassement : $m < 1$**



Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Abaque du temps de réponse

$\omega_0 t_{r5\%}$



La réponse la plus rapide est pour m=0,7

$$t_{r5\%} = \frac{3}{\omega_0}$$

Si m<0,7 $$t_{r5\%} = \frac{m}{3\omega_0}$$

Si m>0,7 $$t_{r5\%} = \frac{6m}{\omega_0}$$

La réponse la plus rapide sans dépassement est pour m=1

$$t_{r5\%} = \frac{5}{\omega_0}$$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Réponse fréquentielle m>1

La fonction de transfert d'un système de second ordre est donnée par :$H(p) = \frac{k}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}$

- **Si $m > 1$, $H(p) = \frac{k}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$**

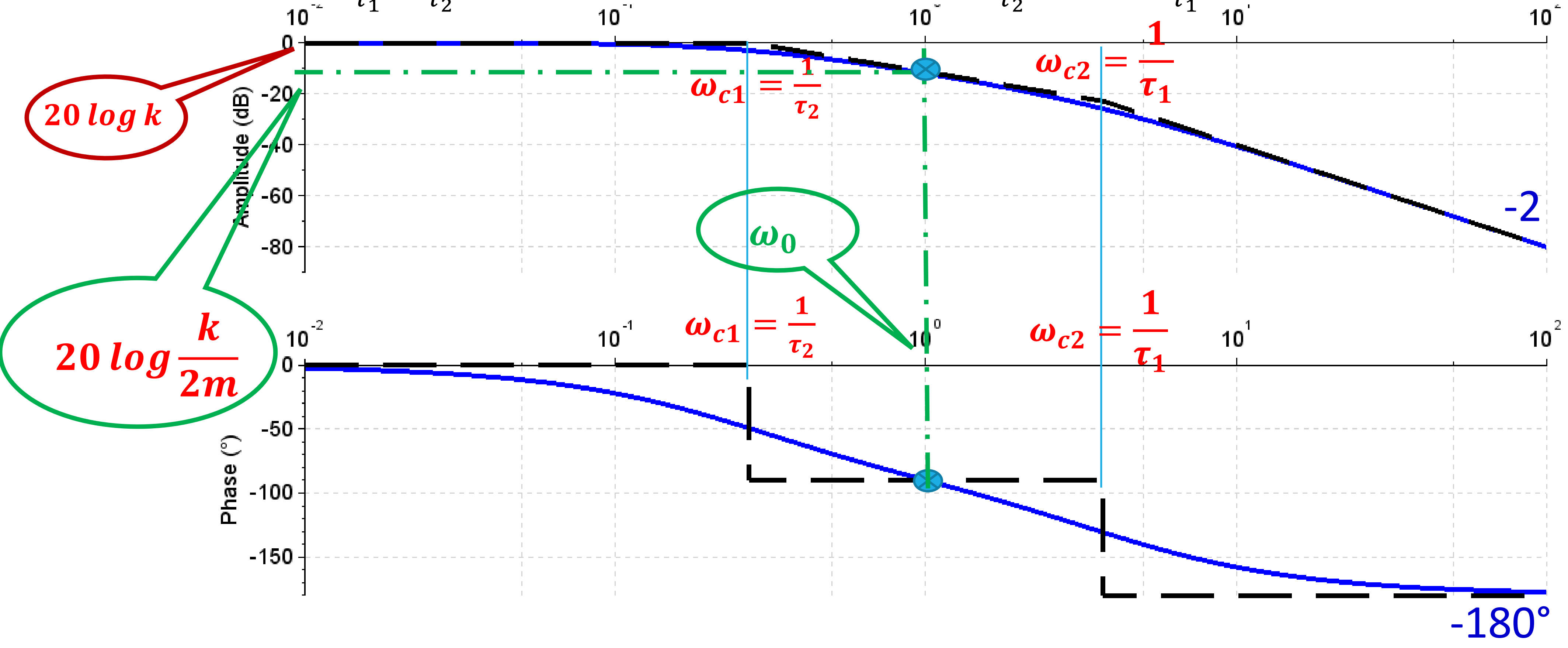
avec : $\begin{cases} \tau_1 = -\frac{1}{p_1} \\ \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \\ \tau_1\tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \end{cases}$

et $\begin{cases} p_1 = \omega_0\left(-m - \sqrt{m^2-1}\right) \\ p_2 = \omega_0\left(-m + \sqrt{m^2-1}\right) \end{cases}$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Réponse fréquentielle m>1

