Automatique des systèmes mécaniques:

Asservissement des Systèmes Linéaires Continus et Invariants (SLCI)

LEFI ABDELLAOUI: INGÉNIEUR DOCTEUR AGRÉGÉ EN GÉNIE MÉCANIQUE

IPEIB 2020

Modélisation d’un système asservi

Définitions :

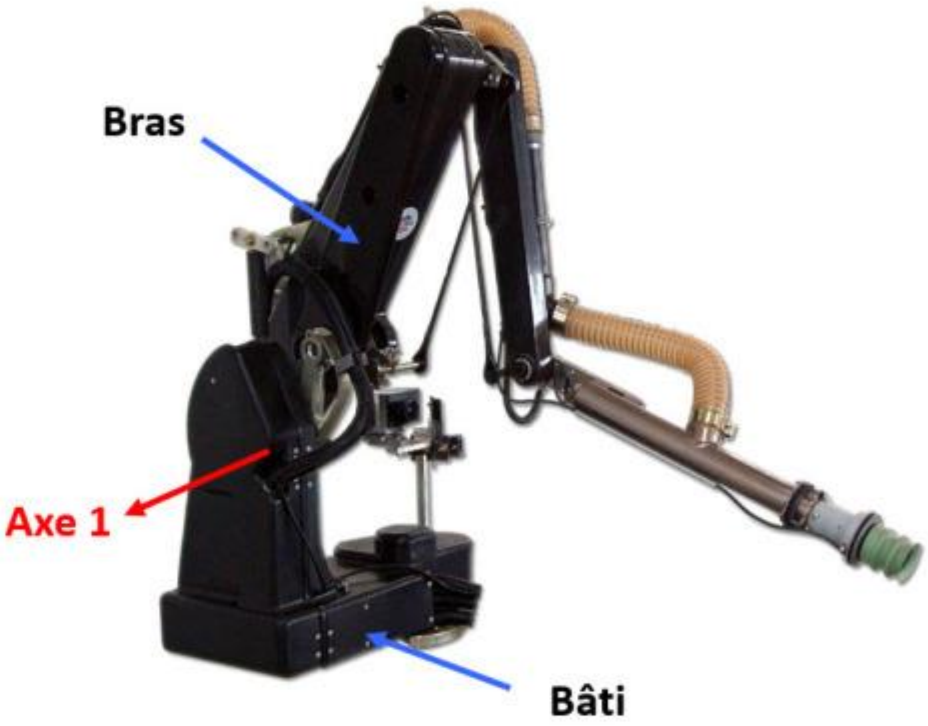
- Automatique: C’est la science qui étudie les automatismes;
- Automatisme: Un dispositif technologique qui remplace l'opérateur humain dans la conduite d'une machine, d'un processus, d'une installation industrielle;
- Processus : C'est l'ensemble de l'installation que l'on doit piloter. Il est caractérisé par des signaux d'entrée et de sortie et des lois physiques et mathématiques reliant ces signaux.
- Un système est un ensemble de processus en évolution.

Les **signaux** relatifs à un système sont de deux types :

- Signaux d'entrées : Ils sont indépendants du système et peuvent être commandés (Consignes) ou non commandés (Perturbations).
- Signaux de sorties : Ils sont dépendants du système et des signaux d'entrées.

Modélisation d’un système asservi

Exemple1: Bras de MaxPID :



Modélisation d'un système asservi

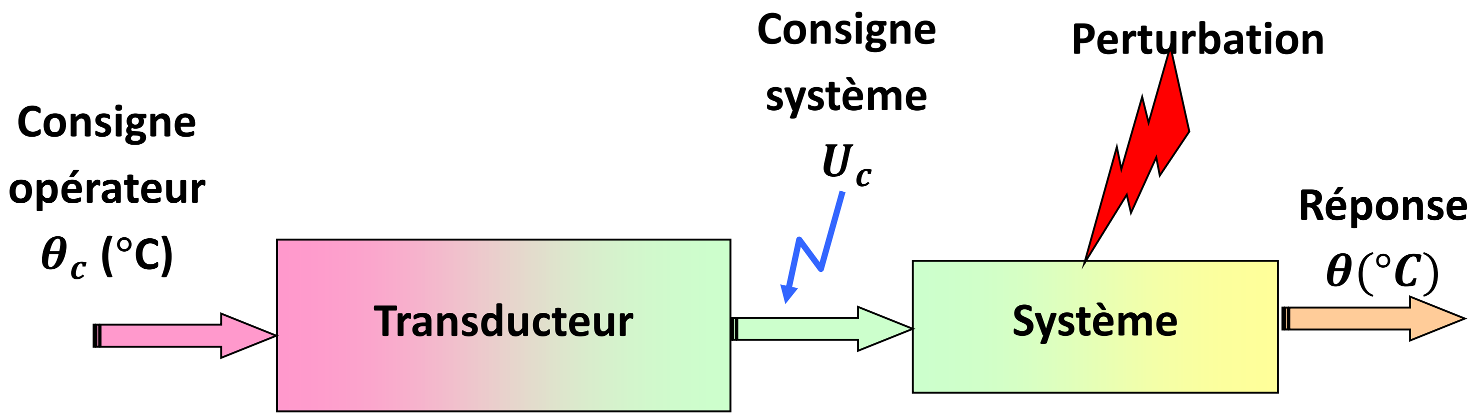
Exemple 2: Cheville de NAO

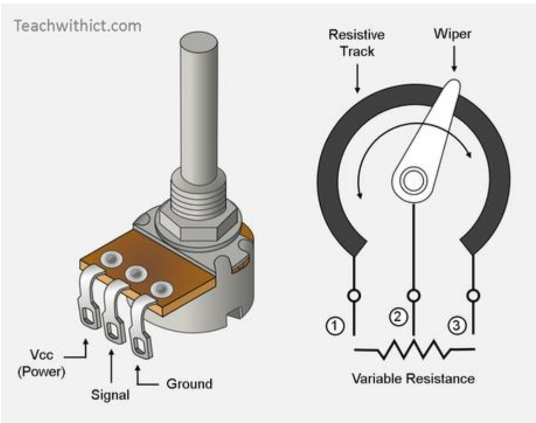
Leçon 1 : Modélisation d’un système asservi

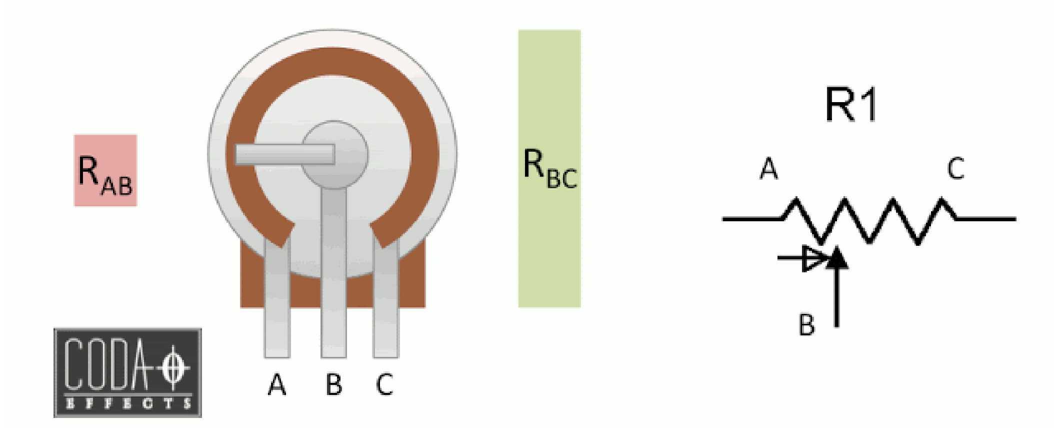
Exemple 2: Régulation de température

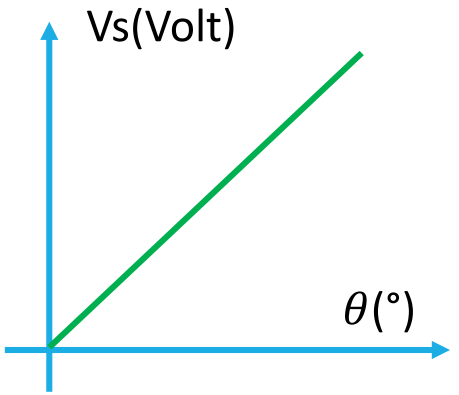
Modélisation d'un système asservi

Consigne, perturbation et réponse:







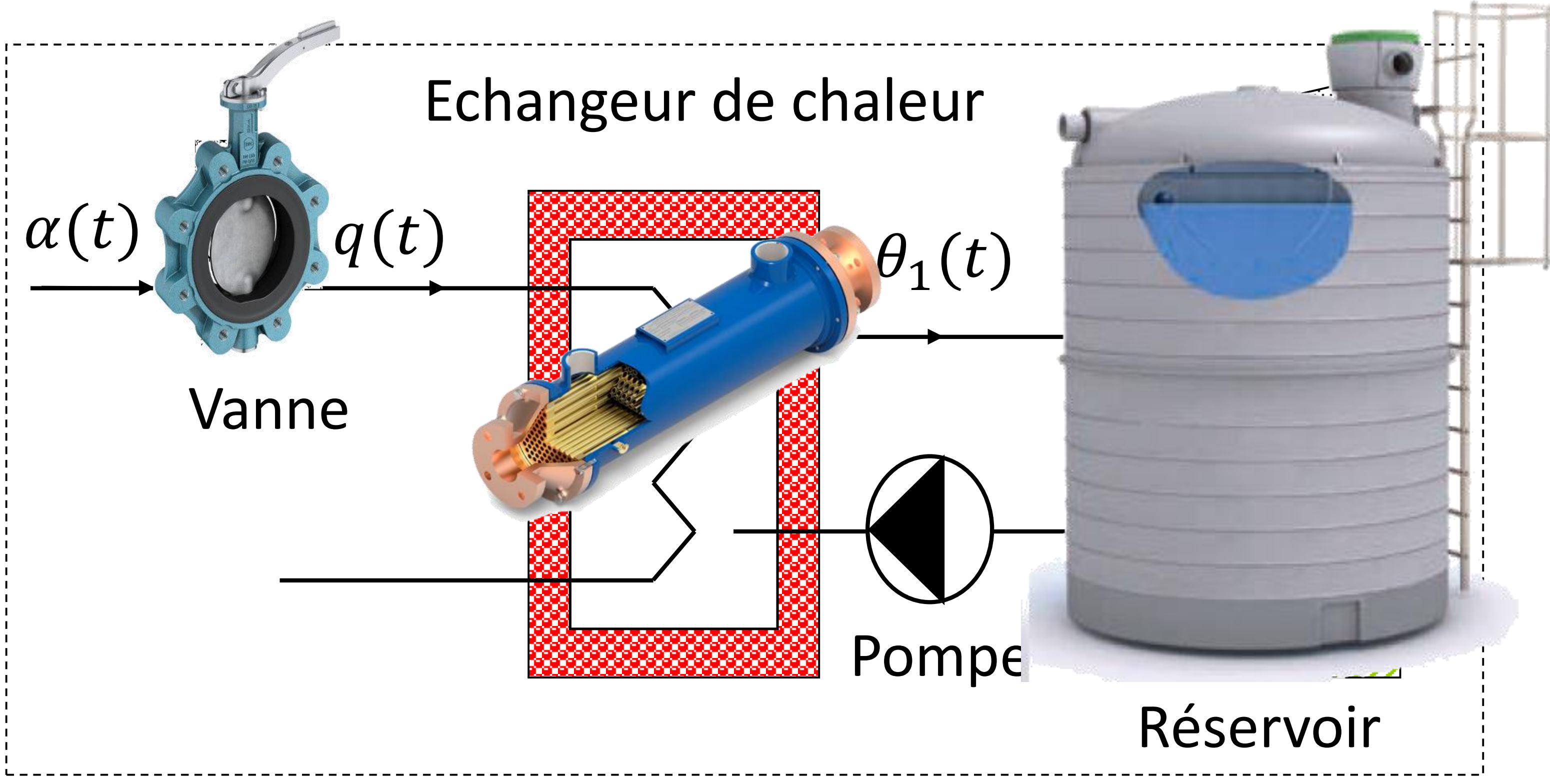


Modélisation d’un système asservi

Système en boucle ouverte

Exemple: Réservoir chauffé

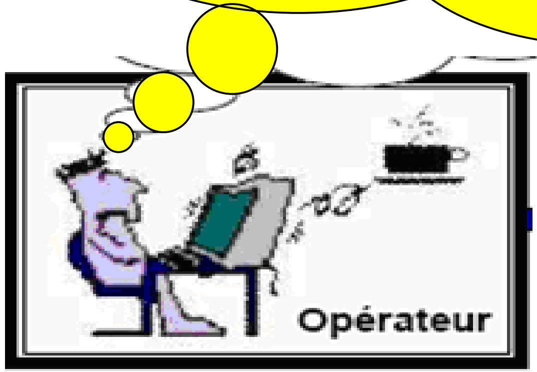
Un système est en boucle ouverte lorsqu'on n'a aucune information sur la sortie. L'opérateur ne peut pas élaborer une stratégie d'ajustement pour obtenir la sortie désirée.



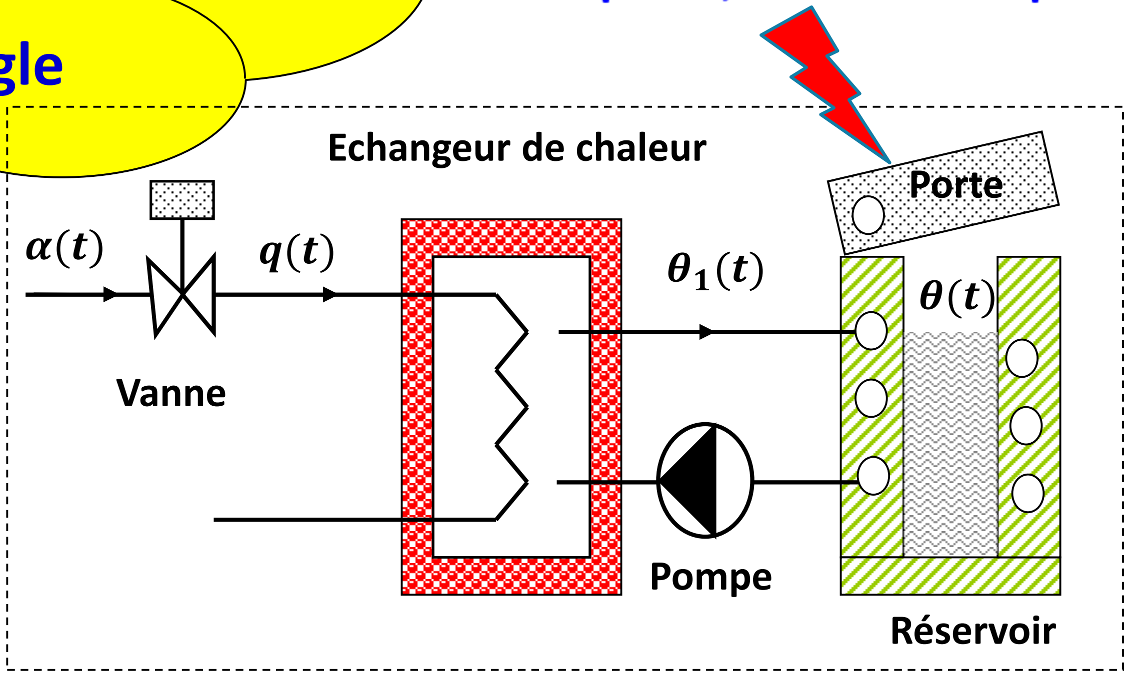
Modélisation d’un système asservi

Système en boucle ouverte

Pourvu que ça marche, je n’ai aucune information sur la sortie.
OOOOFFF !!! Je suis aveugle

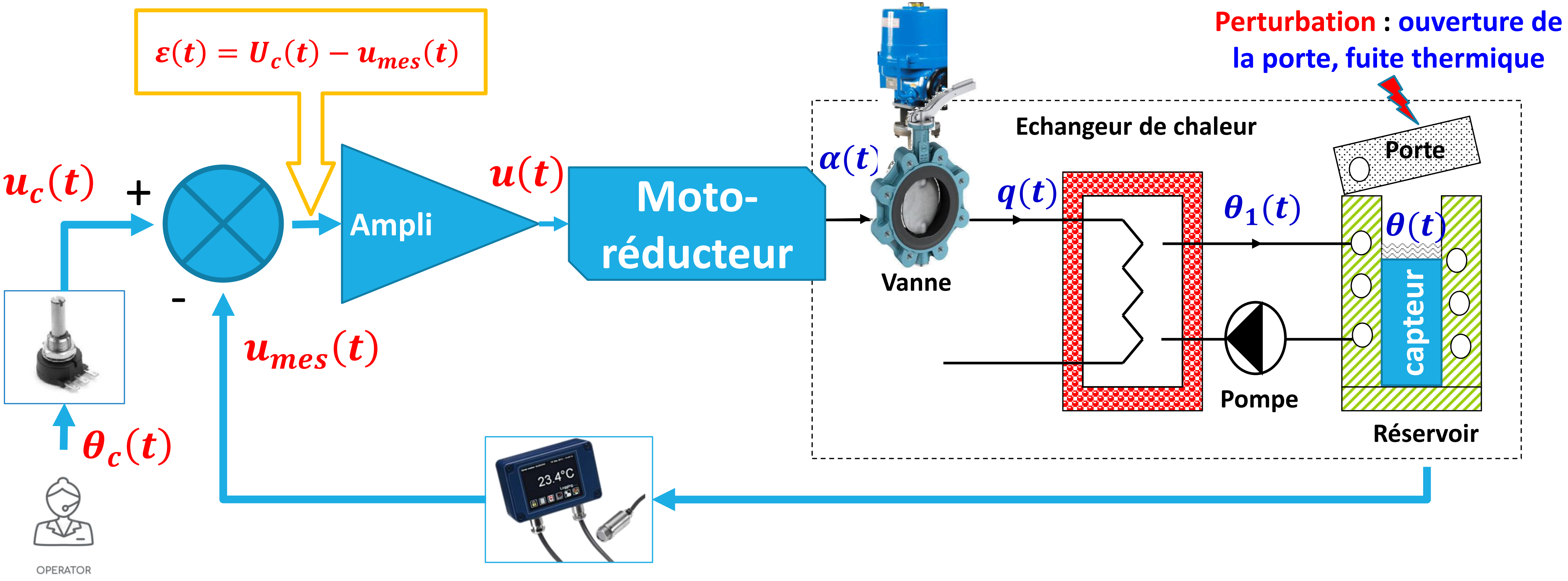


Perturbation : ouverture de la porte, fuite thermique



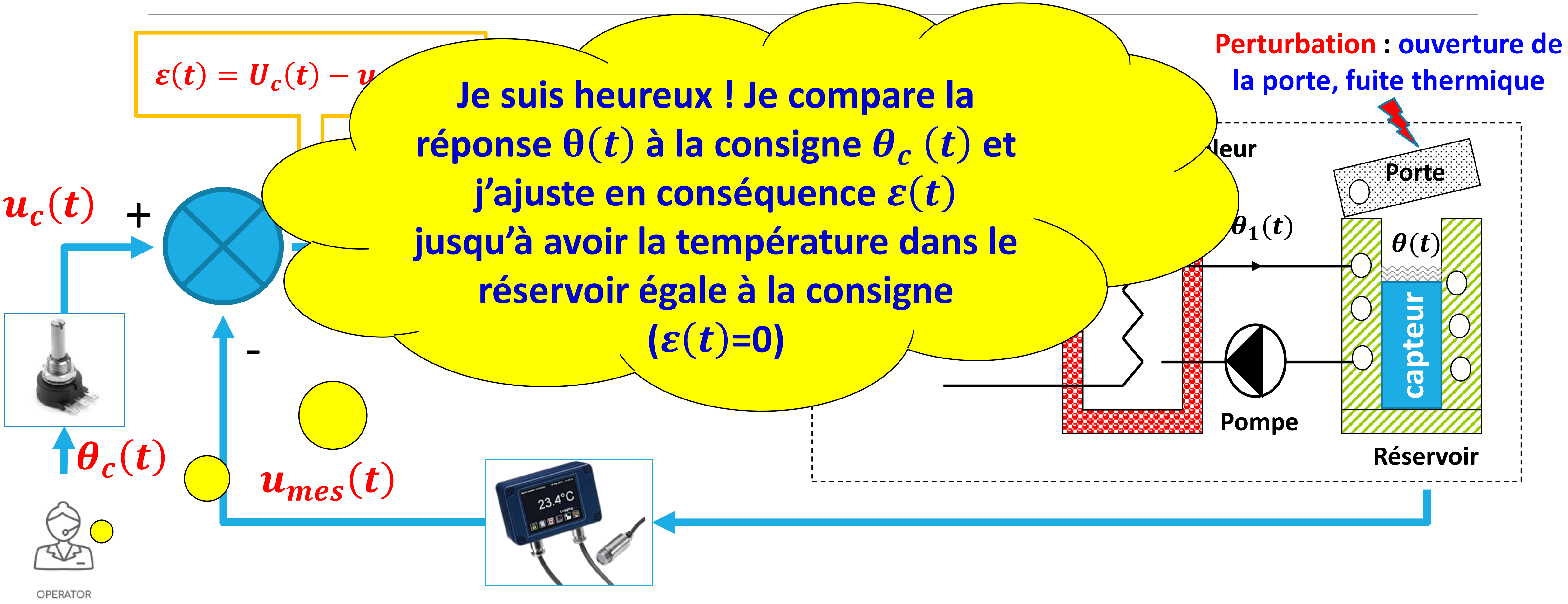
Modélisation d'un système asservi

Système en boucle fermée



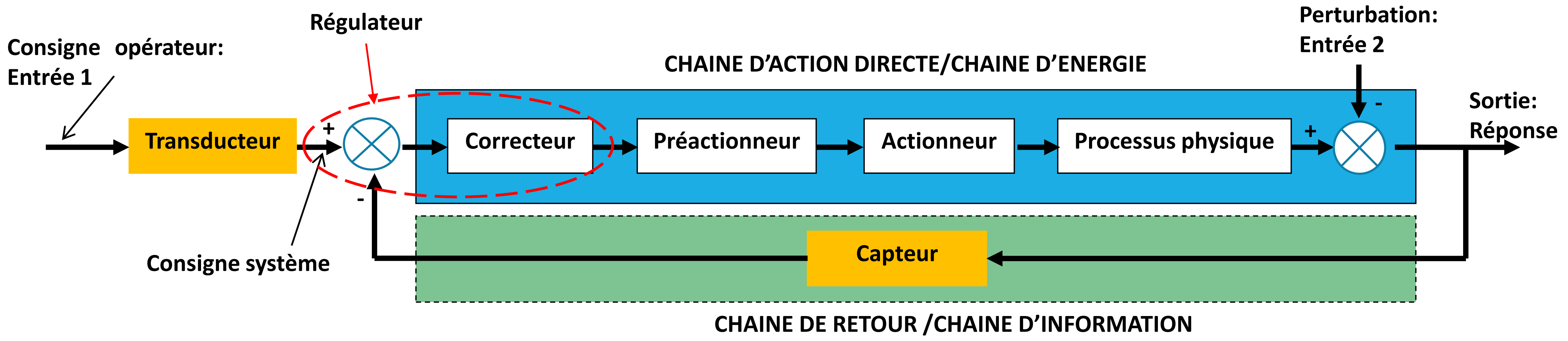
Modélisation d'un système asservi

Système en boucle fermée



Modélisation d'un système asservi

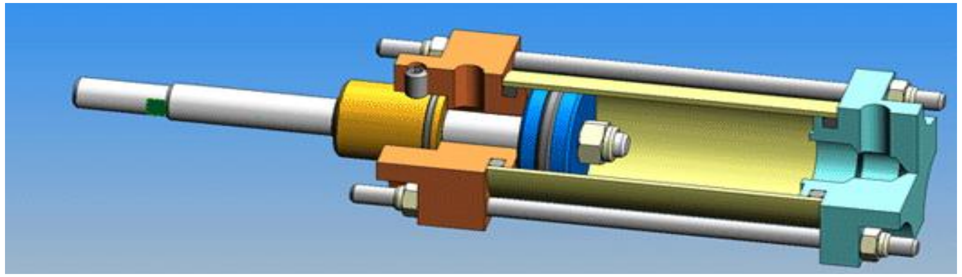
Schéma général d'un système asservi

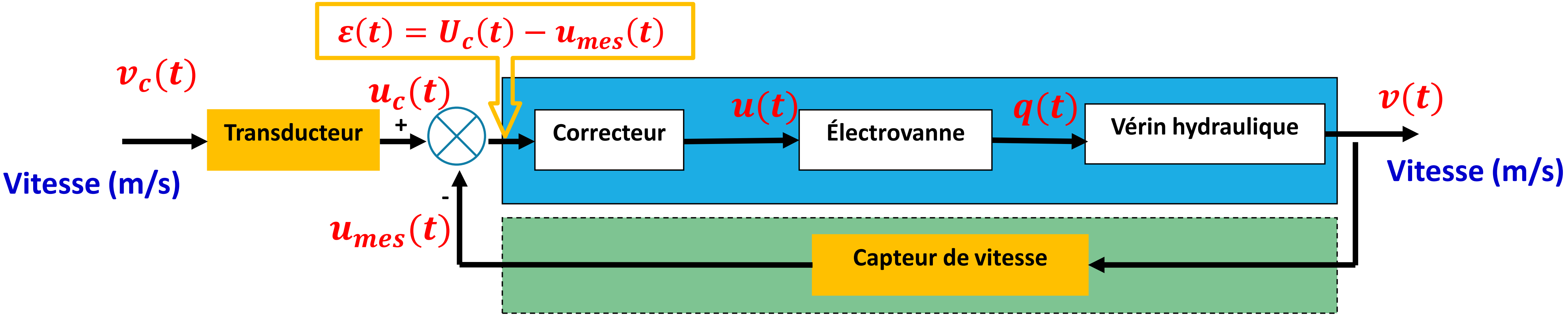


Modélisation d'un système asservi

Asservissement de vitesse d'un vérin hydraulique

L'exercice porte sur l'asservissement en vitesse d'un vérin hydraulique. La vitesse de sortie de ce vérin est notée $v(t)$. Une électrovanne (vanne pilotée électriquement considérée comme un distributeur hydraulique), délivre le débit $q(t)$ qui alimente le vérin. La consigne de vitesse $v_c(t)$est transformée en tension $u_c(t)$ à l'aide d'un transducteur. Cette tension est comparée à la tension $u_{mes}(t)$, délivrée par un capteur de vitesse, puis corrigée par un correcteur.

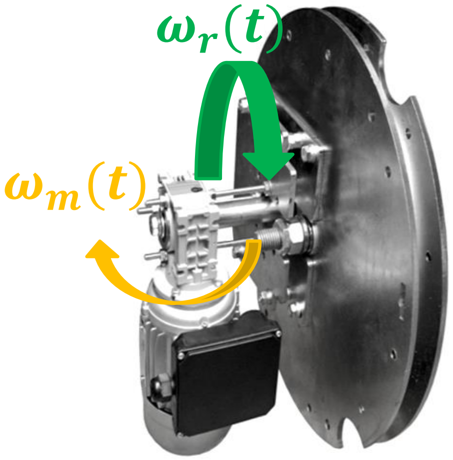


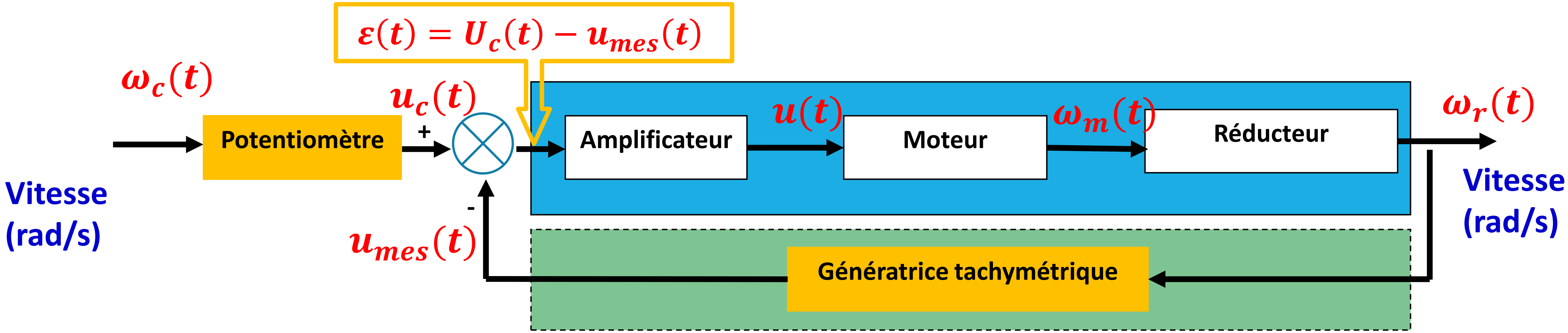


Modélisation d'un système asservi

Asservissement de vitesse d'un axe tournant

L'exercice porte sur l'asservissement en vitesse d'un axe tournant. L'entraînement est assuré par un moteur suivi d'un réducteur de vitesse. La consigne$\omega_c(t)$ est donnée au travers d'un potentiomètre angulaire. Une génératrice tachymétrique, placée après le réducteur, mesure la vitesse de sortie $\omega(t)$ de l'axe en question. Le signal délivré par la génératrice tachymétrique$u_{mes}(t)$ est comparé à celui délivré par le potentiomètre $u_c(t)$. Un amplificateur, placé après le comparateur, délivre un signal de commande au moteur.





Outils nécessaires pour étudier les systèmes asservis

1) La modélisation et l'étude des systèmes asservis nécessitent les outils suivants :

- Savoir utiliser la transformée de Laplace ;
- Savoir déterminer la fonction de transfert à partir des lois de comportement ;
- Savoir simplifier un schémas blocs et déduire la fonction de transfert ;
- Savoir tracer et lire les diagrammes de Bode, Nyquist et Black.
- Savoir identifier la fonction de transfert expérimentalement (identification temporelle et fréquentielle)

2) Dans la suite, nous nous limiterons à l'étude des **S**ystèmes **L**inéaires **C**ontinus **I**nvariants (SLCI)

Outil1 : Transformée de Laplace

Nécessité de l’outil transformée de Laplace

Domaine temporel	Domaine de Laplace

Modélisation (PFD, Théorème de l’énergie cinétique, Lois de Kirchhoff etc.) : Lois de comportement des systèmes.

Equations différentielles en : $e(t)$ et $s(t)$

Transformée de Laplace $L[.]$

Equations polynomiales en $E(p)$ et $S(p)$

Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$$U(p) = RI(p) + E(p)$$
$$E(p) = k_e \Omega_m(p)$$
$$C_m(p) = k_t I(p)$$
$$C_m(p) - \frac{D}{2\eta K_r} F_R(p) = \frac{J_{eq}}{\eta} p \Omega_m(p)$$

Transformée inverse de Laplace $L^{-1}[S(p)]$

$$S(p) = H(p)E(p)$$

$$u(t) = Ri(t) + e(t)$$
$$e(t) = k_e \omega_m(t)$$
$$c_m(t) = K_t i(t)$$
$$c_m(t) - \frac{D}{2\eta K_r} f_R(t) = \frac{J_{eq}}{\eta} \frac{d\omega_m(t)}{dt}$$

Impossible

Solution $s(t)$

Performances du système

- Stabilité
- Précision
- Rapidité

Outil1 : Transformée de Laplace

Définition et propriétés

Définition :

- La transformée de Laplace bilatérale d'une fonction $f: t \rightarrow f(t)$ est :

$$L[f(t)] = F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \; p \in \mathbb{C}$$

- Dans le cas où $f(t) \; = \; 0 \; pour t < \; 0$, on utilise la transformée de Laplace unilatérale :

$$L[f(t)] = F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \; p \in \mathbb{C}$$

Propriétés :

a. Linéarité

$$L[f(t) + g(t)] = L[f(t)] + L[g(t)]$$
$$L[\lambda f(t)] = \lambda L[f(t)]$$
$$L[0] = 0$$

b. Théorème de retard

$$L[f(t - T)] = e^{-Tp}F(p)$$

Outil1 : Transformée de Laplace

Propriétés

c. Théorème des valeurs initiale et finale

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

d. Dérivation

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

e. Intégration

$$L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{f(0)}{p}$$

Outil1 : Transformée de Laplace

Propriétés

Dans le cas où les conditions initiales sont nulles, conditions d'Heaviside, alors ;

$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p),\ L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$ et $L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$

f. Tableau des transformés de Laplace :

Le tableau suivant donne les transformées de Laplace de quelques fonction usuelles.

$f(t)$	$F(p)$		$f(t)$	$F(p)$
K	$\frac{K}{p}$		$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
Kt	$\frac{K}{p^2}$		$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
Kt^n	$\frac{Kn!}{p^{n+1}}$		$e^{-at} sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$		$e^{-at} cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$			

Outil1 : Transformée de Laplace

Applications

Objectifs : *Des exercices élémentaires afin de maitriser les propriétés de la transformée de Laplace*

Transformées directes de Laplace

Trouver les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$f(t) = 3e^{-t} - e^{-2t}$

$$\boldsymbol{F(p) = \frac{3}{p+1} - \frac{1}{p+2}}$$

Transformées inverses de Laplace

Trouver les transformées inverses de Laplace des fonctions suivantes :

$F(p) = \frac{2}{p+1} - \frac{4}{p+3}$

$$\boldsymbol{f(t) = 2e^{-t} - 4e^{-3t}}$$

Décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples les fonctions suivantes et calculer leurs transformées inverses :

$F(p) = \frac{-(p^2+p-1)}{p(p+1)(p+2)}$,

$$\boldsymbol{F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2} = \frac{\frac{1}{2}}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}}$$

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} - e^{-2t}}$$

Résolution des équations différentielles

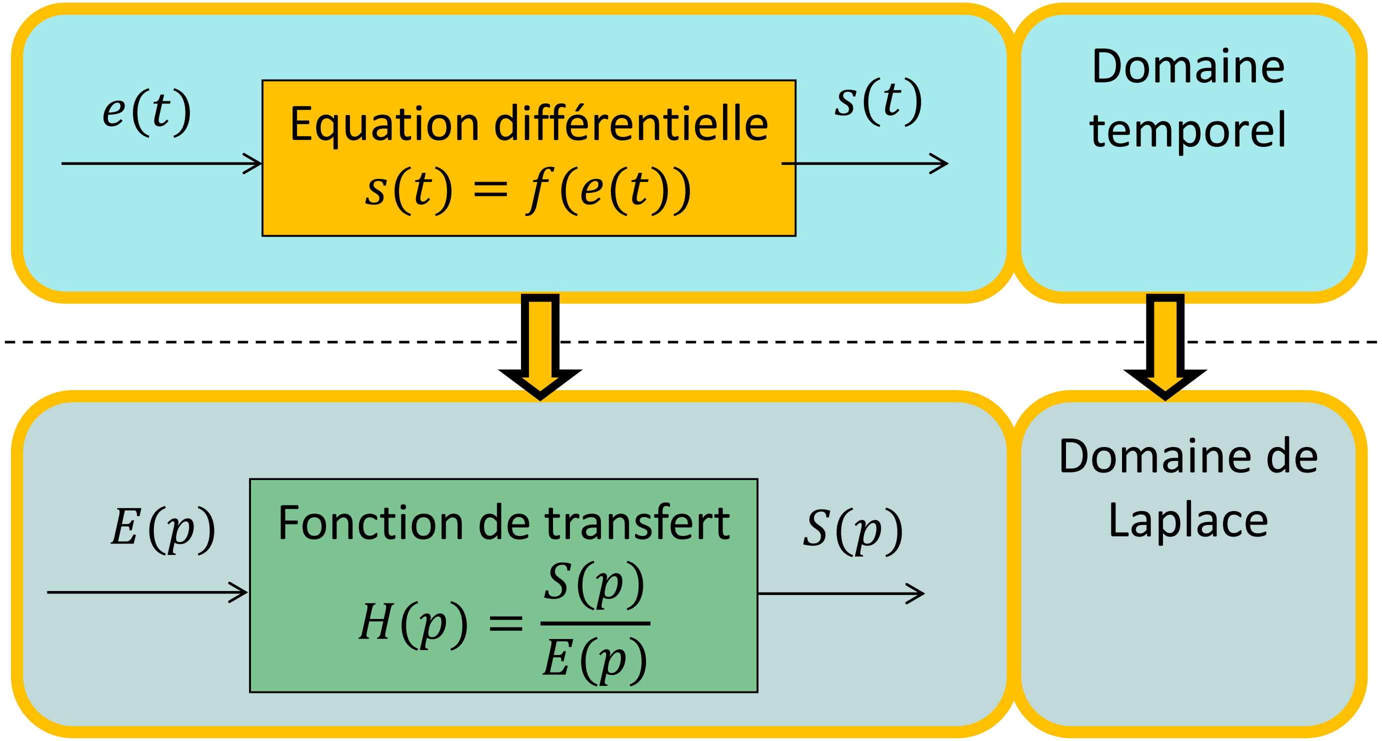
Résoudre l’équation différentielle suivante par les transformées de Laplace.

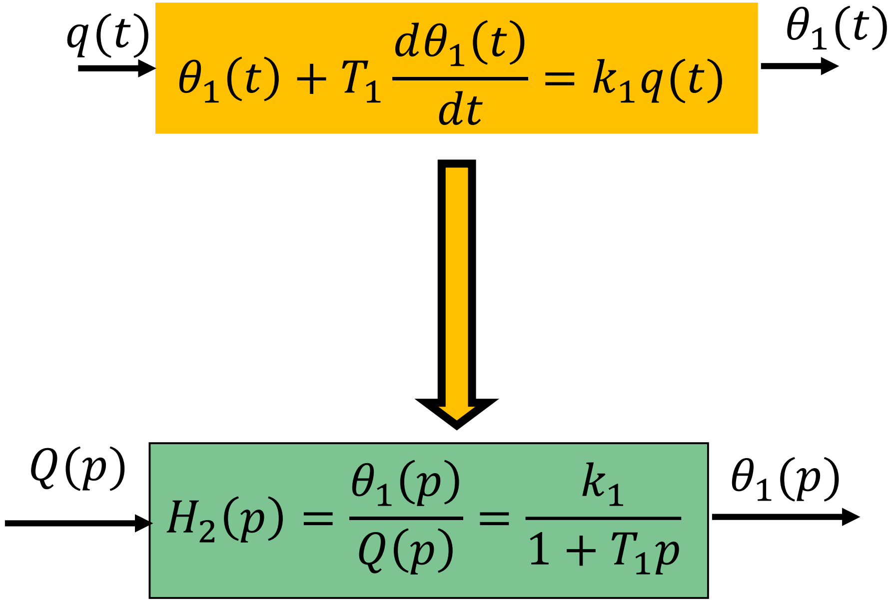
1) $\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = 0, \quad y(0) = 6$

$$\boldsymbol{pY(p) - y(0) - 3Y(p) = 0 \rightarrow Y(p)[p-3] = 6 \rightarrow Y(p) = \frac{6}{p-3} \rightarrow y(t) = 6e^{3t}}$$

Outil2 : Fonction de transfert à partir des lois de comportements

Explication





Outil2 : Fonction de transfert à partir des lois de comportements

Exemple: Réservoir chauffé

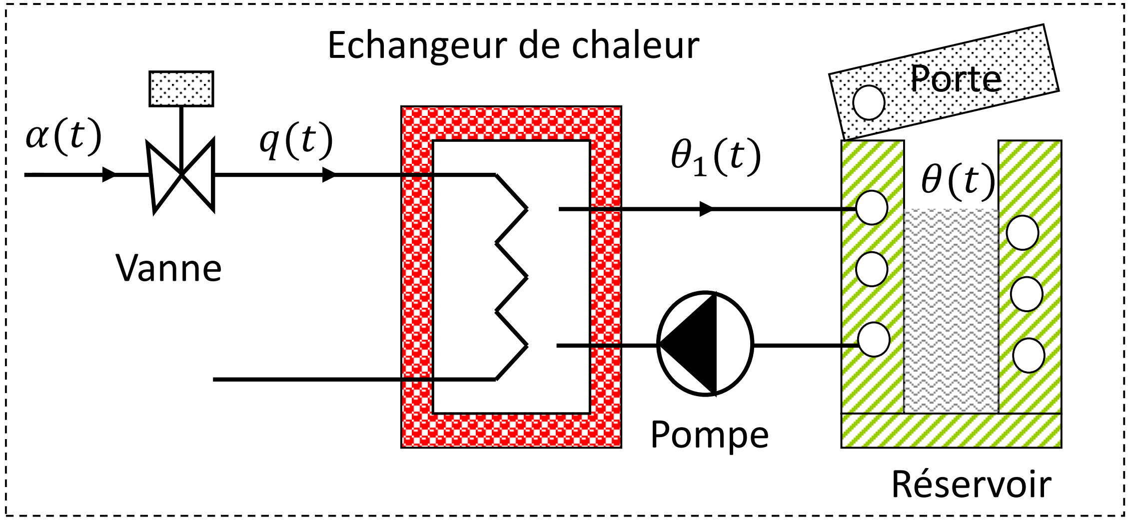
On donne les lois de comportement de chaque élément du système.

- La loi de fonctionnement de la vanne est caractérisée par l'équation $\boldsymbol{q(t) = k_a \alpha(t)}$ donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture de la vanne. $k_a = 10^{-3} m^3/°s$
- Les deux autres équations caractérisent le transfert de chaleur :
  1. Dans l'échangeur :

  $\boldsymbol{\theta_1(t) + T_1 \frac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 q(t)}$, $k_1 = 500°C/m^3 s^{-1}$ et $T_1 = 10s$

  1. Dans l'enceinte :

  $\boldsymbol{\theta(t) + T_2 \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \theta_1(t)}$, $k_2 = 0{,}8$ et $T_2 = 25s$



Outil2 : Fonction de transfert à partir des lois de comportements

Exemple: Réservoir chauffé

Question 1: Déterminer les fonctions de transfert des trois constituants du système.

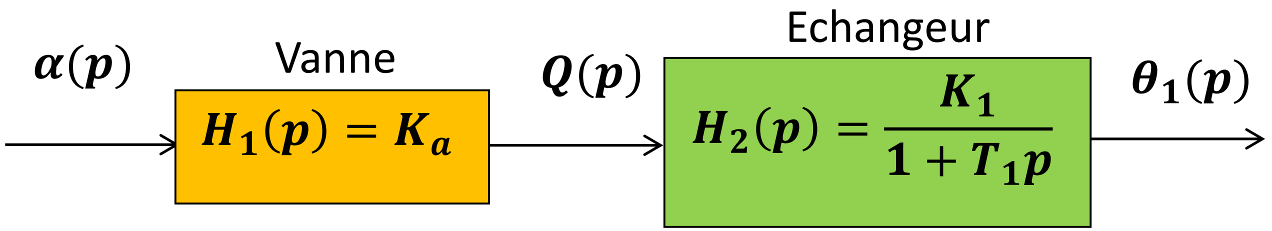
Domaine temporel	Domaine Laplace
$\alpha(t) \rightarrow \boxed{q(t) = k_a \alpha(t)} \rightarrow q(t)$	$\alpha(p) \rightarrow \boxed{H_1(p) = \dfrac{Q(p)}{\alpha(p)} = k_a} \rightarrow Q(p)$
$q(t) \rightarrow \boxed{\theta_1(t) + T_1 \dfrac{d\theta_1(t)}{dt} = k_1 q(t)} \rightarrow \theta_1(t)$	$Q(p) \rightarrow \boxed{H_2(p) = \dfrac{\theta_1(p)}{Q(p)} = \dfrac{k_1}{1 + T_1 p}} \rightarrow \theta_1(p)$
$\theta_1(t) \rightarrow \boxed{\theta(t) + T_2 \dfrac{d\theta(t)}{dt} = k_2 \theta_1(t)} \rightarrow \theta(t)$	$\theta_1(p) \rightarrow \boxed{H_3(p) = \dfrac{\theta(p)}{\theta_1(p)} = \dfrac{k_2}{1 + T_2 p}} \rightarrow \theta(p)$

Outil2 : Fonction de transfert à partir des lois de comportements

Exemple: Réservoir chauffé

Question 2: Déterminer la température à la sortie de l'échangeur $\theta_1(t)$ si l'angle d'ouverture de la vanne est égal à 360°.