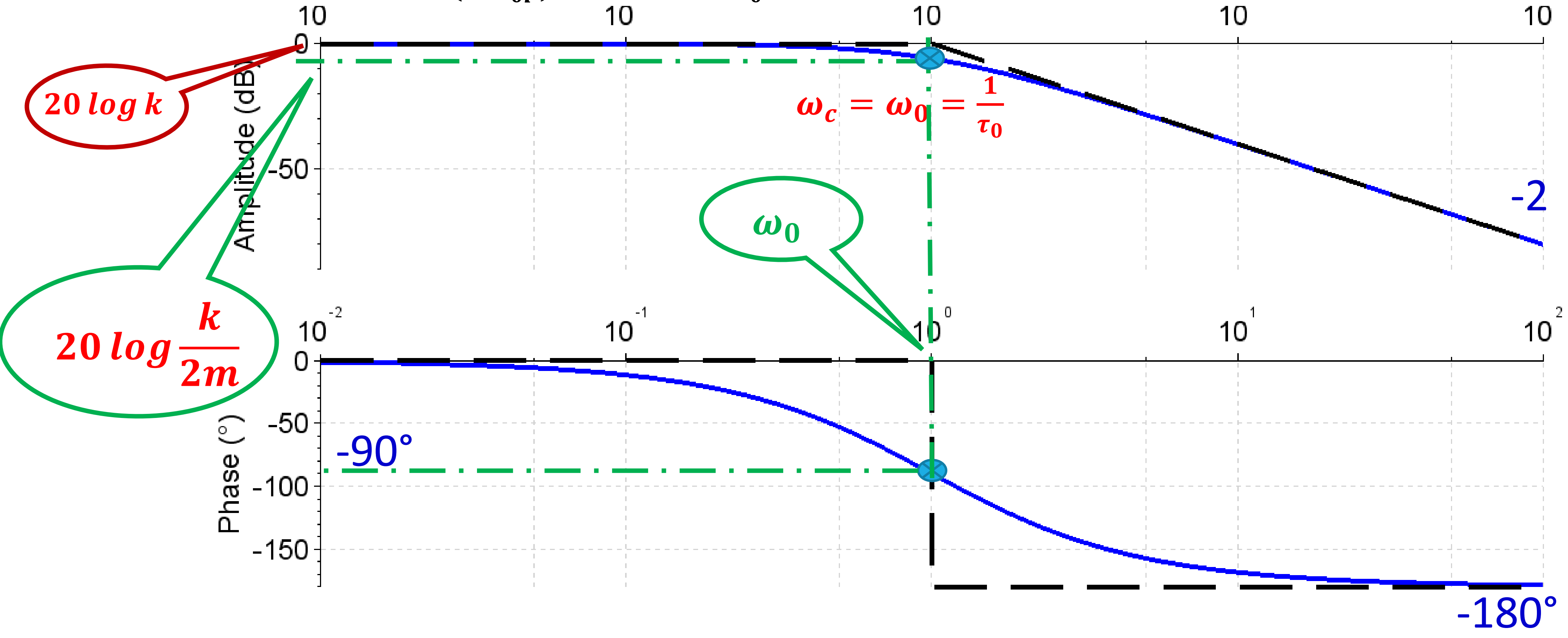
- Si $\tau_1 < \tau_2 \rightarrow \frac{1}{\tau_1} > \frac{1}{\tau_2}$. Deux pulsations de coupure : $\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_2}$ et $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_1}$



Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Réponse fréquentielle m>1

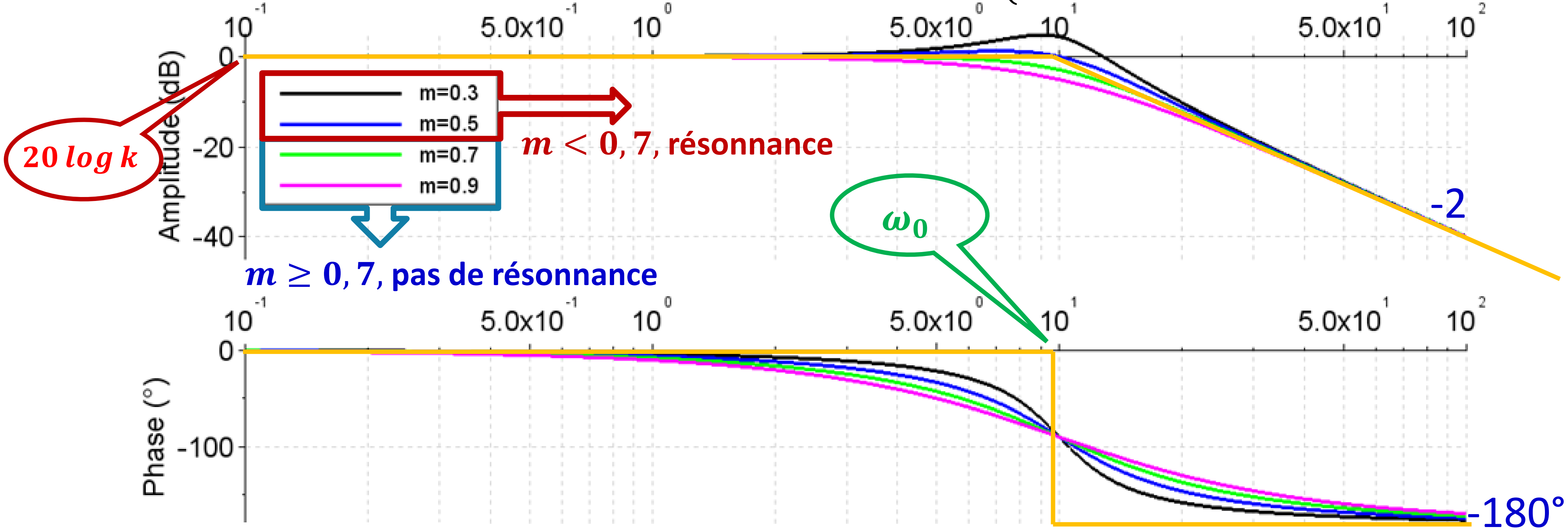
- Si $m = 1$, $H(p) = \frac{k}{(1+\tau_0 p)^2}$ avec $\tau_0 = \frac{1}{\omega_0}$



Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Réponse fréquentielle m<1

- **Si $m < 1$, $H(p)$ possède deux pôles complexes conjugués :** $\begin{cases} p_1 = \omega_0\left(-m - j\sqrt{1-m^2}\right) \\ p_2 = \omega_0\left(-m + j\sqrt{1-m^2}\right) \end{cases}$



Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Réponse fréquentielle m<1

$H(j\omega) = \frac{k}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+\frac{2jm\omega}{\omega_0}}$, Posons $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite ➔ $H(ju) = \frac{k}{1-u^2+2jmu} = \frac{k(1-u^2-2jmu)}{(1-u^2)^2+4m^2u^2}$

Pour la pulsation de résonance, le gain passe par un maximum c-à-d $|H(ju)|$ passe par un maximum ou encore $|H(ju)|^2$ passe par un maximum.