Le schéma bloc suivant représente le système vanne + échangeur :



$$\alpha(t) = 360° \Rightarrow \alpha(p) = \frac{360}{p}$$

$$\theta_1(p) = \frac{k_1 k_a}{1+T_1 p}\alpha(p) \Rightarrow \theta_1(p) = \frac{180}{p(1+10p)} = \frac{18}{p(p+0,1)} = \frac{180}{p} - \frac{180}{p+0,1}$$

D'où : $\theta_1(t) = 180 - 180e^{-0,1t}$

Exemple: Réservoir chauffé

Question 3: Déterminer la température dans l'enceinte $\theta(t)$ si l'angle d'ouverture de la vanne est égal à 360°.
Le schéma bloc suivant représente le système vanne + échangeur+ enceinte :

$$\alpha(p) \longrightarrow \boxed{H_1(p) = K_a} \xrightarrow{Q(p)} \boxed{H_2(p) = \frac{K_1}{1+T_1p}} \xrightarrow{\theta_1(p)} \boxed{H_3(p) = \frac{k_2}{1+T_2p}} \longrightarrow \theta(p)$$

$$\alpha(t) = 360° \Rightarrow \alpha(p) = \frac{360}{p}$$

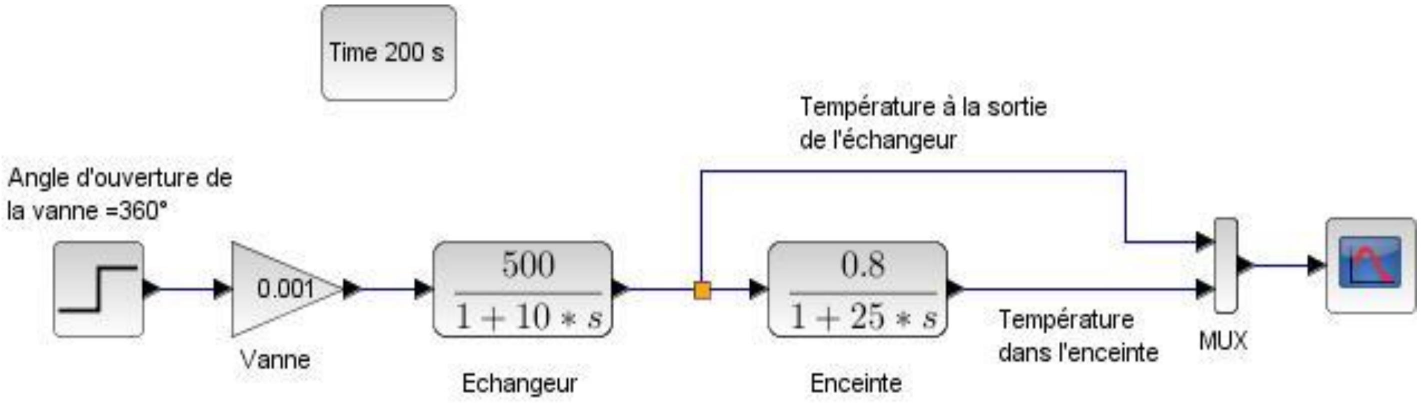
$$\theta(p) = \frac{k_1k_2k_a}{(1+T_1p)(1+T_2p)}\alpha(p) \Rightarrow \theta(p) = \frac{144}{p(1+10p)(1+25p)} = \frac{0{,}576}{p(p+0{,}1)(p+0{,}04)} = \frac{144}{p} + \frac{96}{p+0{,}1} - \frac{240}{p+0{,}04}$$

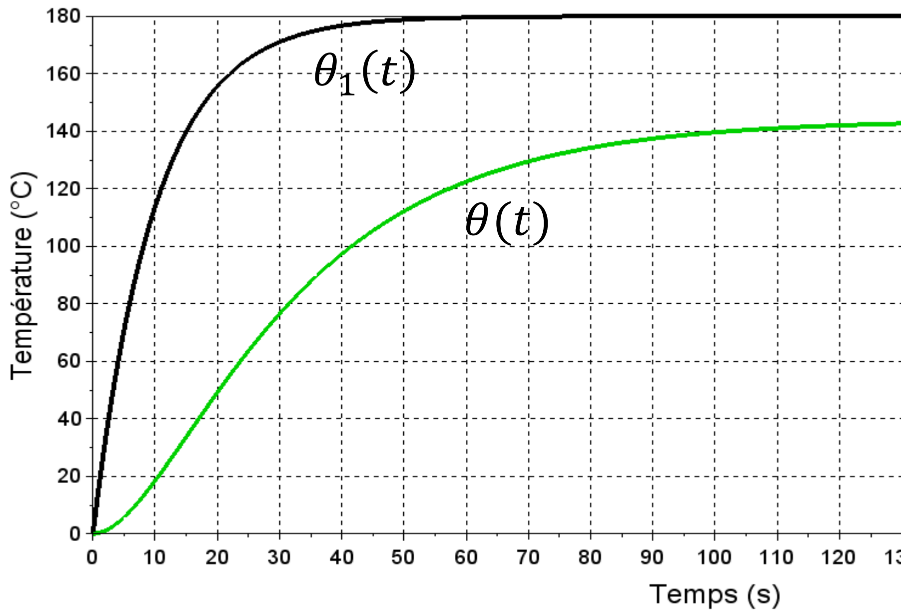
$$\boxed{\theta(t) = 144 + 96e^{-0{,}1t} - 240e^{-0{,}04t}}$$

Outil2 : Fonction de transfert à partir des lois de comportements

Exemple: Réservoir chauffé

Question 4: Avec le logiciel Scilab, Représenter et interpréter les allures de $\theta_1(t)$ et $\theta(t)$ si l'angle d'ouverture de la vanne est égal à 360°.

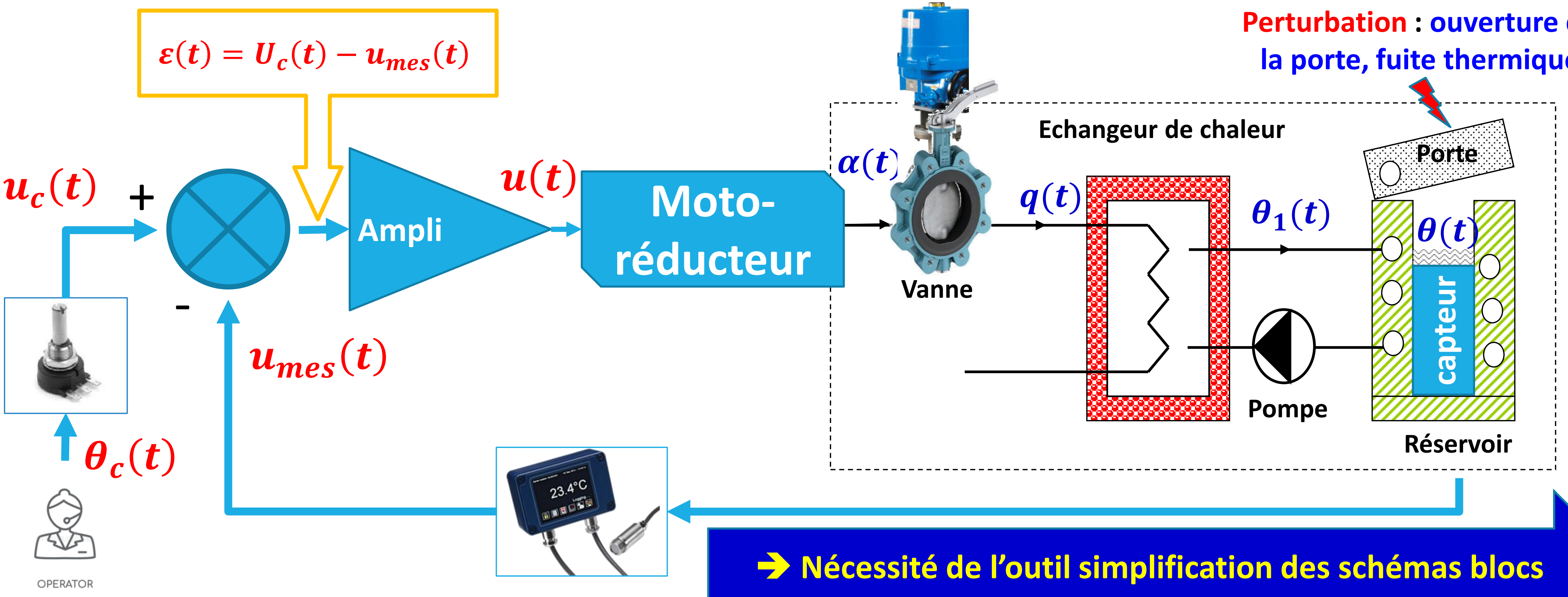




Modélisation d'un système asservi

Exemple: Réservoir chauffé

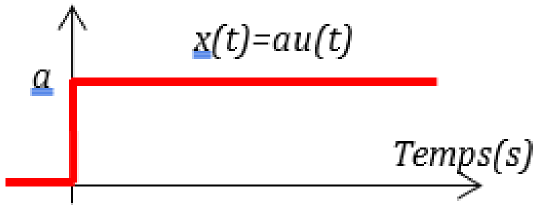
Déterminer $H(p) = \dfrac{\theta(p)}{\theta_c(p)}$

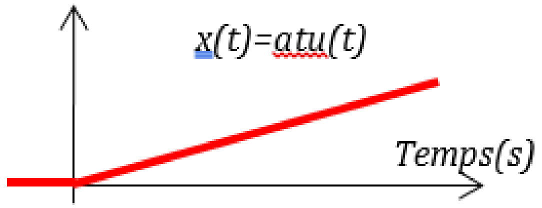


➔ **Nécessité de l'outil simplification des schémas blocs**

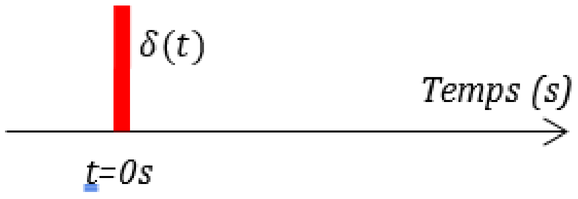
Outil2 : Fonction de transfert à partir des lois de comportements

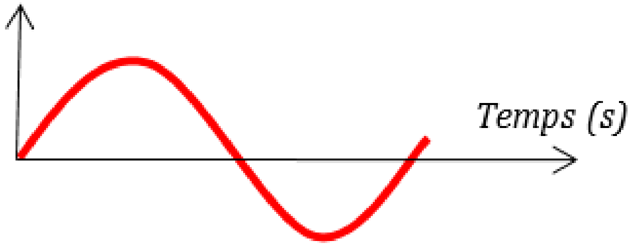
Fonctions tests

<table>
<tr><th>Echelon d'amplitude a</th><th>Rampe de pente a</th></tr>
<tr><td>


$Pour t < 0,\ x(t) = 0$
$Pour t > 0,\ x(t) = a$
L'échelon est unitaire si a=1 (*x(t)=au(t)*)
$L[u(t)] = \frac{1}{p}$
</td><td>


$Pour t < 0,\ x(t) = 0$
$Pour t > 0,\ x(t) = at$
$L[atu(t)] = \frac{a}{p^2}$
</td></tr>
<tr><th>Impulsion de Dirac</th><th>Sinusoïde</th></tr>
<tr><td>
L'impulsion de Dirac vérifie les propriétés :
$\delta(t) = 0\ si\ t \neq 0$
$\delta(t) = \infty\ si\ t = 0$
$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$



$L[\delta(t)] = 1$
</td><td>


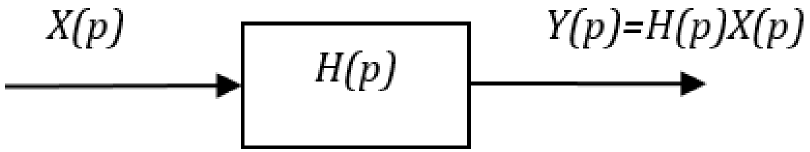
$pour t < 0, x(t) = 0$
$pour t > 0, x(t) = \text{a} \sin(\omega t)\, u(t)$
</td></tr>
</table>

Outil3 : Simplification des schémas blocs

Convention

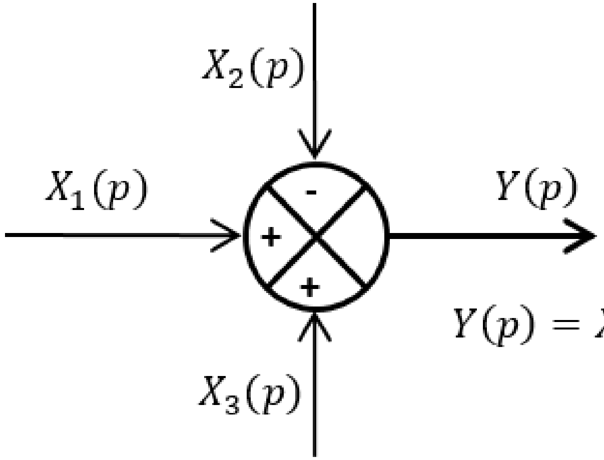
a. Bloc :

Un bloc relie une entrée unique à une sortie unique. Le lieu entre ces deux variables est matérialisé par la fonction de transfert H.



b. Sommateur :

La sortie d'un sommateur est la somme algébrique des entrées.

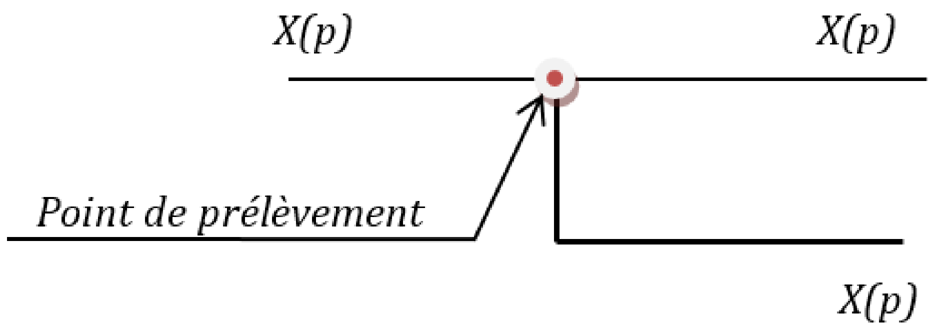


$$Y(p) = X_1(p) - X_2(p) + X_3(p)$$

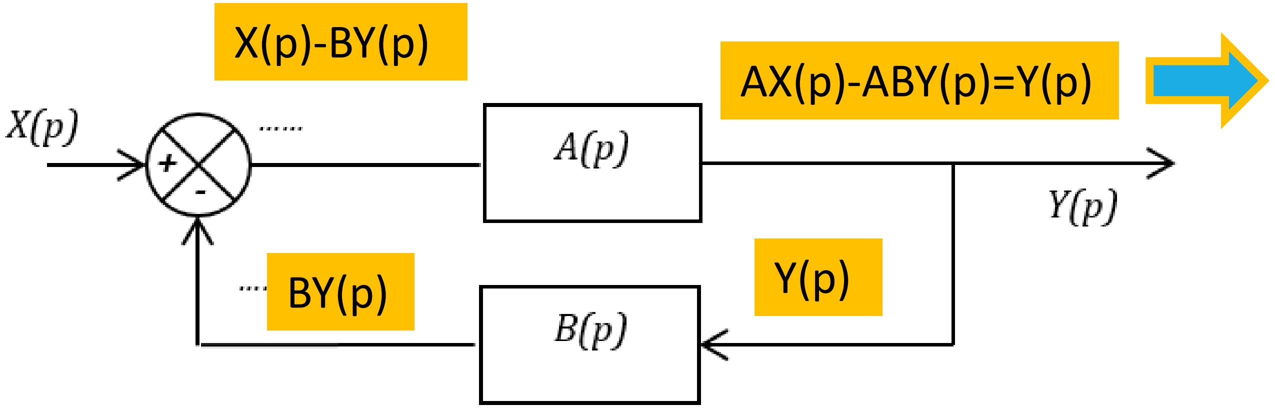
Outil3 : Simplification des schémas blocs

Convention

C. Convention



d. Exemple :

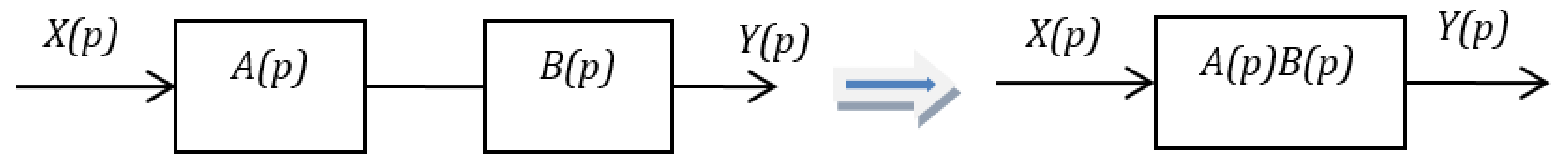
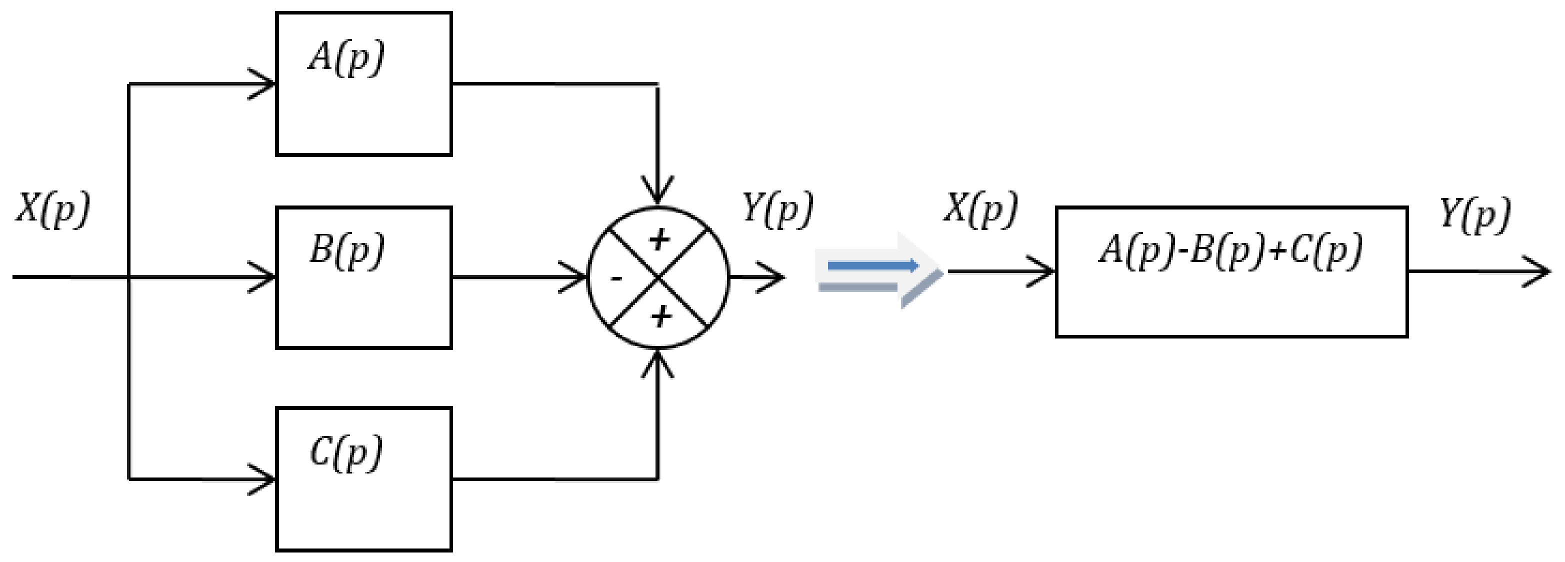


$$\boldsymbol{H(p) = \frac{A}{1 + AB}}$$

1. Compléter les expressions des différents signaux ;
2. Exprimer $Y(p)$ en fonction de $X(p)$ et déduire la fonction de transfert $H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$;

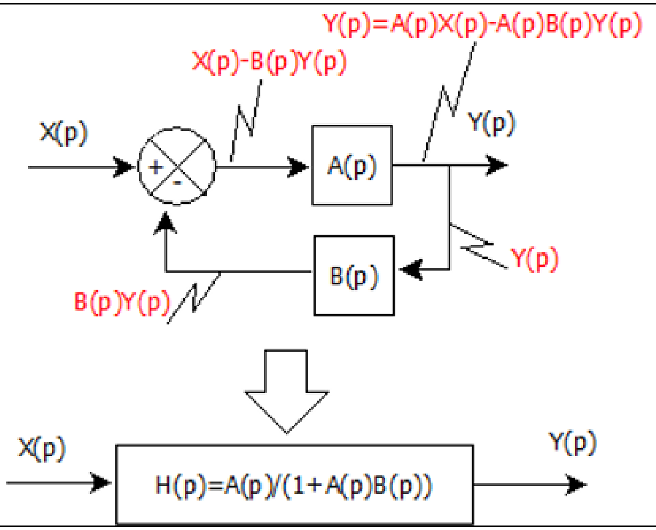
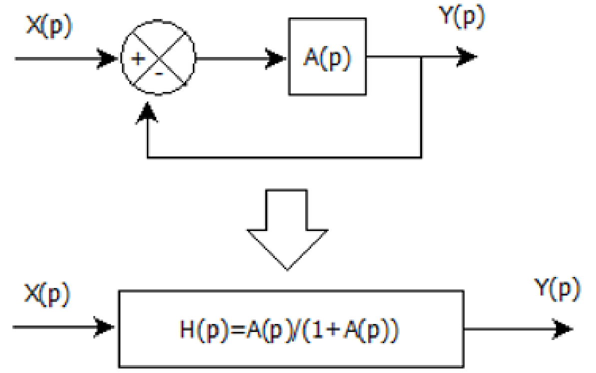
Outil3 : Simplification des schémas blocs

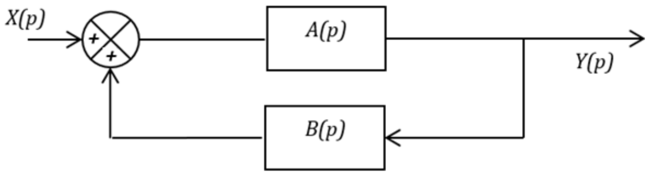
Règles de simplification

Blocs en cascade	
Blocs en parallèles	

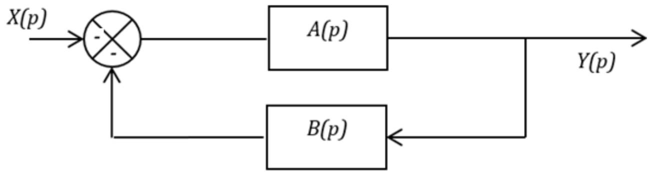
Outil3 : Simplification des schémas blocs

Règles de simplification

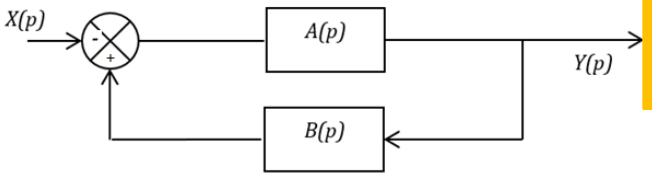
Structure en boucle fermée	
Cas du retour unitaire	



$$H(p) = \frac{A}{1 - AB}$$



$$H(p) = \frac{-A}{1 + AB}$$

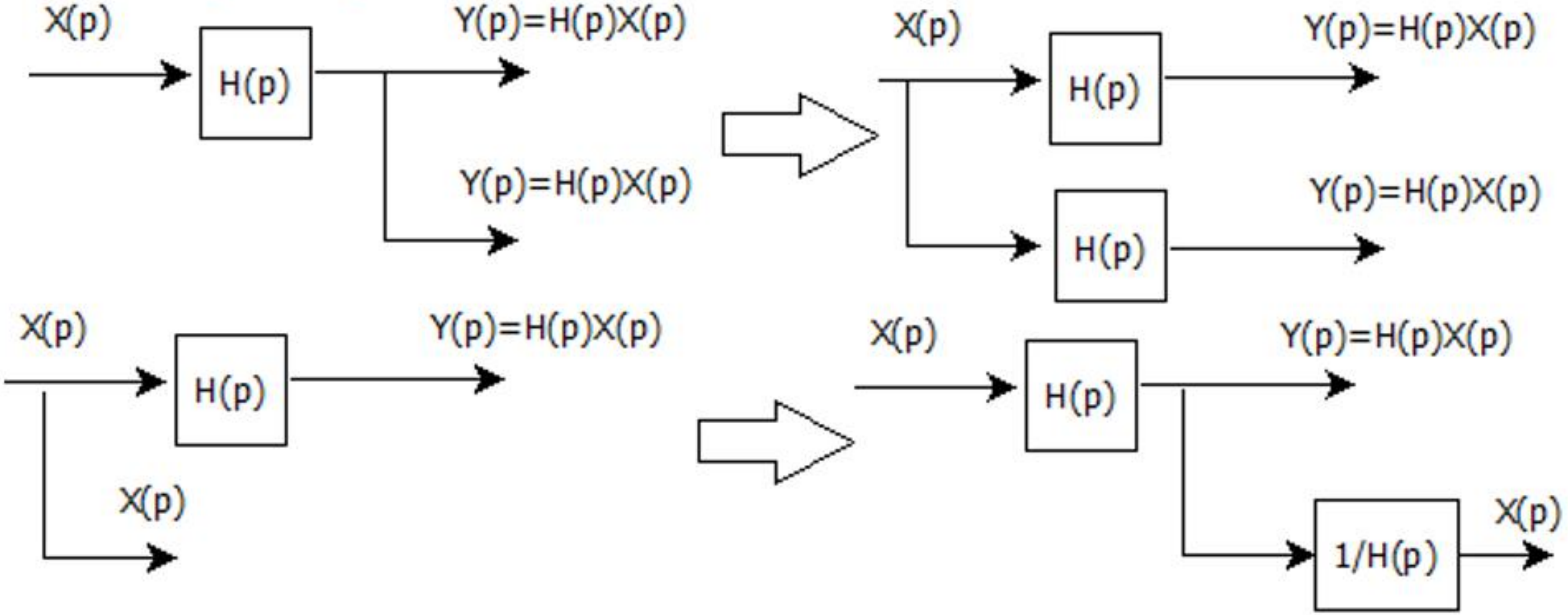


$$H(p) = \frac{-A}{1 - AB}$$

Outil3 : Simplification des schémas blocs

Manipulation des schémas blocs

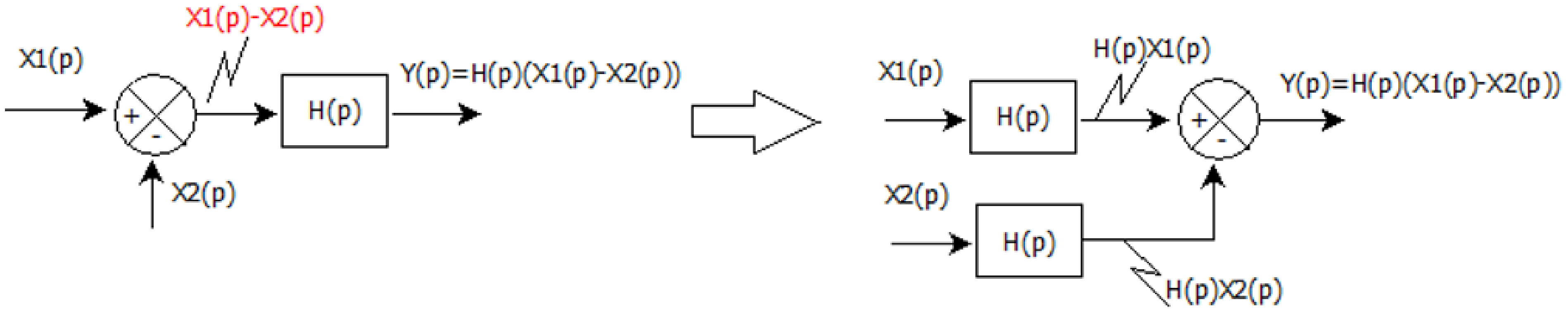
a. Déplacement d'un point de prélèvement :



Outil3 : Simplification des schémas blocs

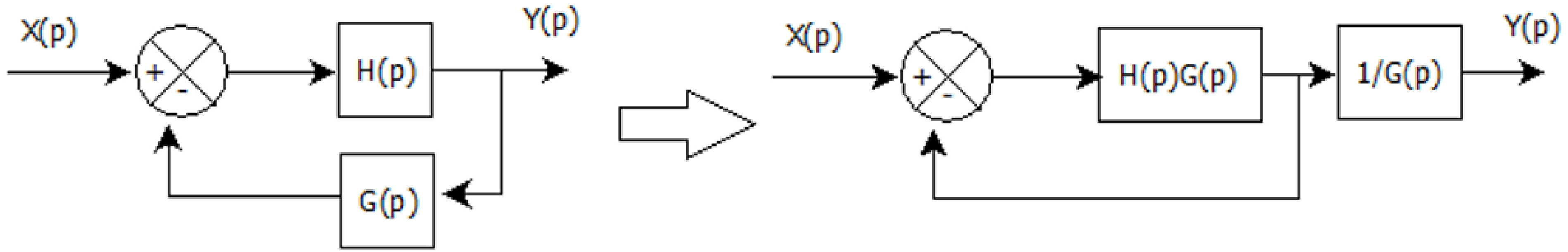
Manipulation des schémas blocs

b. Déplacement d'un sommateur :



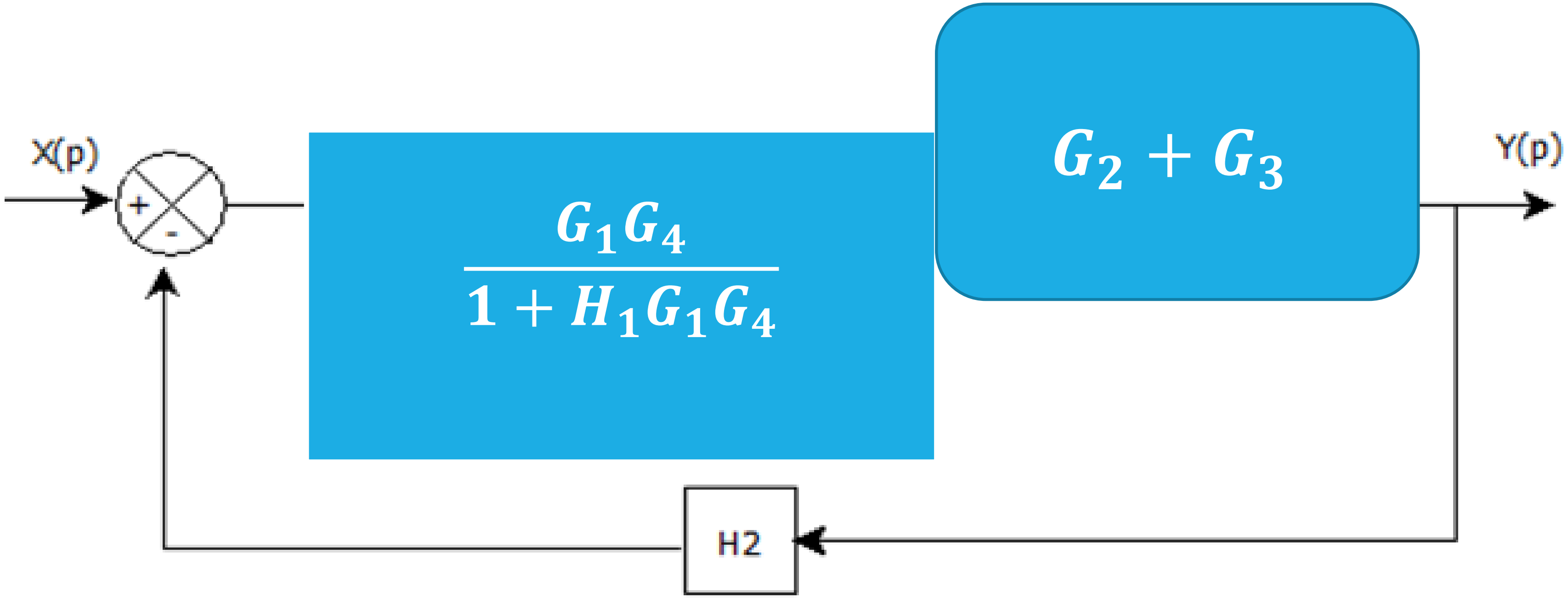
NB :

On peut ramener toujours un système à retour non unitaire à un système à retour unitaire



Outil3 : Simplification des schémas blocs

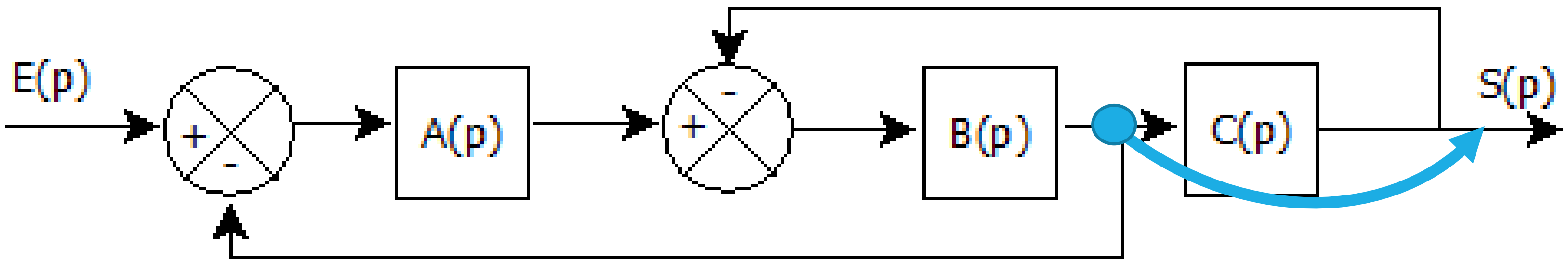
Application1: simple



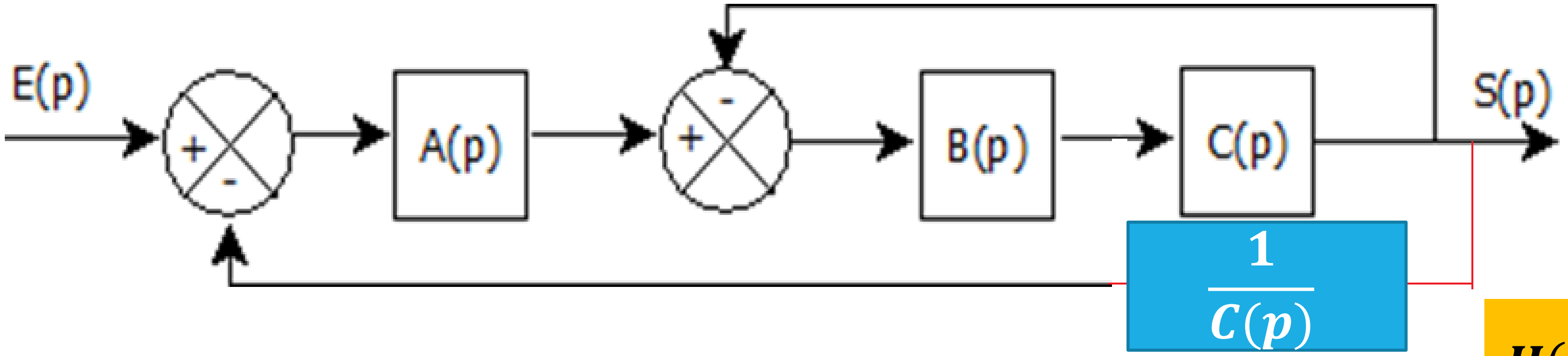
$$H(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{\frac{(G_2+G_3)G_1G_4}{1+H_1G_1G_4}}{1+\frac{H_2(G_2+G_3)G_1G_4}{1+H_1G_1G_4}}=\frac{(G_2+G_3)G_1G_4}{1+H_1G_1G_4+H_2(G_2+G_3)G_1G_4}$$

Outil3 : Simplification des schémas blocs

Application2: Boucles imbriquées



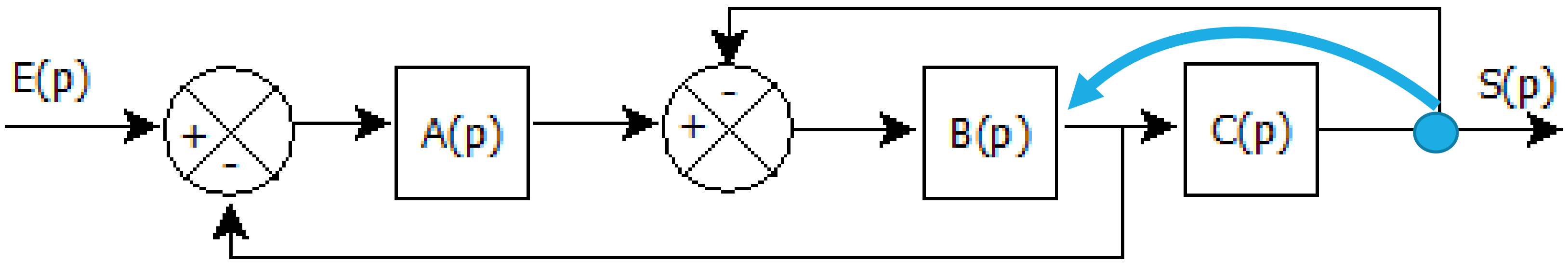
Solution 1:



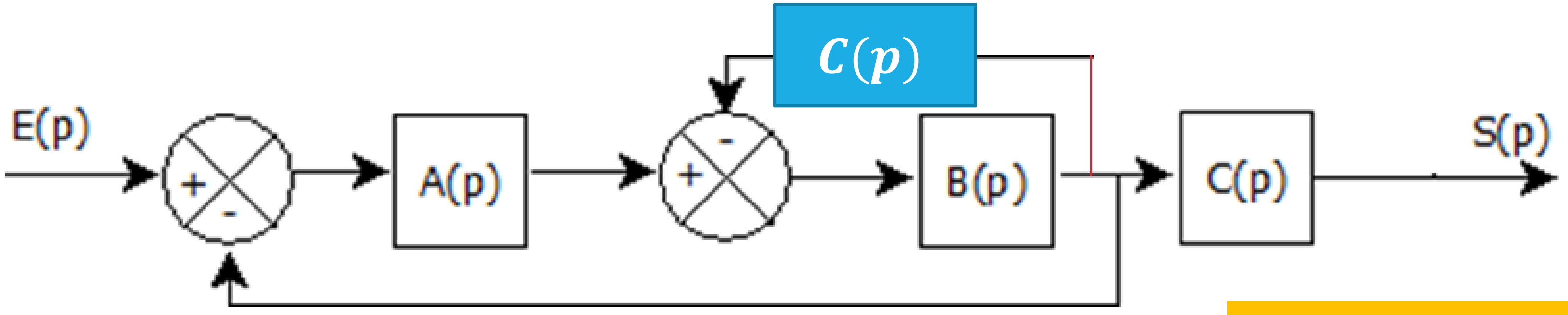
$$H(p) = \frac{G_2 G_3 G_1 G_4}{1 + H_1 G_1 G_4 + H_2 G_2 G_3 G_1 G_4}$$

Outil3 : Simplification des schémas blocs

Application2: Boucles imbriquées



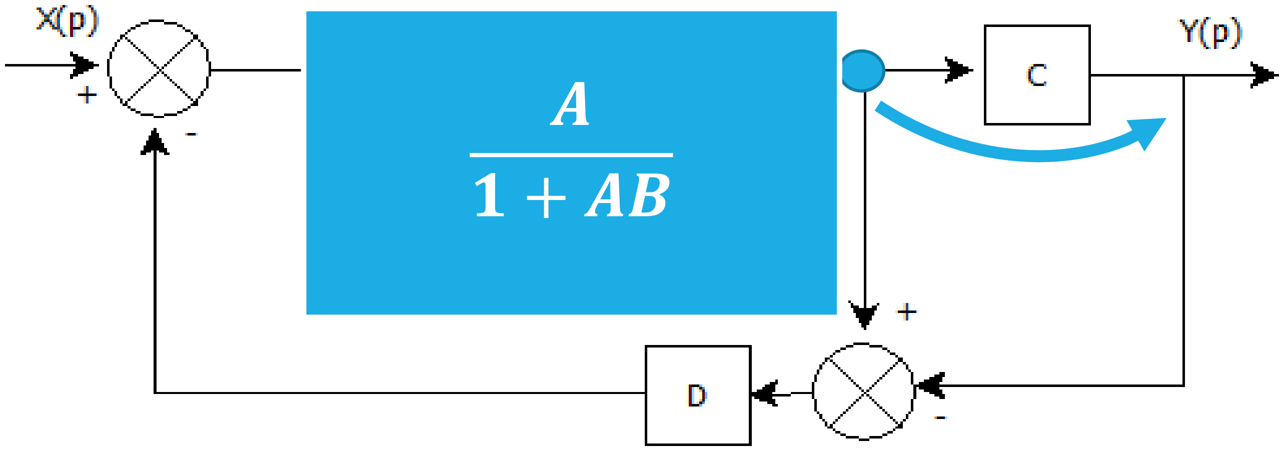
Solution 2:

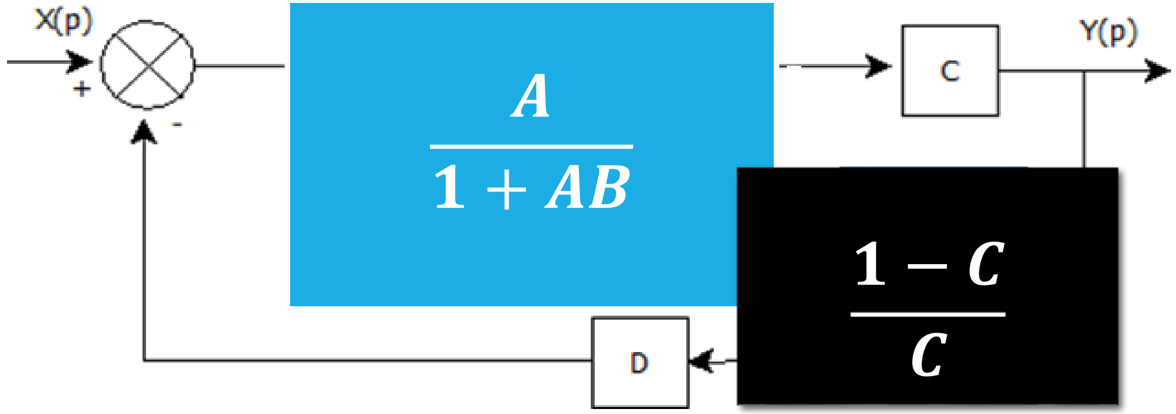


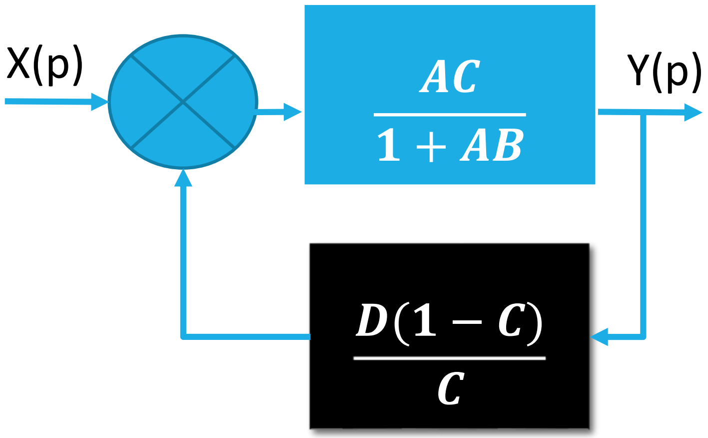
$$H(p) = \frac{G_2 G_3 G_1 G_4}{1 + H_1 G_1 G_4 + H_2 G_2 G_3 G_1 G_4}$$

Outil3 : Simplification des schémas blocs

Application3: Boucles imbriquées



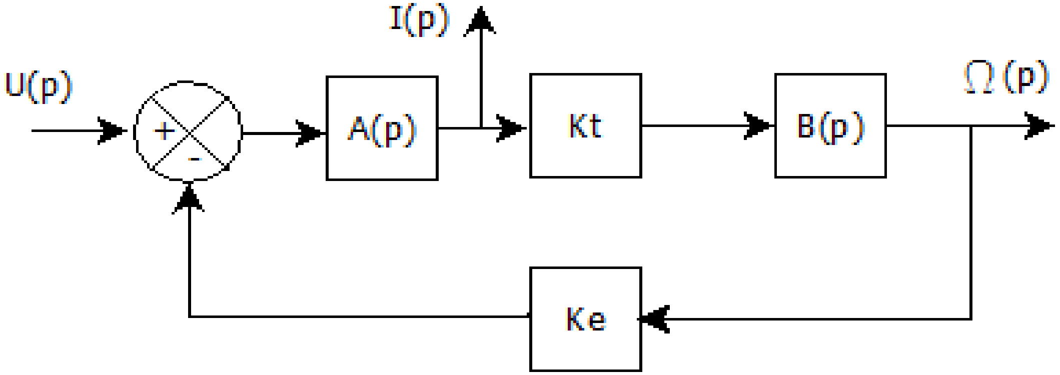


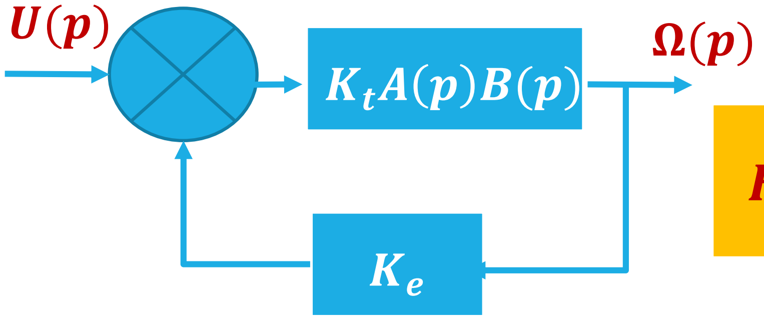


$$H(p) = \frac{AC}{1 + AB + AD(1-C)}$$

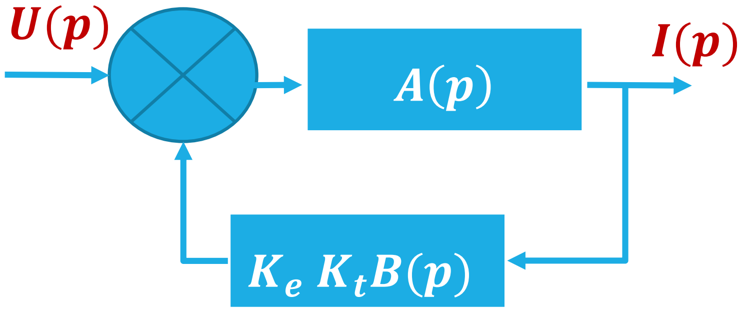
Outil3 : Simplification des schémas blocs

Application4: Système à une entrée et deux sorties





$$H_1(p) = \frac{K_tA(p)B(p)}{1 + K_eK_tA(p)B(p)}$$

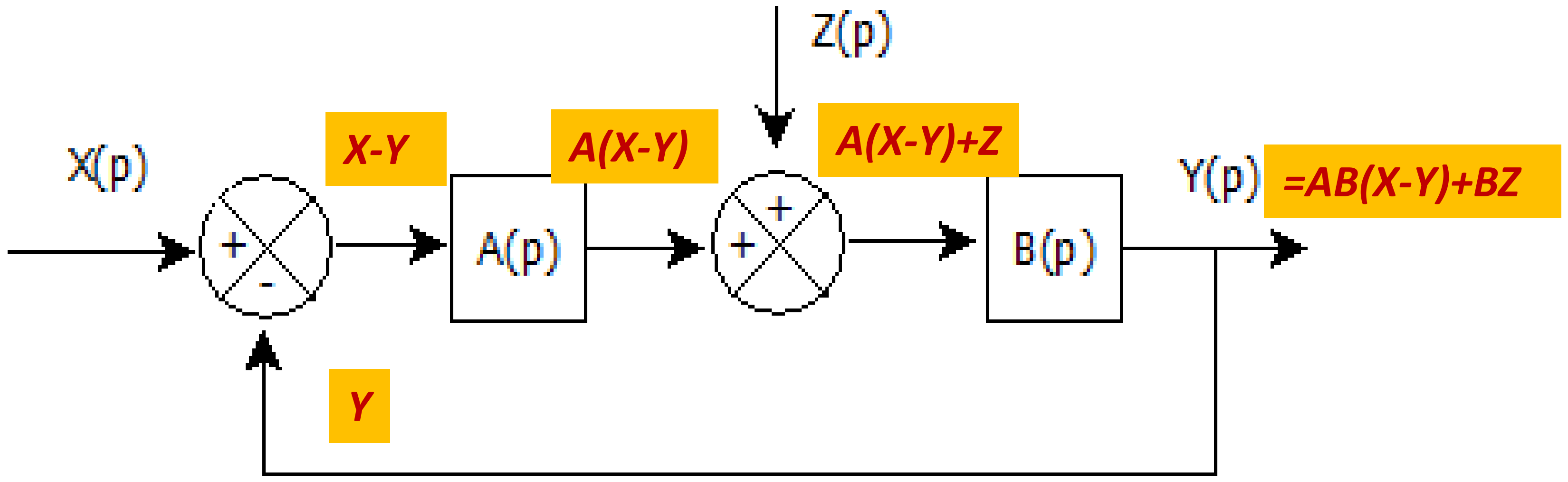


$$H_2(p) = \frac{A(p)}{1 + K_eK_tA(p)B(p)}$$

Outil3 : Simplification des schémas blocs

Application4: Système à deux entrées

Méthode1: algébrique



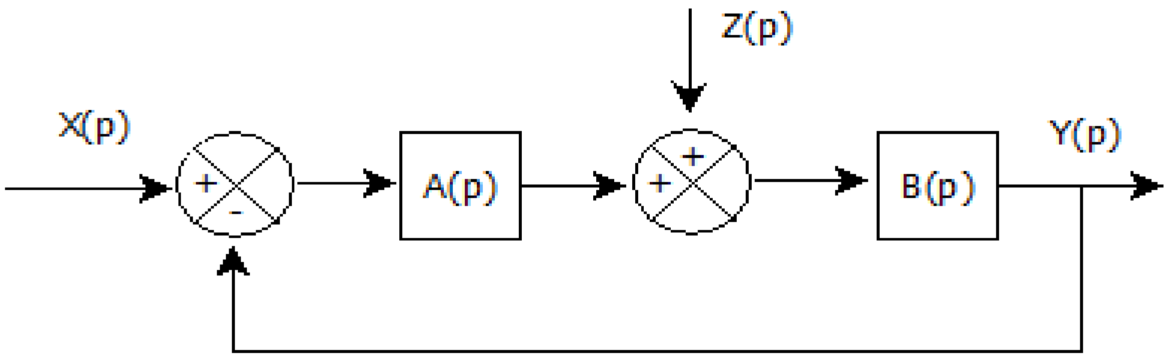
$$Y(p)=\frac{A(p)B(p)}{1+A(p)B(p)}X(p)+\frac{B(p)}{1+A(p)B(p)}Z(p)$$

$$Y(p)=H_1(p)X(p)+H_2(p)Z(p)$$

$$\begin{cases} H_1(p)=\dfrac{A(p)B(p)}{1+A(p)B(p)} \\ H_2(p)=\dfrac{B(p)}{1+A(p)B(p)} \end{cases}$$

Application4: Système à deux entrées

Méthode 2: Simplification de schéma bloc



1. Déterminer $H_1(p) = \left.\frac{Y(p)}{X(p)}\right|_{Z(p)=0}$

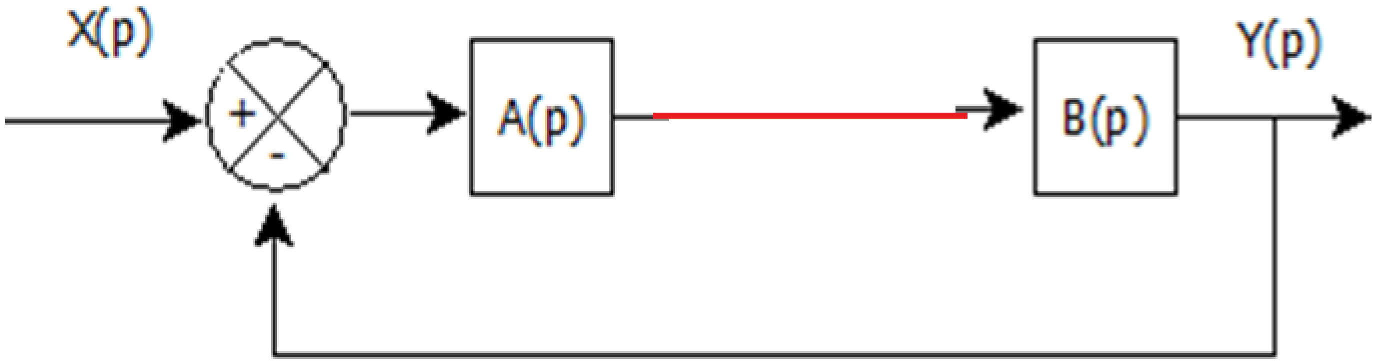
2. Déterminer $H_2(p) = \left.\frac{Y(p)}{Z(p)}\right|_{X(p)=0}$

3. Exprimer $Y(p)$ en fonction de $X(p)$ et $Z(p)$

Outil3 : Simplification des schémas blocs

Application4: Système à deux entrées

1. Déterminer $H_1(p) = \left.\frac{Y(p)}{X(p)}\right|_{Z(p)=0}$

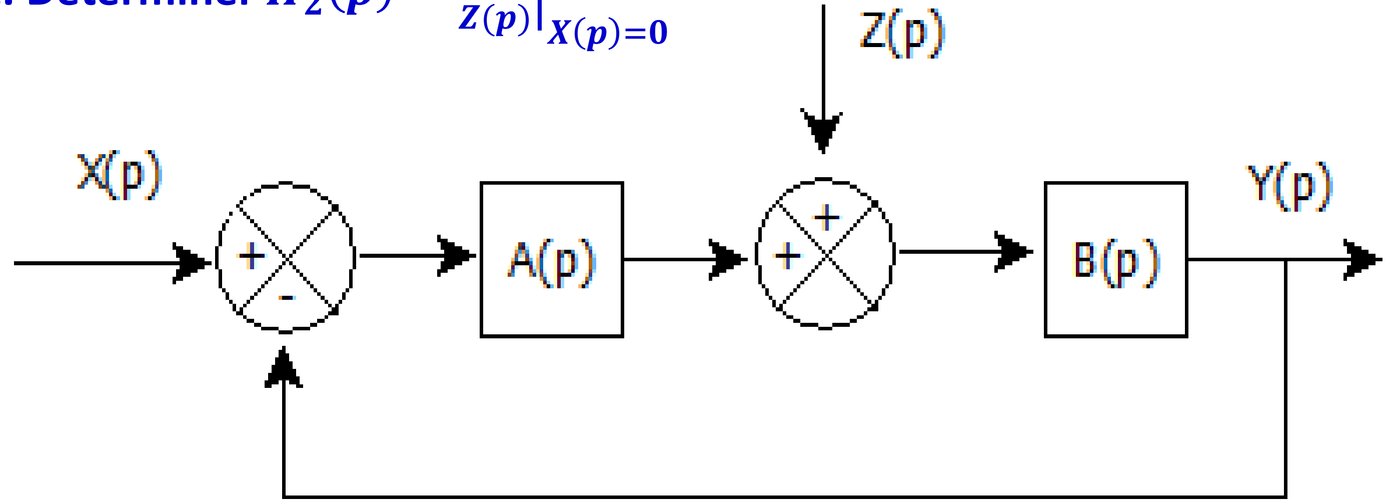


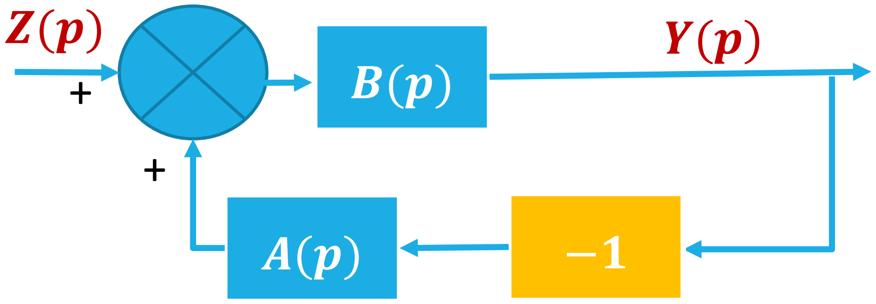
$$H_1(p) = \frac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

Outil3 : Simplification des schémas blocs

Application4: Système à deux entrées

2. Déterminer $H_2(p) = \left.\frac{Y(p)}{Z(p)}\right|_{X(p)=0}$



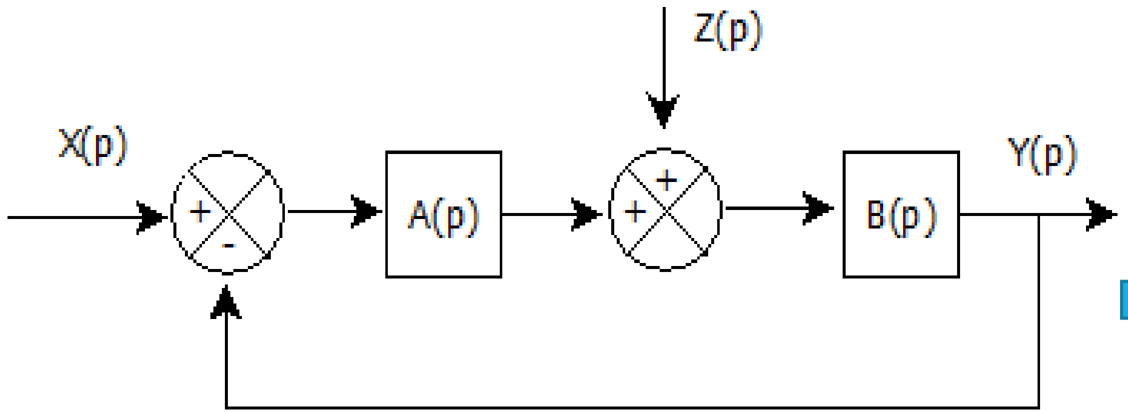


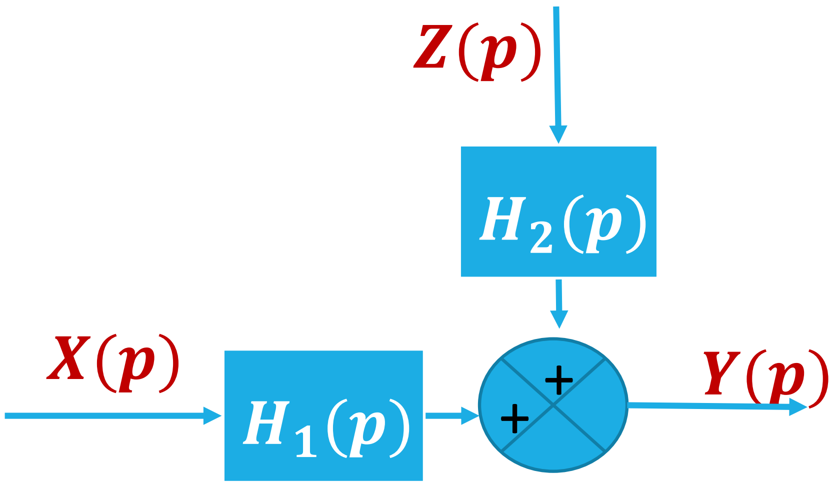
$$H_2(p) = \frac{B(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

Outil3 : Simplification des schémas blocs

Application4: Système à deux entrées

3. Exprimer $Y(p)$ en fonction de $X(p)$ et $Z(p)$





$$Y(p) = H_1(p)X(p) + H_2(p)Z(p)$$

$$\begin{cases} H_1(p) = \dfrac{A(p)B(p)}{1 + A(p)B(p)} \\[2ex] H_2(p) = \dfrac{B(p)}{1 + A(p)B(p)} \end{cases}$$

Outil3 : Simplification des schémas blocs

Application5: Moteur à courant continu

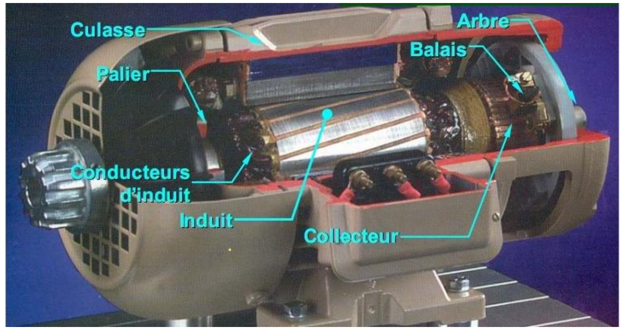
On donne ci-dessous les équations qui régissent le fonctionnement d'un moteur à courant continu à flux constant :

$$e(t)=K_e\omega(t)$$

$$c_m(t)=K_t i(t)$$

$$c_m(t)-K_d\omega(t)-c_r(t)=J\frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$u(t)-e(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}$$



u(t) : tension au borne de l'induit ;
- e(t) : force électromotrice ;
- i(t) : courant dans l'induit ;
- c_m(t) : couple moteur ;
- K_e : constante de force électromotrice ;
- K_t : constante de couple électromagnétique ;
- C_r(t) : couple résistant appliqué sur le moteur ;
- K_d : constante du couple de frottement visqueux ;
- J : moment d'inertie moteur ;
- R : résistance de l'induit ;
- ω(t) : vitesse de rotation moteur ;
- L : inductance de l'induit ;

Outil3 : Simplification des schémas blocs

Application5: Moteur à courant continu

1. Traduire les équations dans le domaine de Laplace sachant que les conditions initiales sont nulles.

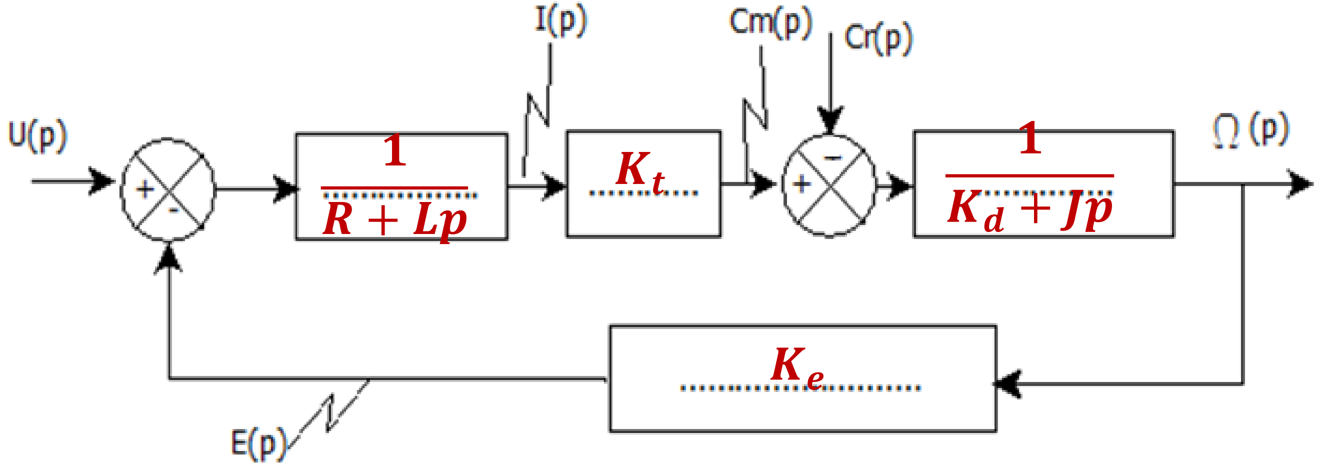
$$e(t)=K_e\omega(t) \Rightarrow E(p) = K_e\Omega(p)$$

$$c_m(t)=K_t i(t) \Rightarrow C_m(p) = K_t I(p)$$

$$c_m(t)-K_d\omega(t)-c_r(t)=J\frac{d\omega(t)}{dt} \Rightarrow C_m(p) - K_d\Omega(p) - C_r(p) = Jp\Omega(p)$$

$$u(t)-e(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow U(p) - E(p) = RI(p) + LpI(p)$$