$|H(ju)|^2 = \frac{k^2(1-u^2)+4k^2m^2u^2}{\left((1-u^2)^2+4m^2u^2\right)^2}$ ➔ $\frac{d|H(ju)|^2}{du} = 0$ ➔ $u = \sqrt{1-2m^2}$ ➔ $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$

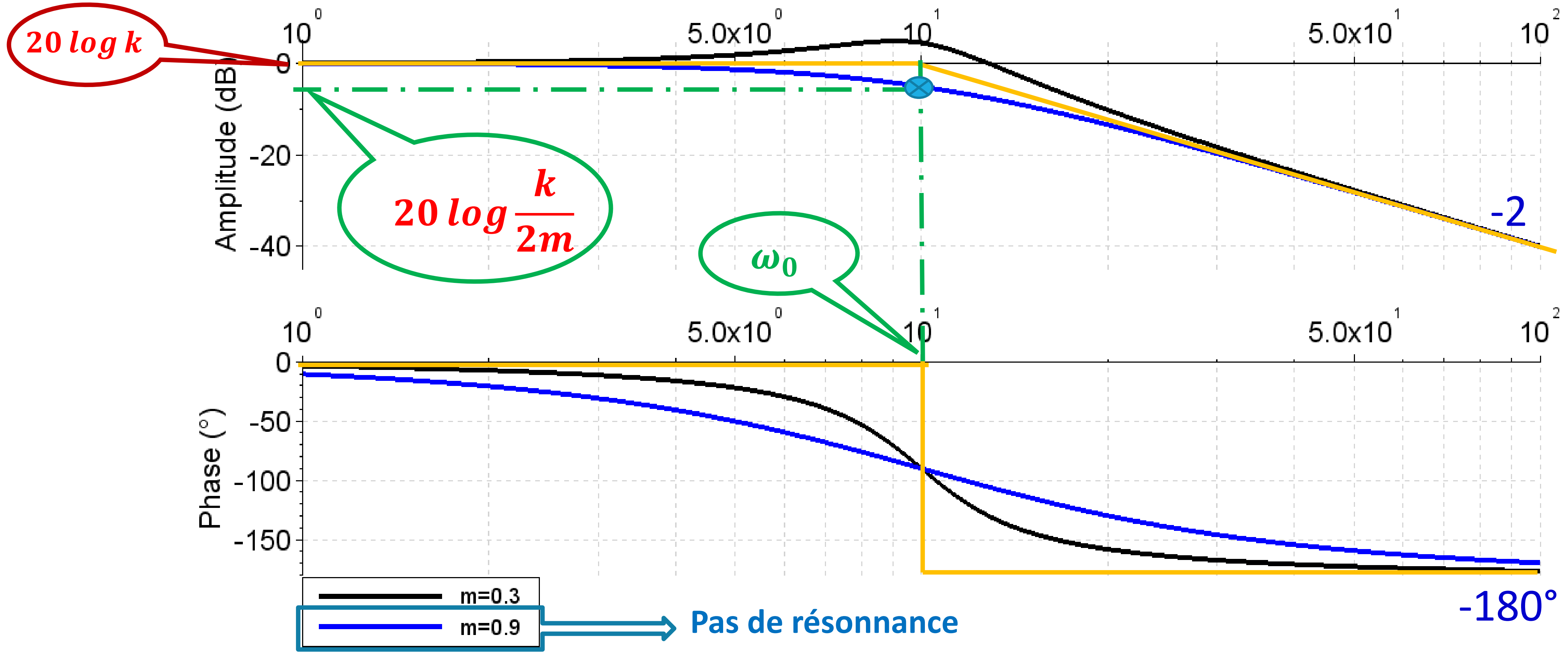
Il est à noter que la pulsation de résonance est définie pour $1-2m^2 > 0$ ➔ $m < \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$

Le facteur de surtension est défini par :

$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$ ➔ $Q_{db} = 20\,log|H(j\omega_r)| - 20\,log\,k$

Identification expérimentale de la fonction de transfert

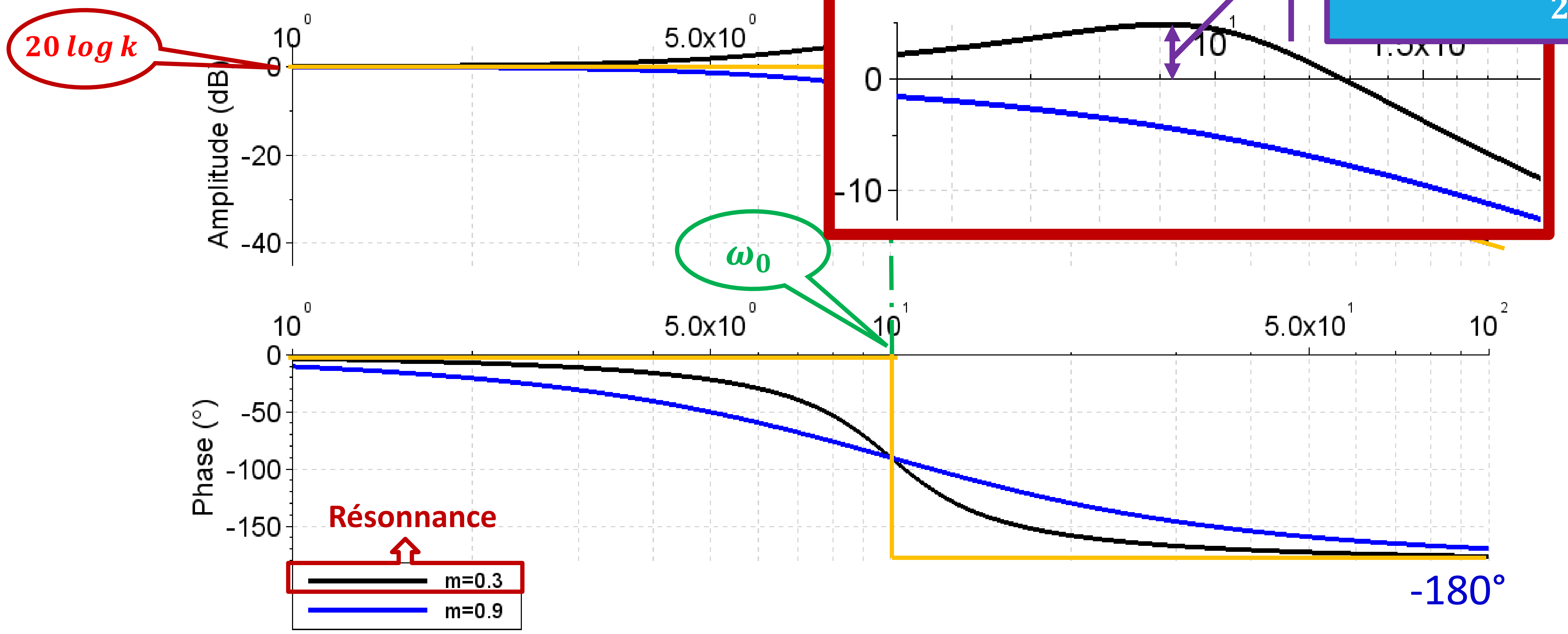
Système de deuxième ordre: Réponse fréquentielle m<1