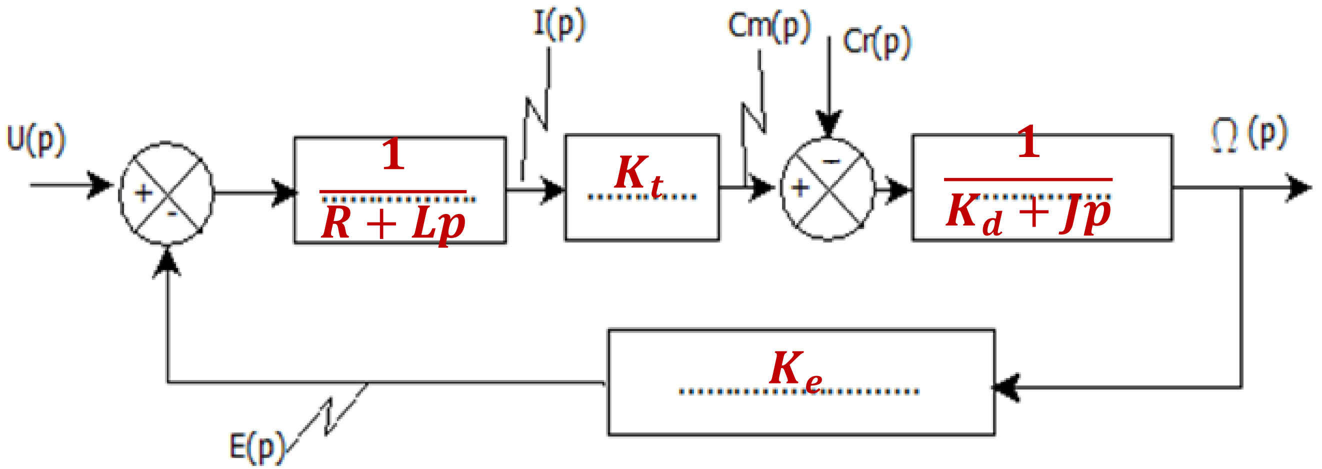
2. Compléter le schéma blocs suivant :



Outil3 : Simplification des schémas blocs

Application5: Moteur à courant continu

3. Exprimer $\Omega(p)$ en fonction de $U(p)$ et $C_r(p)$



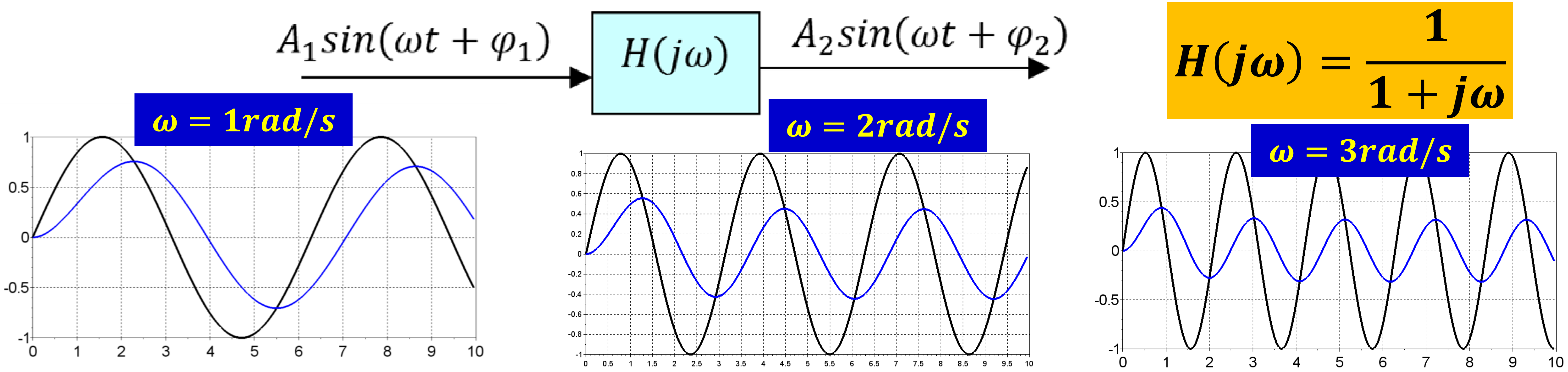
$$\boxed{Y(p) = H_1(p)U(p) + H_2(p)C_r(p)}$$

$$\begin{cases} H_1(p) = \dfrac{K_t}{K_tK_e + (R+Lp)(K_d+Jp)} \\ \\ H_2(p) = \dfrac{-(R+Lp)}{K_tK_e + (R+Lp)(K_d+Jp)} \end{cases}$$

Outil4 : Diagramme de Bode

Pourquoi utiliser un papier semi-log?

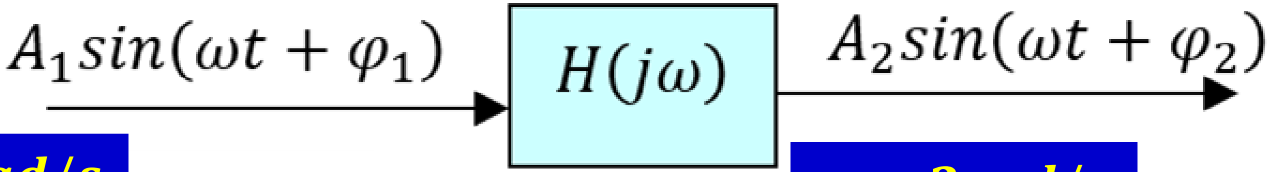
L'étude fréquentielle ou harmonique d'un système consiste à lui appliquer une fonction sinusoïdale ($A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$)et suivre la sortie du système qui est généralement une fonction sinusoïdale ($A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$).



Outil4 : Diagramme de Bode

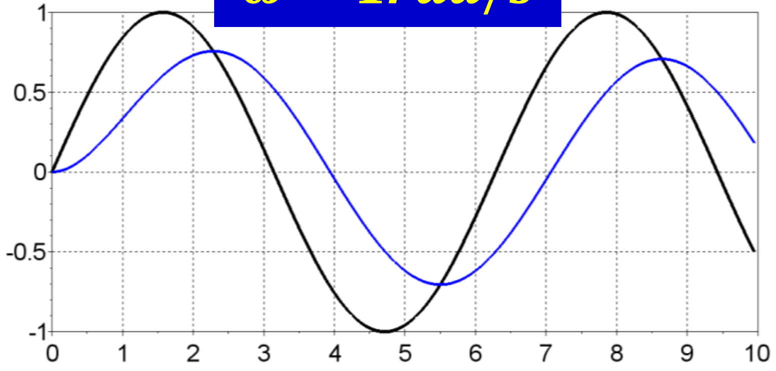
Pourquoi utiliser un papier semi-log?

Les deux informations utiles dans cette étude sont l'amplitude A_2 ou bien le gain $\frac{A_2}{A_1}$ et la phase φ_2 ou bien le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

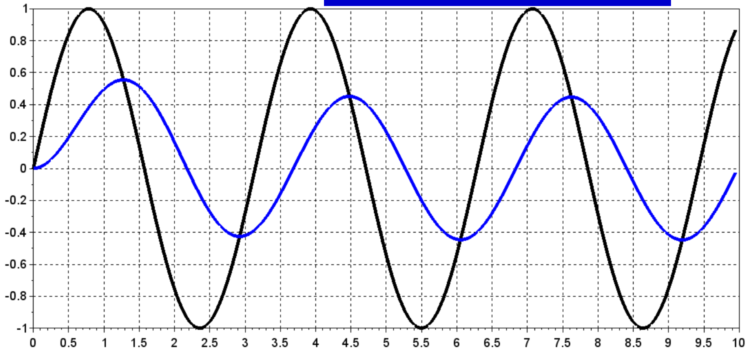


$$\boldsymbol{H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}}$$

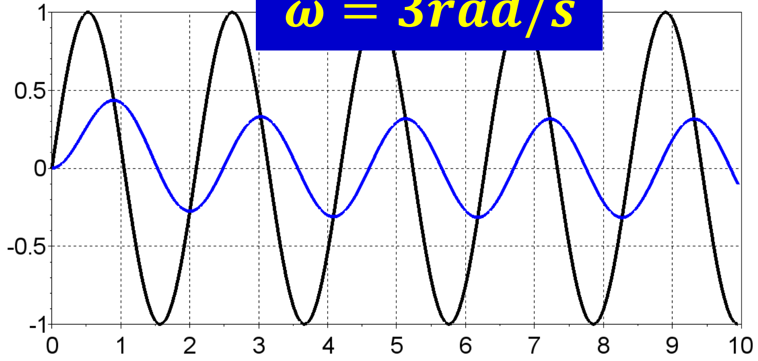
$\boldsymbol{\omega = 1rad/s}$



$\boldsymbol{\omega = 2rad/s}$



$\boldsymbol{\omega = 3rad/s}$



Outil4 : Diagramme de Bode

Pourquoi utiliser un papier semi-log?

Représenter l'évolution du gain ou du déphasage en fonction de la pulsation $\omega = 2\pi f$ ou bien en fonction de la fréquence f en utilisant une échelle décimale est impossible. Pour cela, l'utilisation d'une échelle logarithmique est la solution.

$\boldsymbol{\omega(rad/s)}$	10	100	1000	10000	100000	1000000
$\log \boldsymbol{\omega}$	1	2	3	4	5	6

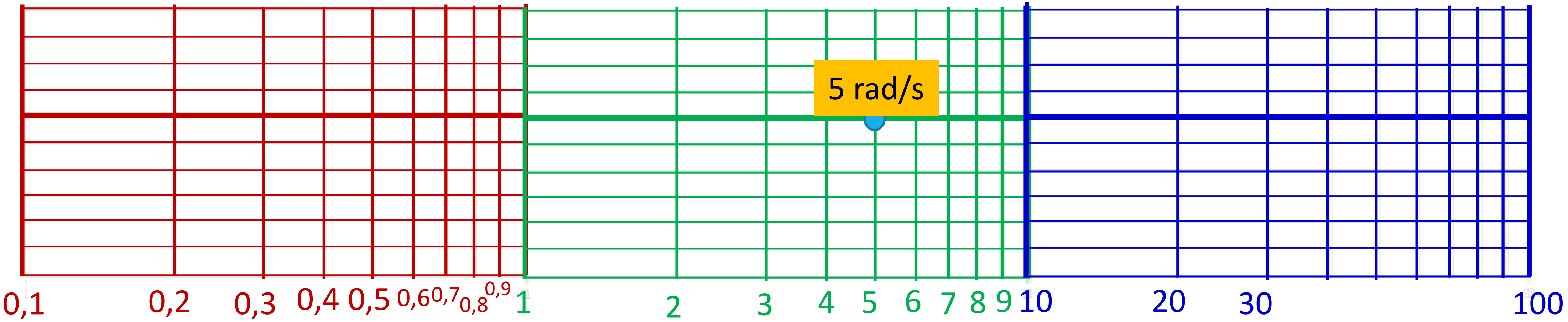
$$\underbrace{\omega \qquad\qquad\qquad 10\omega}_{\text{1 décade}}$$

Outil4 : Diagramme de Bode

Pourquoi utiliser un papier semi-log?

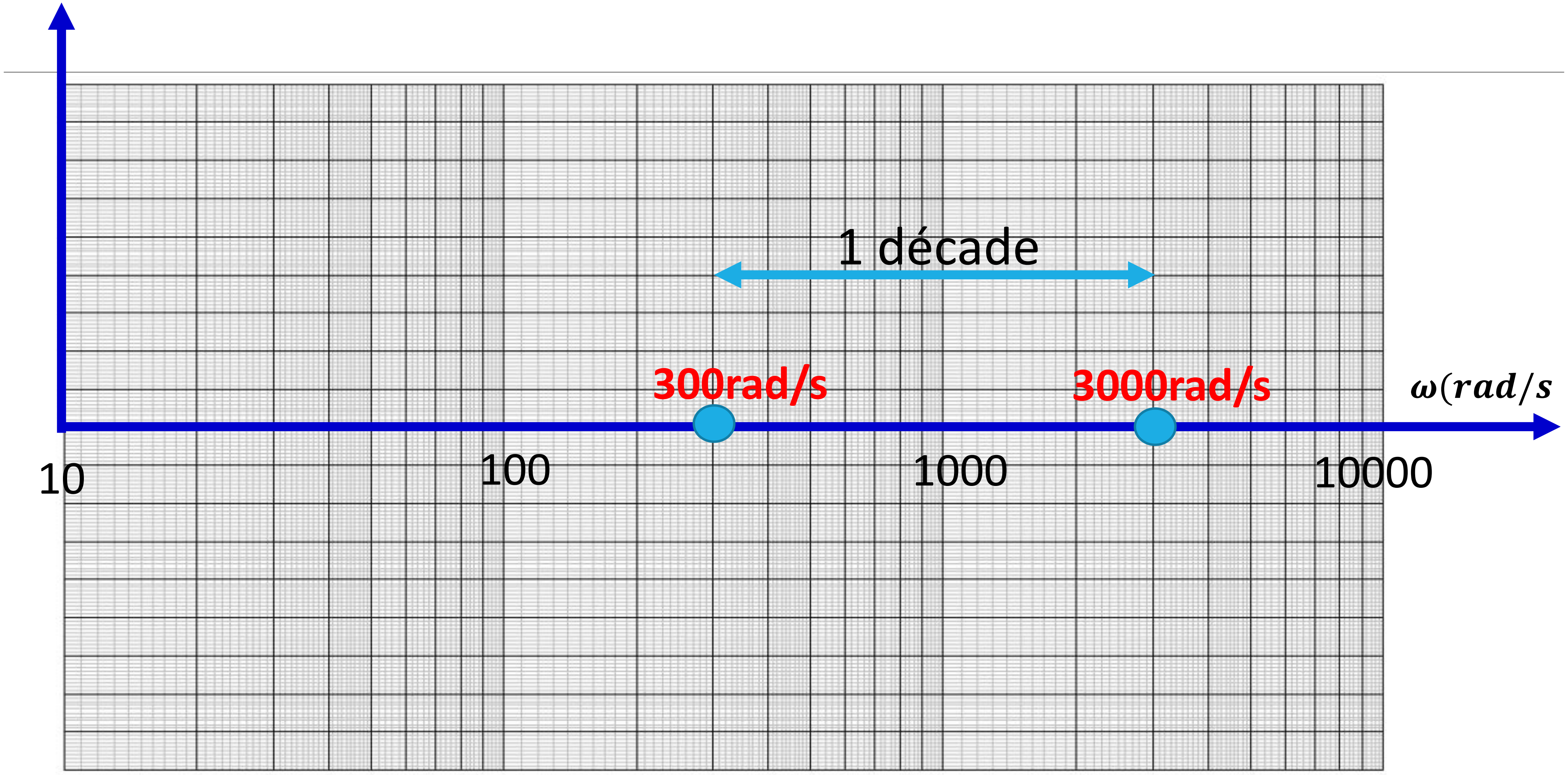
$\omega(rad/s)$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\log \omega$	1	1,3	1,47	1,6	1,69	1,77	1,84	1,9	1,95	2

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{1 décade}}$



Outil4 : Diagramme de Bode

Pourquoi utiliser un papier semi-log?



Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode

a- Le GAIN

Cette représentation est déterminée en représentant le gain $GdB = 20logH(j\omega)$ en fonction de $\log\omega$. Dans le cas où on dispose d'une échelle logarithmique pour l'axe des abscisses, on porte sur cette axe ω *à la place de* $log\omega$.

Méthode classique :

1. *Remplacer dans l'expression de la fonction de transfert* « p » par « $j\omega$ »

2. *Calculer* $H(j\omega)$ *pour déduire* $GdB = 20logH(j\omega)$

3. *Tracer les asymptotes correspondant aux faibles fréquences* $\omega \to 0$ *et hautes fréquences* $\omega \to +\infty$

4. *Tracer la courbe en s'aidant des asymptotes précédemment tracées. Si nécessaire, affiner la représentation en calculant les coordonnées de quelques points.*

Diagramme de Bode

b –La phase

Cette représentation est déterminée en représentant la phase $\varphi = arg\big(H(j\omega)\big)$ en fonction de $\log\omega$

Méthode classique :

1. Remplacer dans l'expression de la fonction de transfert « p » par « $j\omega$ »

2. Calculer $\tan\varphi$ à l'aide de la relation : $\tan(\arg(a+jb)) = \frac{b}{a}$

3. Trouver l'intervalle dans lequel varie φ. Pour cela, on étudie le signe de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$

4. Déterminer les variations de la fonction $\tan\varphi$ en déduire les asymptotes correspondant aux faibles fréquences $(\omega\to 0)$ et hautes fréquences $(\omega\to +\infty)$

5. Tracer la courbe $\varphi = arg\big(H(j\omega)\big)$

Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode

Remarques :

Dans le cas où la fonction de transfert s'écrit sous la forme d'un produit :
$H(j\omega) = A(j\omega)B(j\omega)$, on a alors :
$GdB\big(H(j\omega)\big) = GdB\big(A(j\omega)\big) + GdB(B(j\omega))$ et $\varphi\big(H(j\omega)\big) = \varphi\big(A(j\omega)\big) + \varphi(B(j\omega))$

Dans le cas où la fonction de transfert s'écrit sous la forme d'un produit :
$H(j\omega) = KA(j\omega)$, le gain, est trouvé en représentant celui de $A(j\omega)$et en faisant une translation de $20\log K$. Pour la phase, le diagramme reste inchangé si K est positif.

Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode

Fonctions usuelles :

Effectuer les tracés asymptotiques et réels des fonctions usuelles suivantes :

$$H_1(p) = 1 + \tau p,\ \tau > 0$$
$$H_2(p) = 1 + \tau p,\ \tau < 0$$
$$H_3(p) = \frac{1}{1+\tau p},\ \tau > 0$$
$$H_4(p) = \frac{1}{1+\tau p},\ \tau < 0$$

Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode

$$H_1(j\omega) = 1 + j\tau\omega, \tau > 0$$

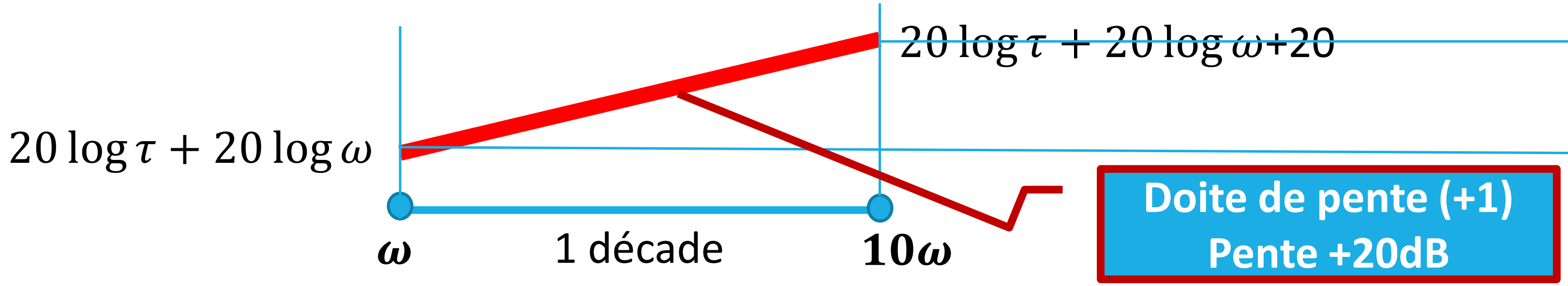
Gain :

$$GdB = 20\log|H_1(j\omega)| = 20\log\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$$

Asymptotes:

$\omega \to 0, GdB \to 0$ **L'axe des abscisses est une asymtote pour les faibles fréquences**

$\omega \to +\infty, GdB \to 20\log\tau + 20\log\omega$ **$\mathbf{GdB = 20\log\tau + 20\log\omega}$ est une asymtote pour les hautes fréquences: c'est une droite de pente +20dB/décade**



Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode $H_1(j\omega) = 1 + j\tau\omega, \tau > 0$

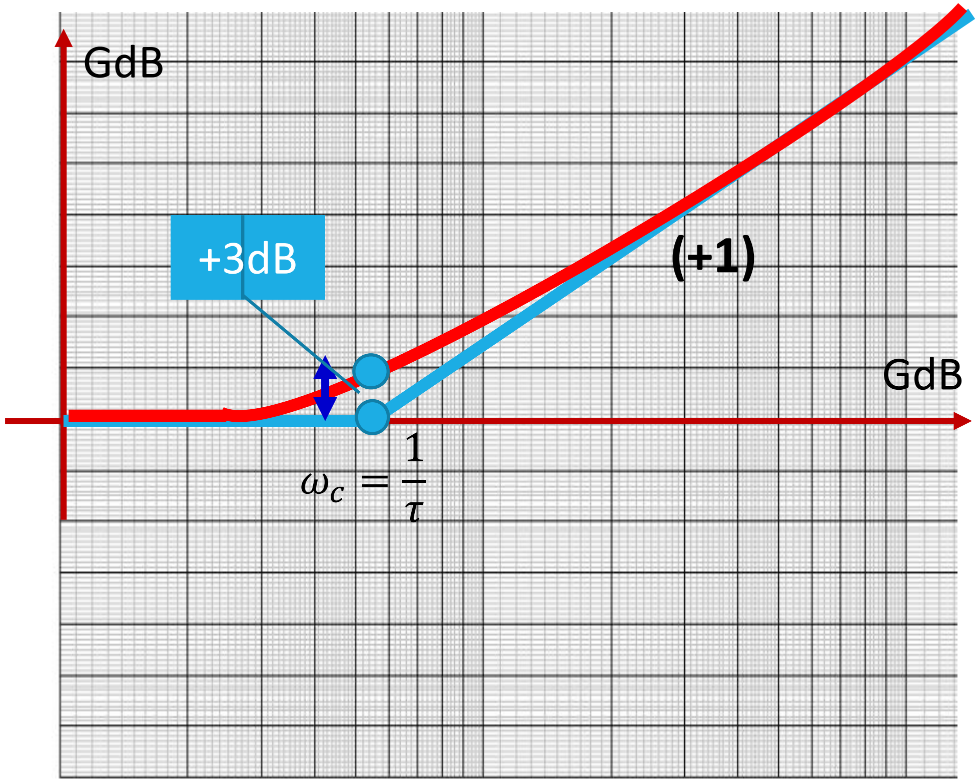
Gain : $GdB = 20\log|H_1(j\omega)| = 20\log\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$

ω_c: Pulsation de coupure des deux asymptotes

$$20\log\tau + 20\log\omega_c = 0$$

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}$$

$$GdB(\omega = \omega_c) = 20\log\sqrt{2} = +3dB$$



Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode

$H_1(j\omega) = 1 + j\tau\omega, \tau > 0$

Phase :

$\varphi = \arg(H_1(j\omega)) = \arctan(\tau\omega) \Rightarrow \tan\varphi = \tau\omega$

Asymptotes:

$\omega \to 0, \tan\varphi \to 0, \varphi \to 0$ **L'axe des abscisses est une asymtote pour les faibles fréquences**

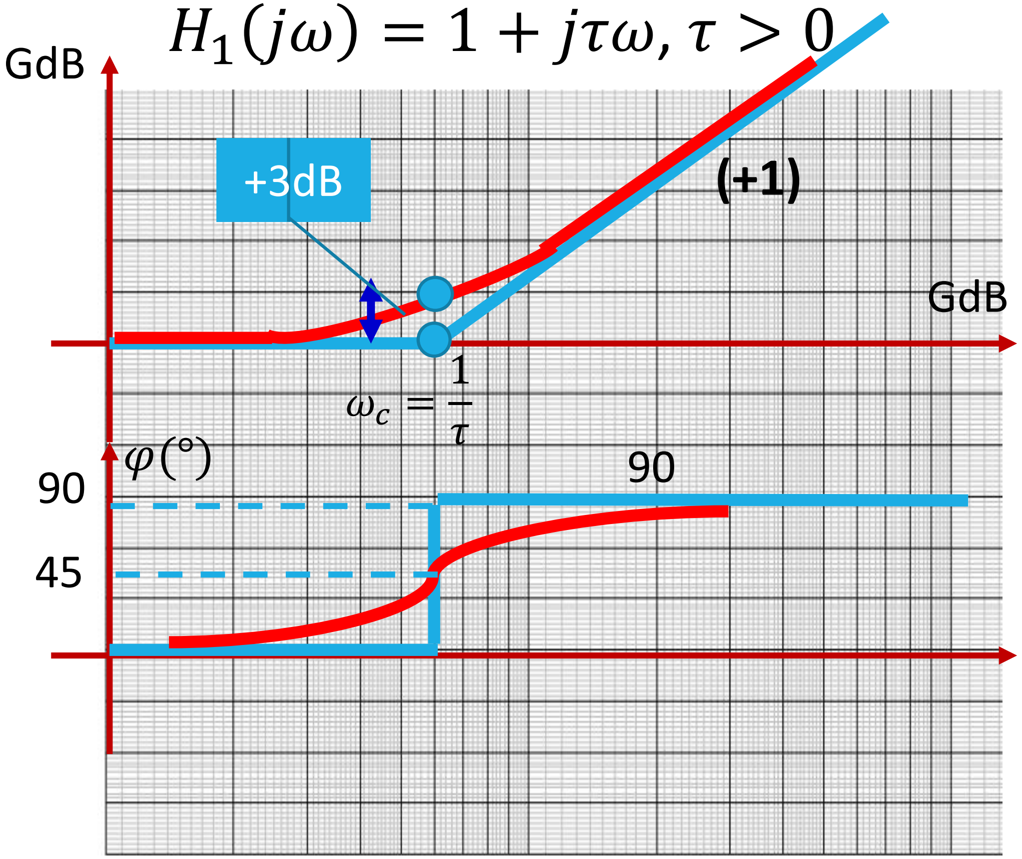
$\omega \to +\infty, \tan\varphi \to +\infty, \varphi \to +90°$ **$\varphi = 90°$ est une asymtote pour les hautes fréquences**

$\varphi(\omega = \omega_c) = 45°$

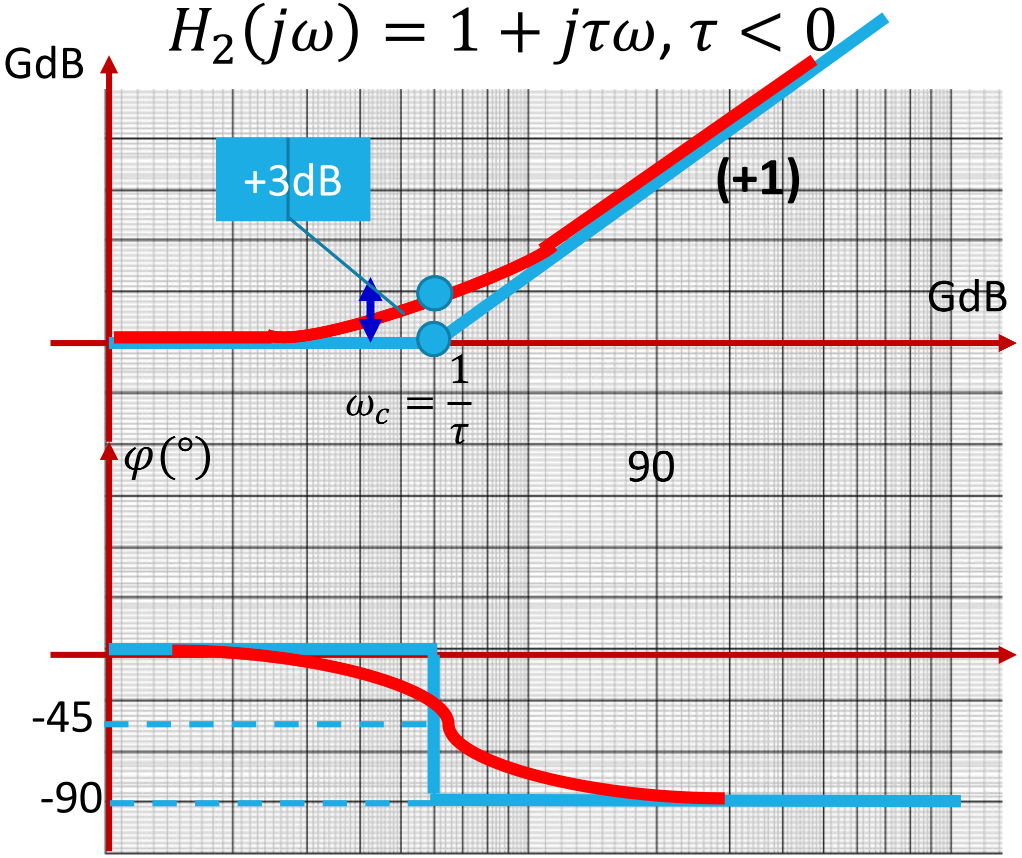
Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode

$H_1(j\omega) = 1 + j\tau\omega, \tau > 0$



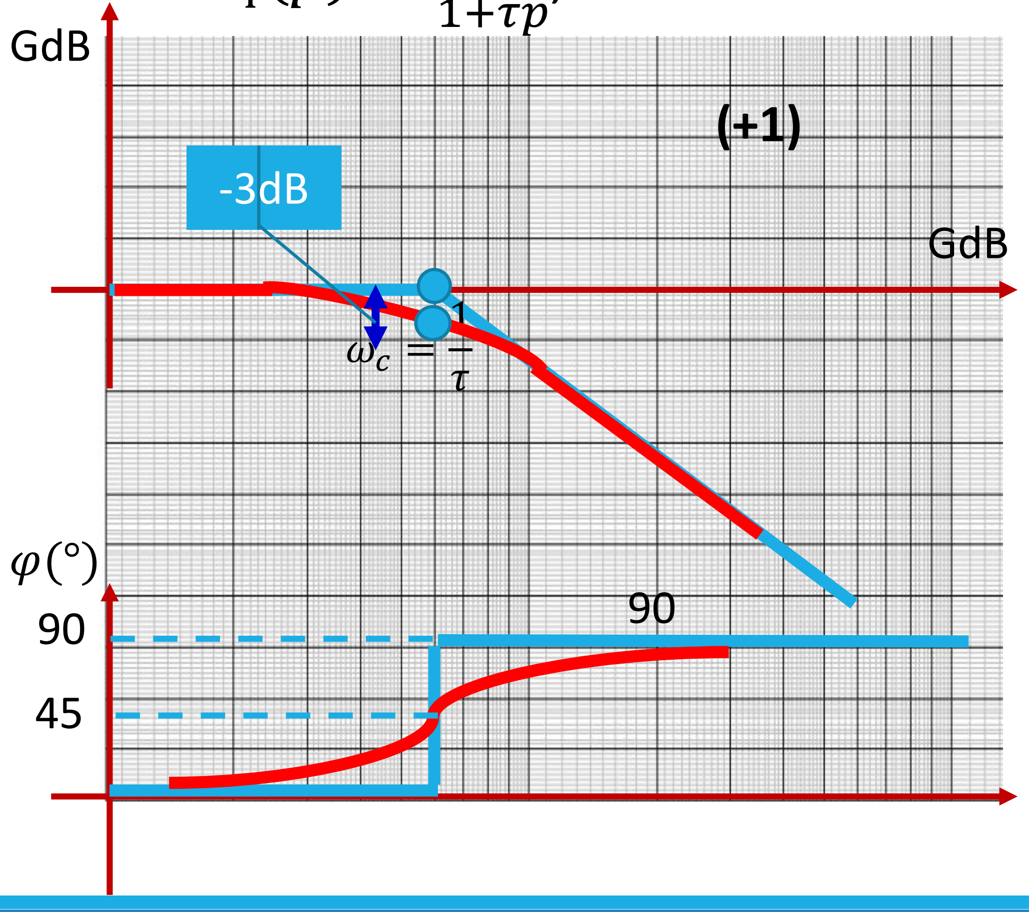
$H_2(j\omega) = 1 + j\tau\omega, \tau < 0$



Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode

$$H_4(p) = \frac{1}{1+\tau p}, \tau < 0$$



$$H_3(p) = \frac{1}{1+\tau p}, \tau > 0$$

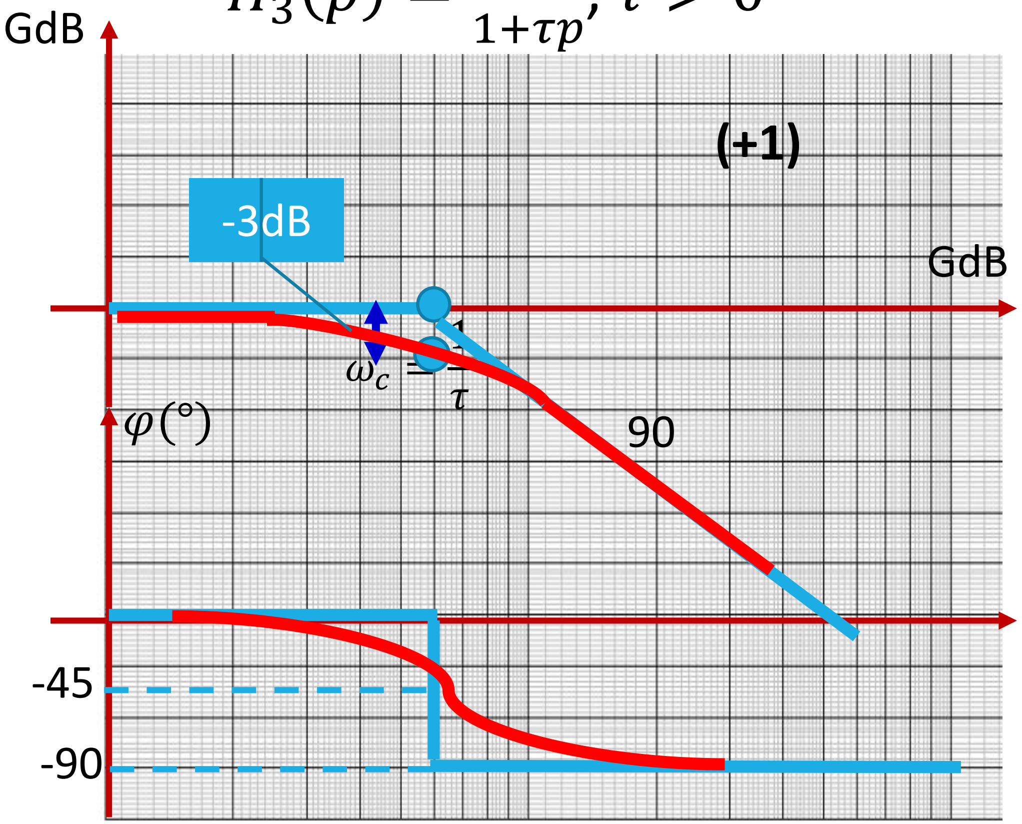


Diagramme de Bode

Méthode pratique pour les tracés asymptotiques de diagramme de Bode : Gain et phase

A partir des fonctions usuelles, les règles suivantes peuvent être soulignées :

Règle 1 :

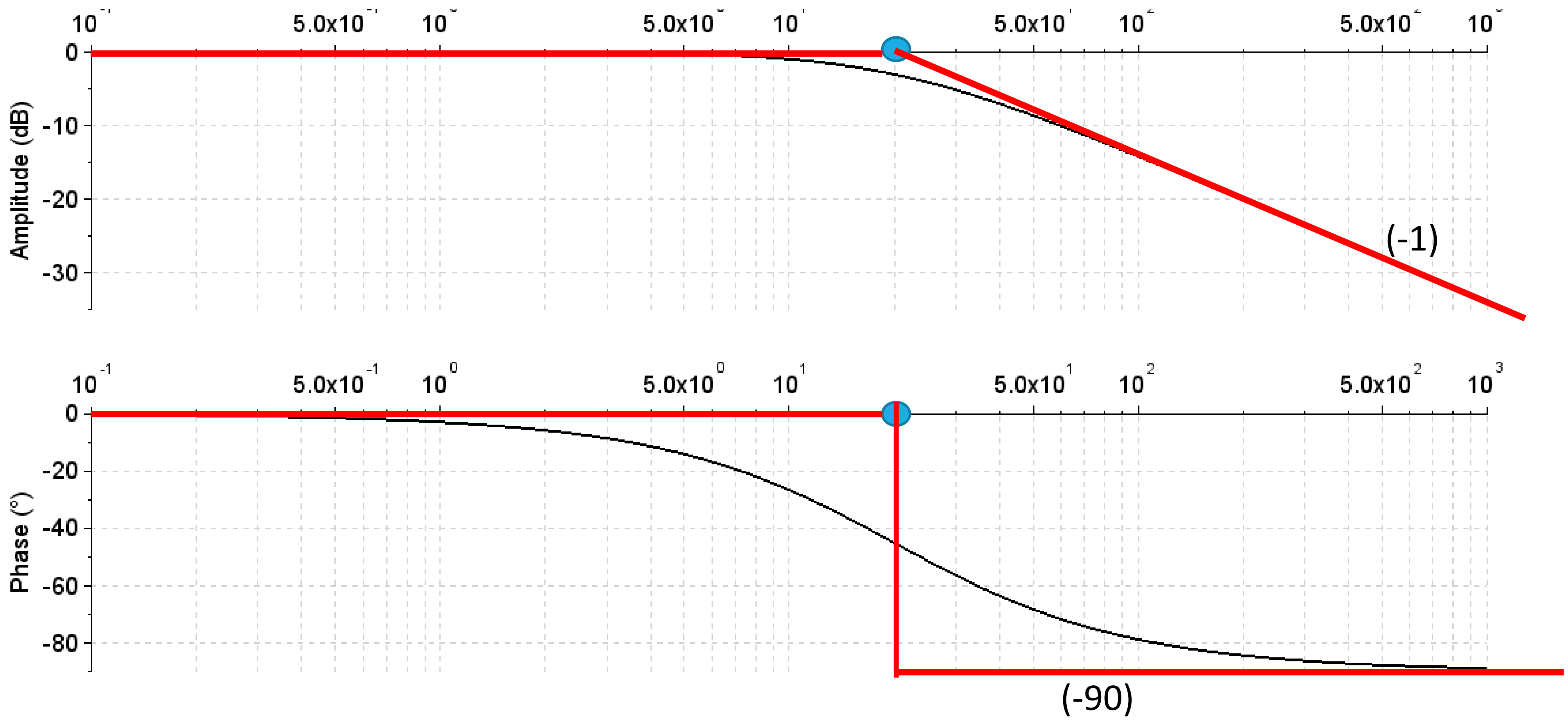
En présence d'un pôle réel soit p_i, quand ω augmente, le tracé asymptotique du gain subit une variation de pente de -20dB par décade dès que l'on rencontre $|p_i|$. En même temps le tracé asymptotique de phase diminue de 90° si le pôle est négatif et augmente de la même quantité dans le cas contraire.

Règle 2 :

En présence d'un zéro réel soit z_i, quand ω augmente, le tracé asymptotique du gain subit une variation de pente de +20dB par décade dès que l'on rencontre $|z_i|$. En même temps le tracé asymptotique de phase augmente de 90° si le zéro est négatif et diminue de la même quantité dans le cas contraire.

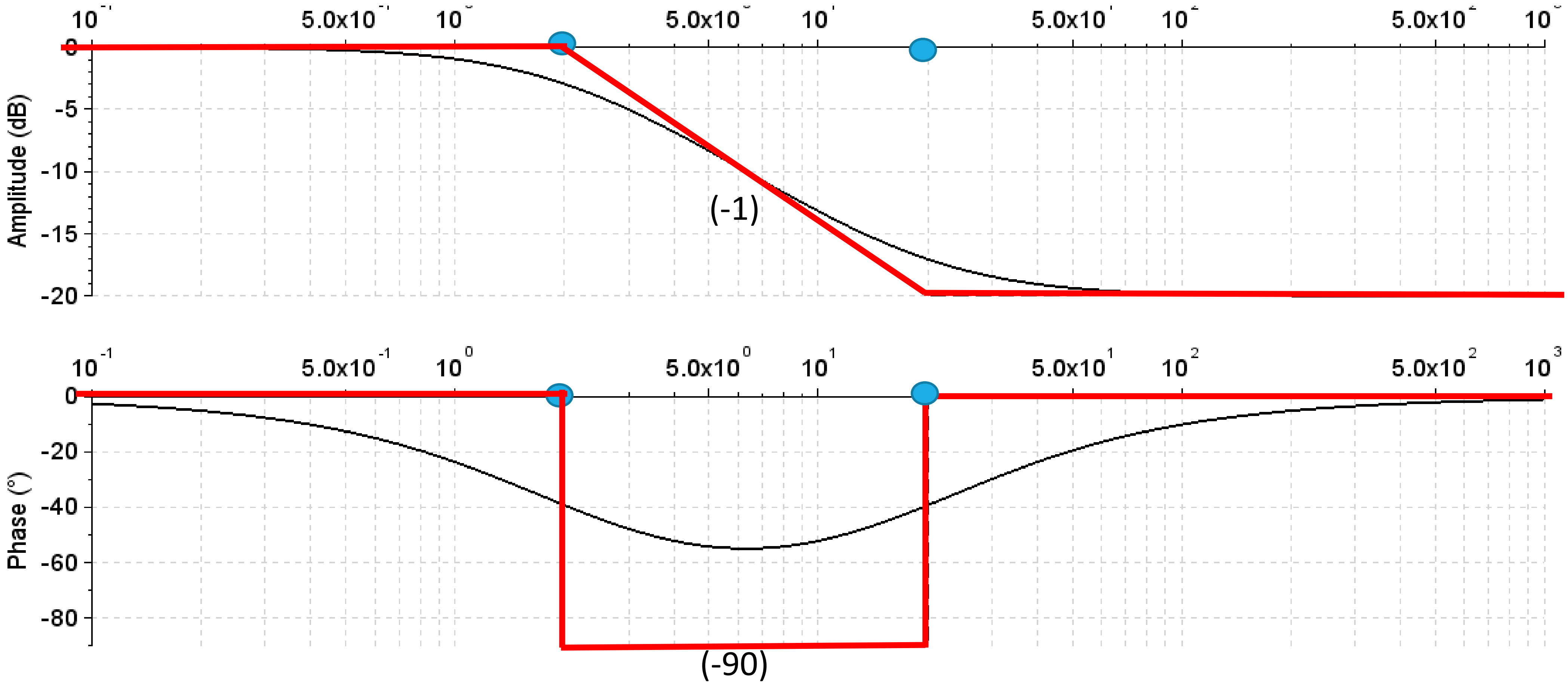
Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode $H(p) = \frac{1}{1+0,05p}$ $\omega_c = 20rad/s$