Identification expérimentale de la fonction de transfert

Système de deuxième ordre: Réponse fréquentielle

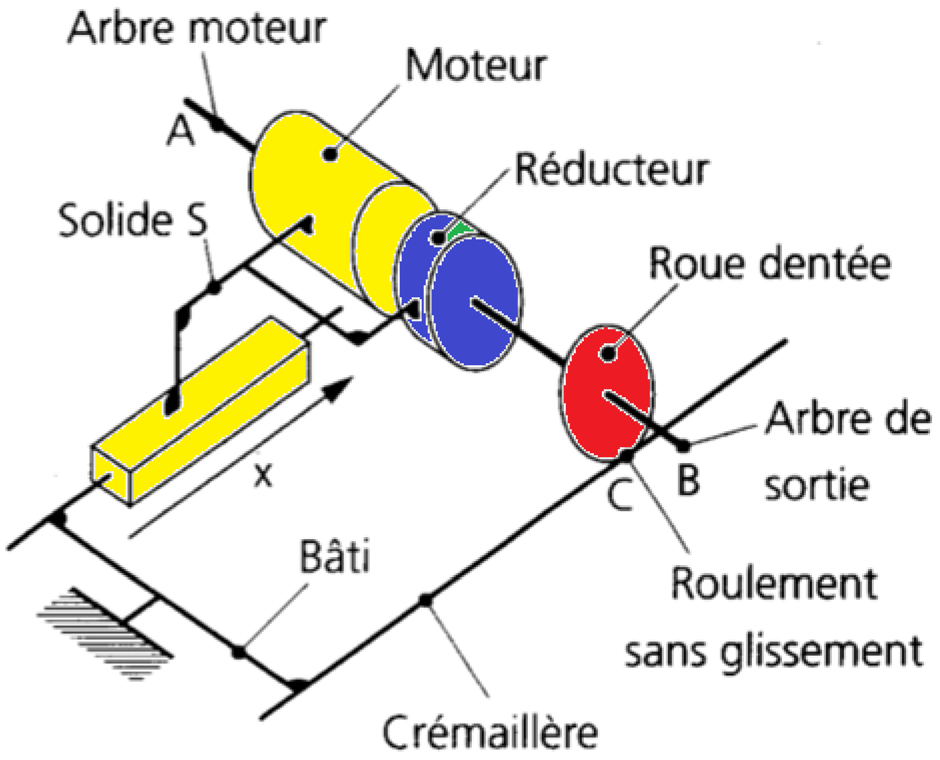
$$Q_{dB} = 20\log\frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$



Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

L'étude porte sur l'asservissement en position linéaire suivant l'axe $\vec{x}$, par rapport au bâti, d'un solide S. Le schéma cinématique suivant présente le mécanisme de mise en mouvement de S. Le solide S est lié au bâti par une liaison glissière d'axe $\vec{x}$. Le moteur est encastré dans le solide S. L'arbre moteur entraîne l'arbre de sortie à travers un réducteur de rapport de réduction K_r. L'arbre de sortie du réducteur est muni d'une roue dentée (de diamètre D), qui roule sans glisser sur une crémaillère encastrée dans le bâti.



Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

Les équations qui régissent le fonctionnement du moteur à courant continu à flux constant sont les suivantes :

$$e(t) = k_e \omega_m(t)$$

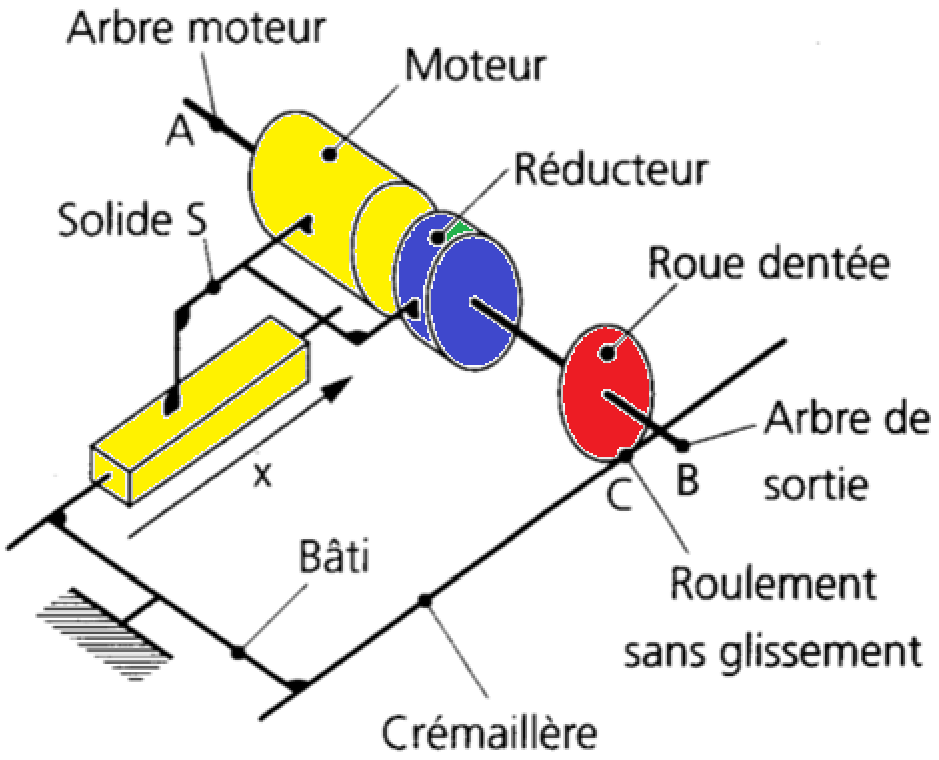
$$c_m(t) = k_t i(t)$$

$$c_m(t) - c_r(t) = k_d \omega_m(t) + J\frac{d\omega_m(t)}{dt}$$

$$u_m(t) - e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Avec :