Outil4 : Diagramme de Bode

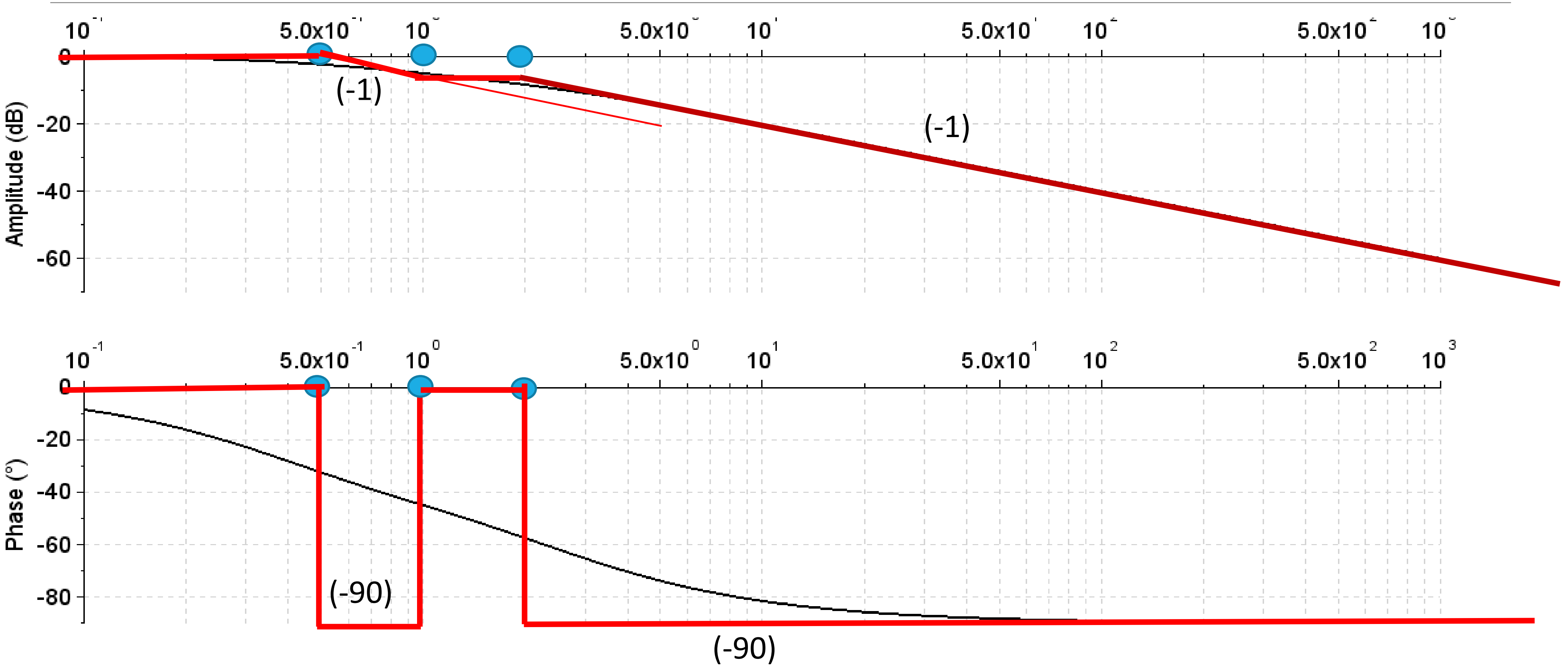
Diagramme de Bode $H(p) = \frac{1+0,05p}{1+0,5p}$ $\omega_{c1} = 2rad/s$ $\omega_{c2} = 20rad/s$



Outil4 : Diagramme de Bode

$\omega_{c1} = 0,5 rad/s$
$\omega_{c2} = 1 rad/s$
$\omega_{c3} = 2 rad/s$

Diagramme de Bode $H(p) = \frac{1+p}{(1+0,5p)(1+2p)}$

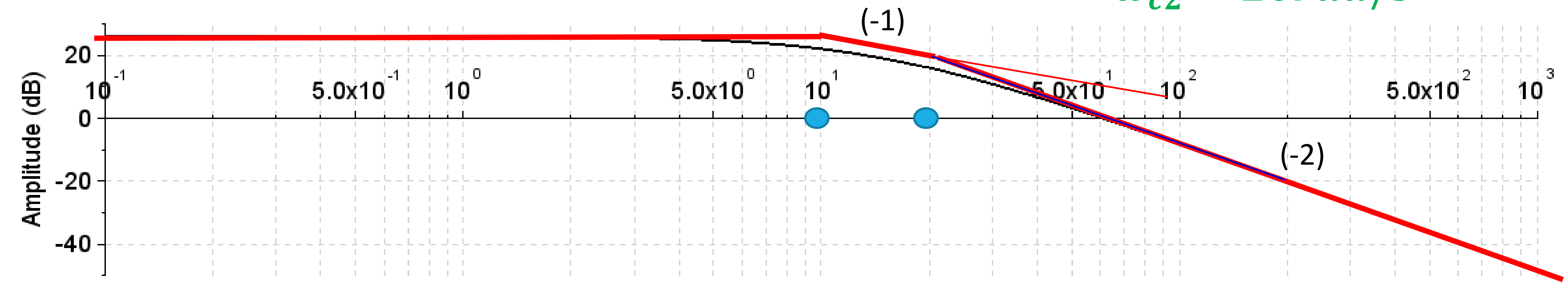


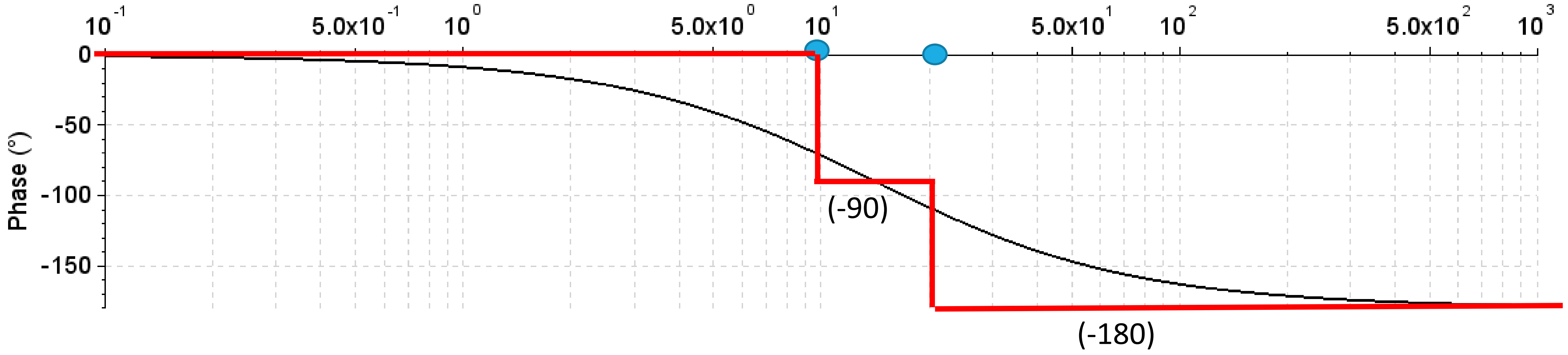
Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode $H(p) = \dfrac{20}{(1+0{,}1p)(1+0{,}05p)}$

$\omega_{c1} = 10 rad/s$

$\omega_{c2} = 20 rad/s$





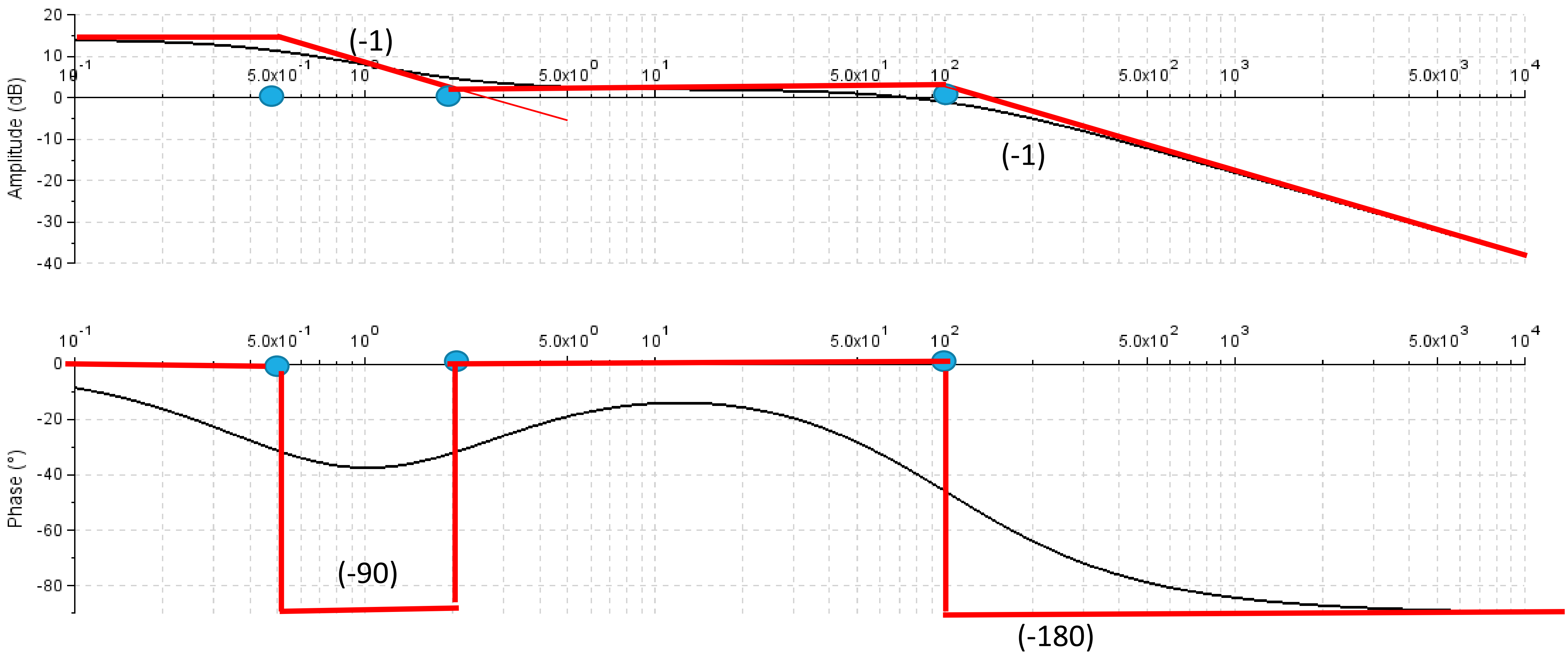
Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode $H(p) = \dfrac{5(1+0{,}5p)}{(1+2p)(1+0{,}01p)}$

$\omega_{c1} = 0{,}5 rad/s$

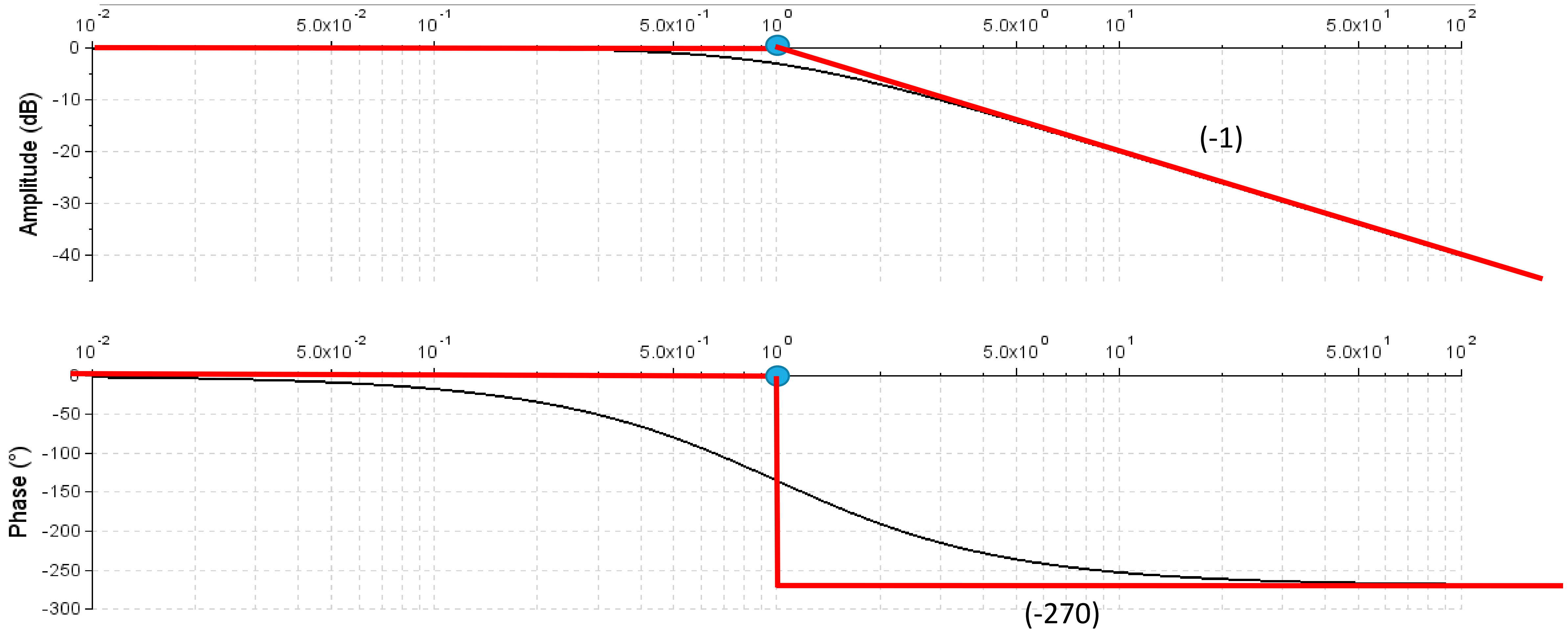
$\omega_{c2} = 2 rad/s$

$\omega_{c3} = 100 rad/s$



Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode $H(p) = \frac{(1-p)}{(1+p)^2}$ $\omega_c = 1 rad/s$



Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode $H(p) = \frac{k}{p(1+\tau p)}$ $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

$$GdB = 20\log|H(j\omega)| = 20\log k - 20\log\omega - 20\log\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$$

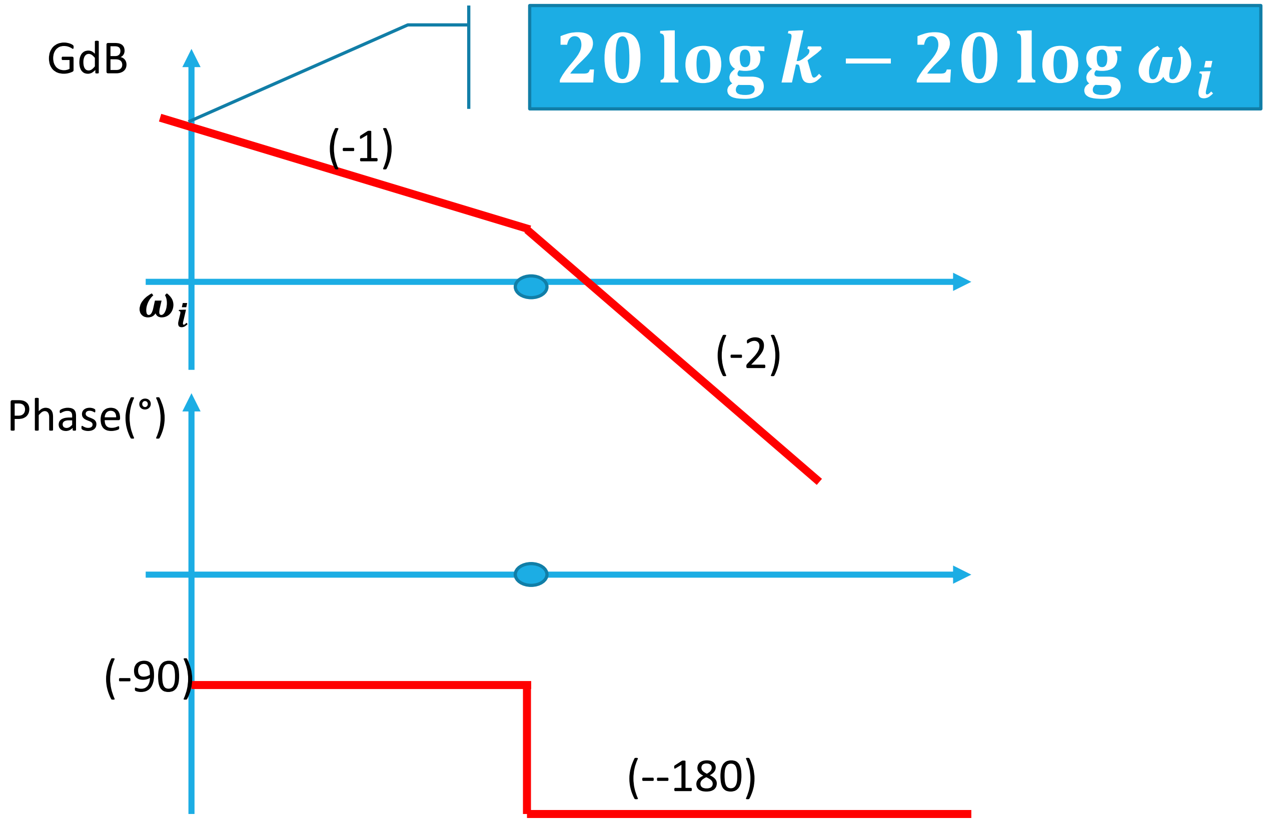
$$\varphi = \arg\left(H(j\omega)\right) = -90° - \arctan(\tau\omega)$$

$\omega \rightarrow 0, GdB \rightarrow 20\log k - 20\log\omega$ **Droite de pente -20dB/décade: Asymptote pour les faibles fréquences**

$\omega \rightarrow 0, \varphi \rightarrow -90°$ **$\varphi = -90°$: Asymptote pour les faibles fréquences**

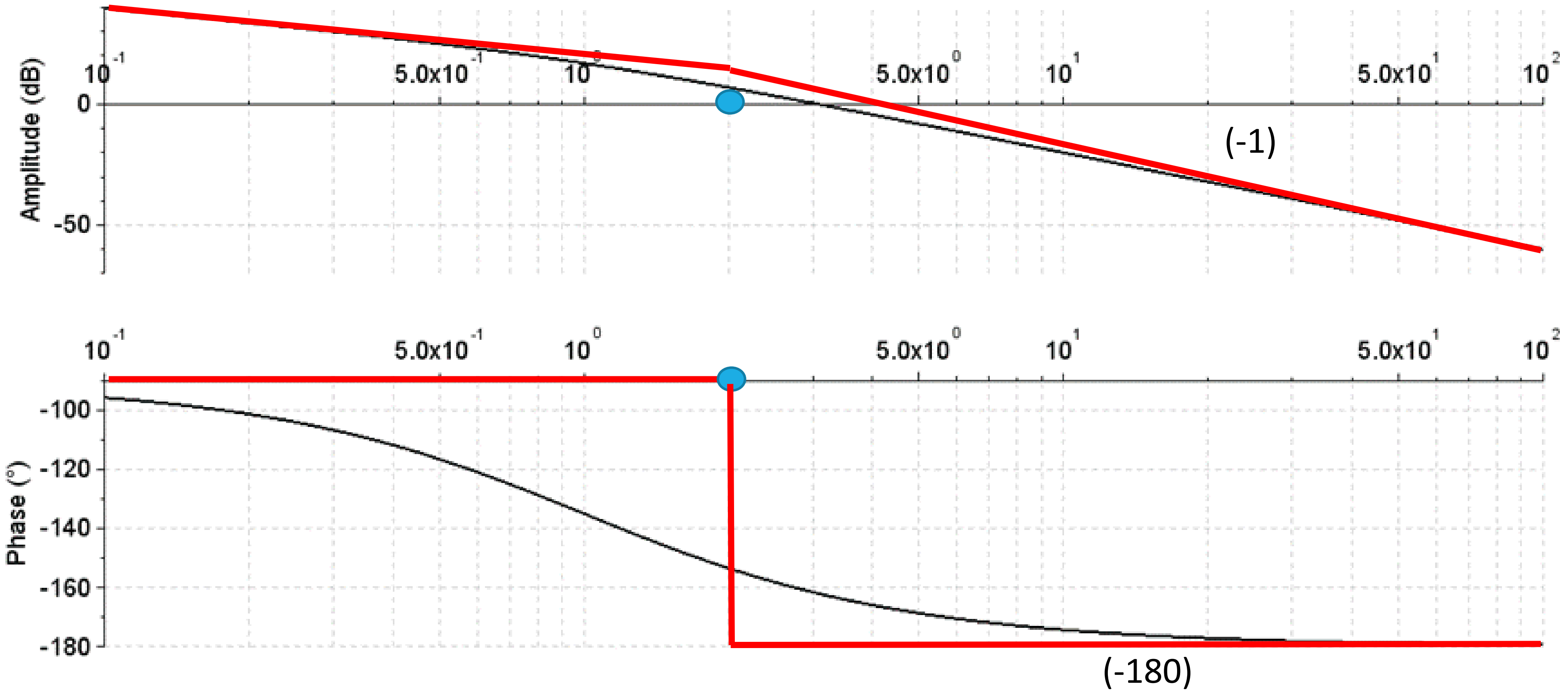
Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode $H(p) = \dfrac{k}{p(1+\tau p)}$ $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$



Outil4 : Diagramme de Bode

Diagramme de Bode $H(p) = \frac{10}{p(1+0{,}5p)}$ $\omega_c = 2rad/s$



Merci pour votre attention