$u_m(t)$: tension aux bornes de l'induit ;
$e(t)$: force électromotrice ;
$i(t)$: courant dans l'induit ;
$c_m(t)$: couple moteur ;
k_e : constante de force électromotrice ;
k_t : constante de couple électromagnétique ;
$c_r(t)$: couple résistant appliqué sur le moteur ;
k_d : constante du couple de frottement visqueux ;
J : moment d'inertie moteur ;
R : résistance de l'induit ;
$\omega_m(t)$: vitesse de rotation moteur ;
L : inductance de l'induit ;



Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

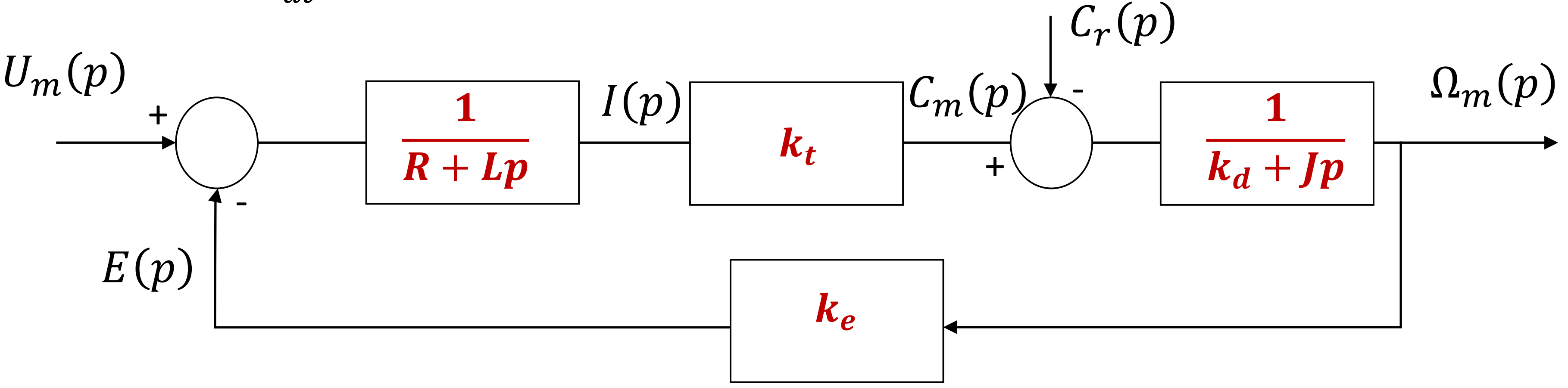
1. Traduire les équations dans le domaine de Laplace sachant que les conditions initiales sont supposées nulles et compléter le schéma blocs suivant :

$e(t) = k_e \omega_m(t)$ $\quad \boldsymbol{E(p) = k_e \Omega_m(p)}$

$c_m(t) = k_t i(t)$ $\quad \boldsymbol{C_m(p) = k_t I(p)}$

$c_m(t) - c_r(t) = k_d \omega_m(t) + J \frac{d\omega_m(t)}{dt}$ $\quad \boldsymbol{C_m(p) - C_r(p) = (k_d + Jp)\Omega_m(p)}$

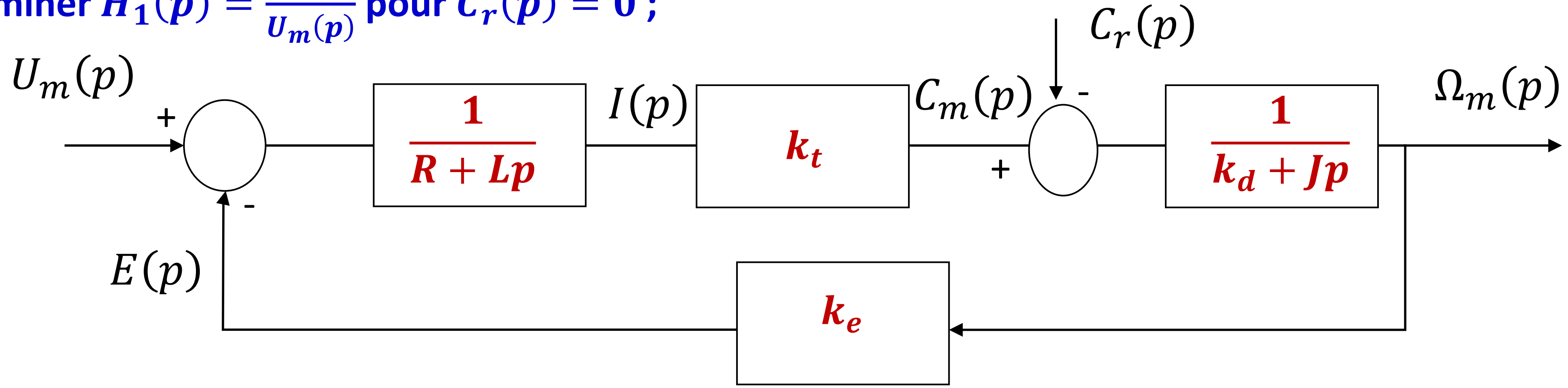
$u_m(t) - e(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$ $\quad \boldsymbol{U_m(p) - E(p) = (R + Lp)I(p)}$



Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

2. Déterminer $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ **pour** $C_r(p) = 0$ **;**

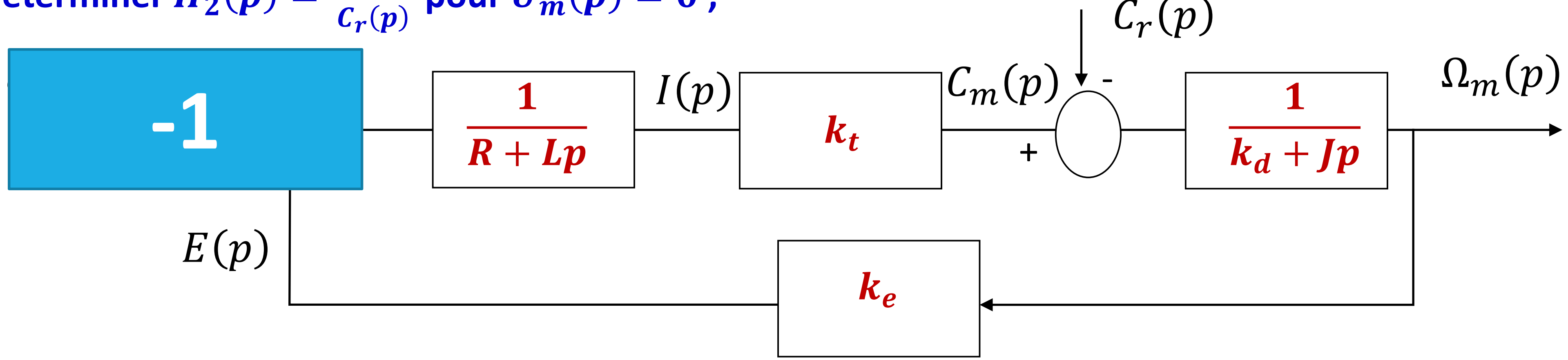


$$H_1(p) = \left.\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}\right|_{C_r(p)=0} = \frac{k_t}{k_t k_e + (R+Lp)(k_d+Jp)}$$

Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

2. Déterminer $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$ **pour** $U_m(p) = 0$ **;**



$$H_2(p) = \left.\frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}\right|_{U_m(p)=0} = \frac{-(R+Lp)}{k_t k_e + (R+Lp)(k_d+Jp)}$$

Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

3. Exprimer la sortie $\Omega_m(p)$ en fonction des deux entrées $U_m(p)$ et $C_r(p)$

$$\Omega_m(p) = H_1(p)U_m(p) + H_2(p)C_r(p)$$

$$\begin{cases} H_1(p) = \dfrac{k_t}{k_t k_e + (R + Lp)(k_d + Jp)} \\ H_2(p) = \dfrac{-(R + Lp)}{k_t k_e + (R + Lp)(k_d + Jp)} \end{cases}$$

Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

Dans la suite, on suppose négligeable l'effet du couple résistant $(c_r(t) = 0)$ et l'inductance de l'induit $(L = 0)$.

4. Déterminer de nouveau la fonction de transfert du moteur $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ et la mettre sous la forme canonique d'un système de premier ordre $H_1(p) = \frac{k_m}{1+\tau_m p}$. Exprimer k_m et τ_m en fonction des caractéristiques du moteur.

$$H_1(p) = \frac{k_t}{k_t k_e + R k_d + RJp} = \frac{\frac{k_t}{k_t k_e + R k_d}}{1 + \frac{RJ}{k_t k_e + R k_d} p} = \frac{k_m}{1 + \tau_m p}$$

Avec:
$$\begin{cases} k_m = \dfrac{k_t}{k_t k_e + R k_d} \\ \tau_m = \dfrac{RJ}{k_t k_e + R k_d} \end{cases}$$

Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

Le moteur est alimenté par un modulateur. Le modulateur est commandé par une tension u(t) et sera modélisée par un gain pur $K_{mod} = 20$.

On donne :

$\omega_r(t)$: La vitesse angulaire de l'arbre de sortie du réducteur. $L\big(\omega_r(t)\big) = \Omega_r(p)$

$\theta_r(t)$: la position angulaire de l'arbre de sortie du réducteur. $L\big(\theta_r(t)\big) = \theta_r(p)$

$x(t)$: la position linéaire du solide S. $L(x(t)) = X(p)$

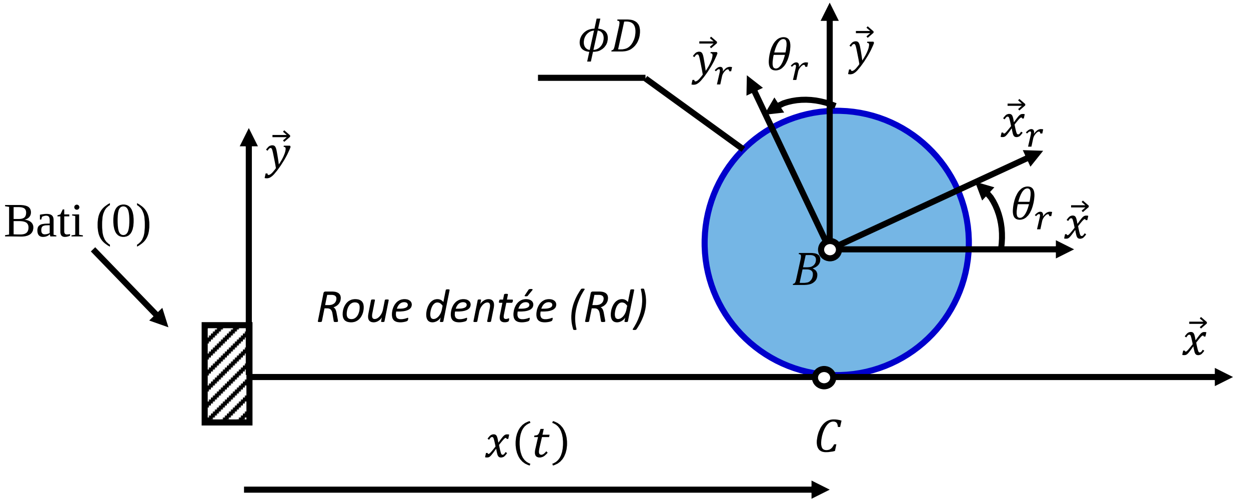
$\boldsymbol{\omega_r(t) = -K_r\omega_m(t)}$ et $\boldsymbol{\dot{x}(t) = v(t)}$

On pose: $K_r = 0.2$ $D = 200\,mm,$ $K_m = 0.3\frac{\frac{rad}{s}}{V},$ $\tau_m = 0.2\,s$

Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

6. Sachant qu'il y a une condition de roulement sans glissement au point C entre la roue dentée et la crémaillère. Exprimer cette condition et déduire une relation entre $x(t)$et $\theta_r(\mathrm{t})$.



$$\vec{V}\left(C \in \frac{Rd}{0}\right) = \vec{V}\left(B \in \frac{Rd}{0}\right) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{BC} = (\dot{x} + \frac{D}{2}\dot{\theta}_r)\vec{x}$$

Condition de roulement sans glissement:

$$\vec{V}\left(C \in \frac{Rd}{0}\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = v(t) = -\frac{D}{2}\dot{\theta}_r = -\frac{D}{2}\omega_r$$

Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

7. On donne le schéma bloc suivant, Exprimer ces fonctions de transfert ;

$$\xrightarrow{U(p)} \boxed{H_0(p)} \xrightarrow{U_m(p)} \boxed{H_1(p)} \xrightarrow{\Omega_m(p)} \boxed{H_2(p)} \xrightarrow{\Omega_r(p)} \boxed{H_3(p)} \xrightarrow{V(p)} \boxed{H_4(p)} \xrightarrow{X(p)}$$

$$\xrightarrow{U(p)} \boxed{H_0(p)} \xrightarrow{U_m(p)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_0(p) = K_{mod}}$$

Modulateur

$$\xrightarrow{U_m(p)} \boxed{H_1(p)} \xrightarrow{\Omega_m(p)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_1(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}}$$

Moteur

$$\boldsymbol{\omega_r(t) = -K_r \omega_m(t)}$$

$$\xrightarrow{\Omega_m(p)} \boxed{H_2(p)} \xrightarrow{\Omega_r(p)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_2(p) = -K_r}$$

Réducteur

$$\boldsymbol{v(t) = -\frac{D}{2}\omega_r}$$

$$\xrightarrow{\Omega_r(p)} \boxed{H_3(p)} \xrightarrow{V(p)} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{H_3(p) = -\frac{D}{2}}$$

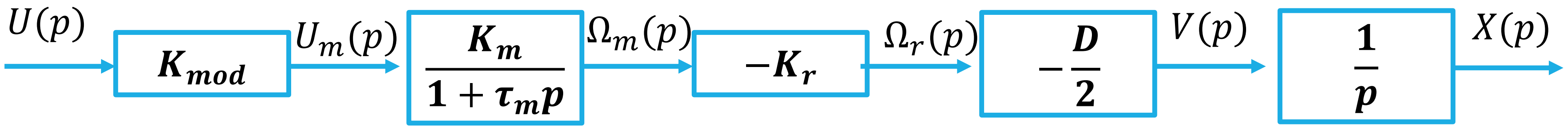
Roue/crémaillère

$$\xrightarrow{V(p)} \boxed{\boldsymbol{H_4(p) = \frac{1}{p}}} \xrightarrow{X(p)}$$

Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

8. Déduire la fonction de transfert en boucle ouverte $H(p) = \frac{X(p)}{U(p)}$;

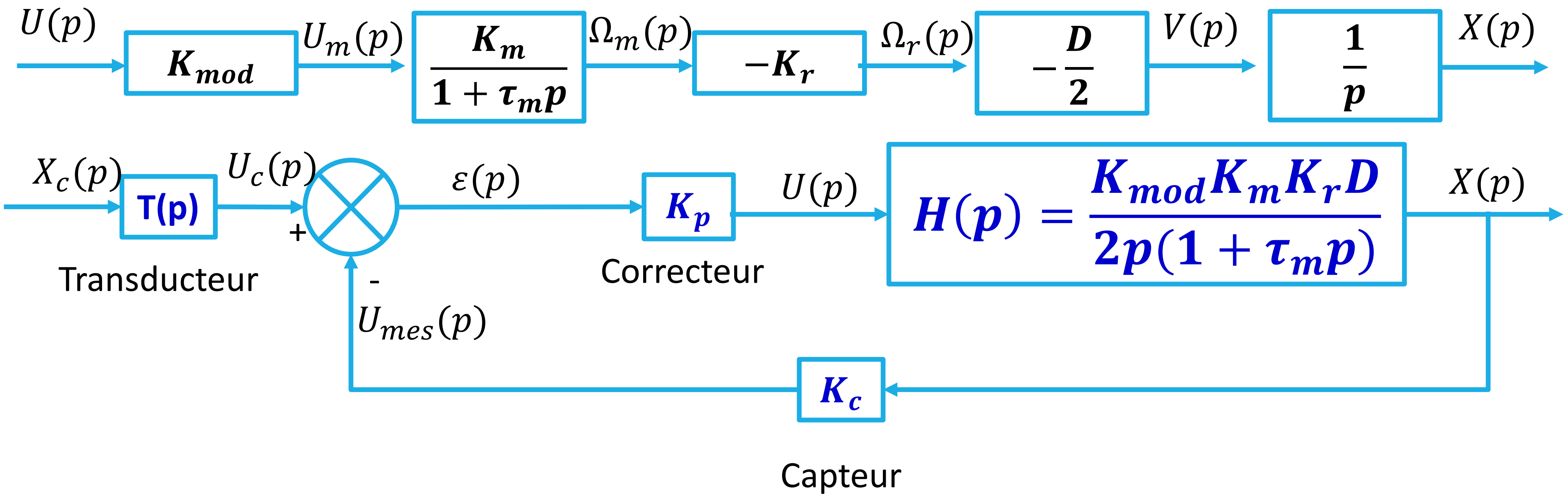


$$H(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \frac{K_{mod} K_m K_r D}{2p(1+\tau_m p)}$$

Excercice de synthèse (séance 1 et 2)

Le concepteur choisit d’asservir cette commande de position. Un capteur de position angulaire est alors placé au point B délivre une tension $u_{mes}(t)$. La fonction de transfert de ce capteur sera prise égale à k_c. Un correcteur proportionnel de gain K_p est inséré. Un transducteur de fonction de transfert $T(p)$ permet de traduire la consigne de position $x_c(t)$ en une entrée système $u_c(t)$. Un comparateur compare la tension $u_c(t)$ à la tension $u_{mes}(t)$ délivrée par le capteur.

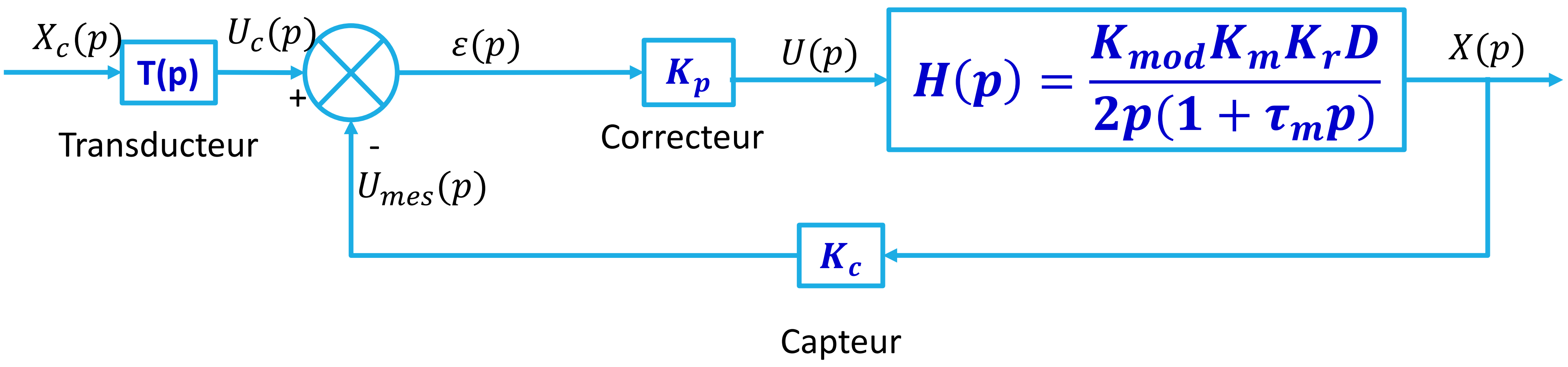
9. Dessiner le schéma bloc correspondant à cette situation ;



Excercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

10. Donner la fonction de transfert $T(p)$ afin que le système soit asservi en position.

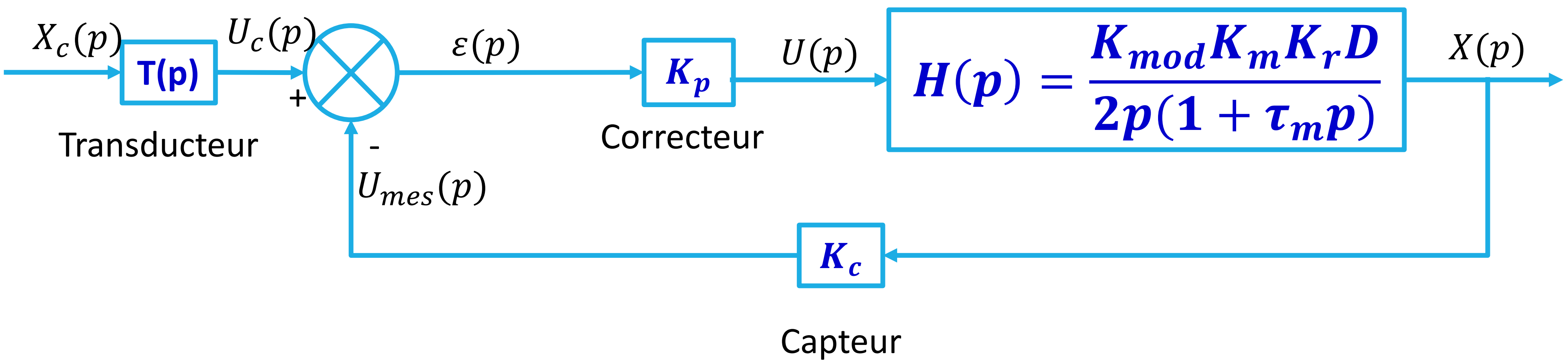


$$\varepsilon(p) = K_cX(p) - T(p)X_c(p) = K_c\big(X_c(p) - X(p)\big) \Rightarrow \boldsymbol{T(p) = K_c}$$

Excercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

11. Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée $G(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)}$;



$$G(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{K_cK_pK_{mod}K_mK_rD}p + \frac{2\tau_m}{K_cK_pK_{mod}K_mK_rD}p^2}$$

Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

12. Identifier la fonction de transfert à un système de second ordre ;

$$H(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{K_c K_p K_{mod} K_m K_r D} p + \frac{2\tau_m}{K_c K_p K_{mod} K_m K_r D} p^2} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{k = 1} \\ \boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{K_c K_p K_{mod} K_m K_r D}{2\tau_m}}} \\ \boldsymbol{m = \sqrt{\frac{1}{2\tau_m K_c K_p K_{mod} K_m K_r D}}} \end{cases}$$

Exercice de synthèse (séance 1 et 2)

Prérequis **Modélisation d'un système asservi, simplification des schémas blocs, fonction de transfert, identification expérimentale (temporelle et fréquentielle), rapidité du système, etc.**

12. Déterminer $\boldsymbol{K_p}$ permettant d'avoir la réponse indicielle la plus rapide sans avoir d'oscillations ;

$$m = \sqrt{\frac{1}{2\tau_m K_c K_p K_{mod} K_m K_r D}} = 1 \quad \Rightarrow \quad K_p = \frac{1}{2\tau_m K_c K_{mod} K_m K_r D}$$

Merci pour votre attention