Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Sujet de synthèse: Sujet 1

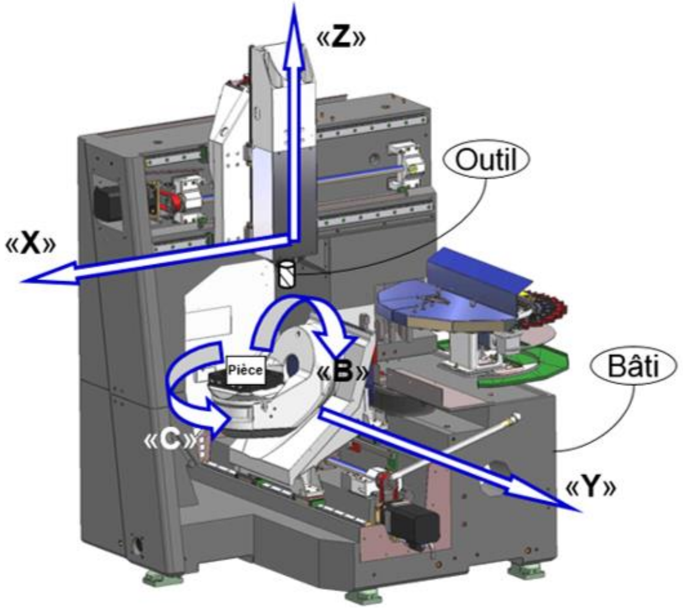
Thèmes abordés :

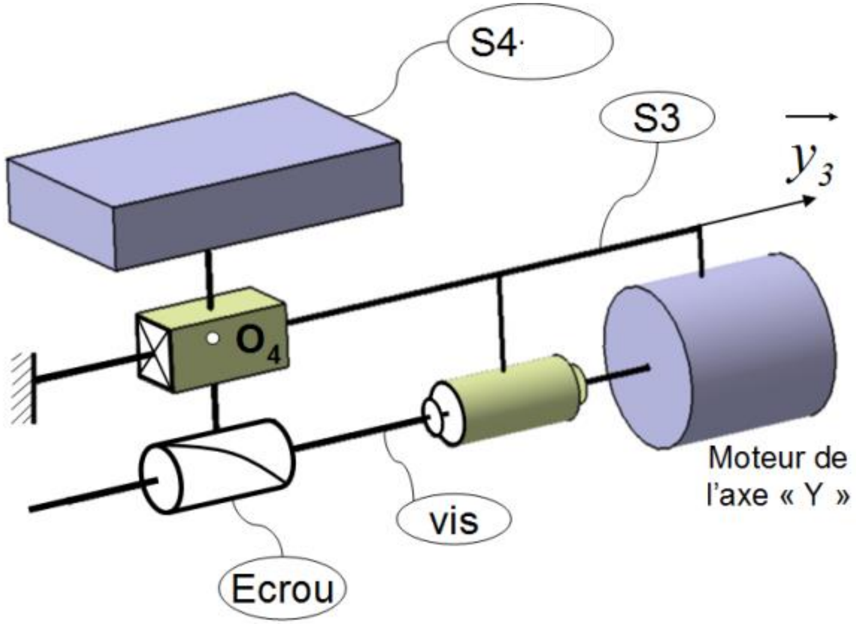
Mécanique : Puissance, énergie cinétique, théorème de l'énergie cinétique…
Automatique : Asservissement, lois de comportement, fonction de transfert, rapidité, précision, stabilité, correction…

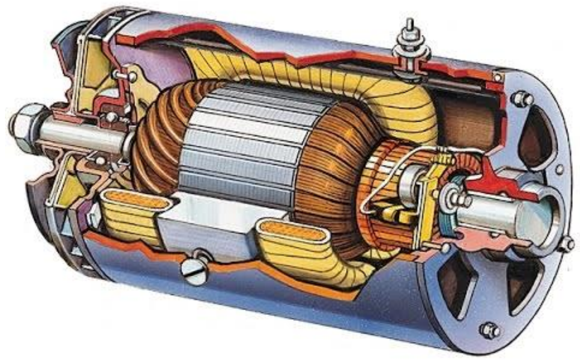
LEFI ABDELLAOUI: INGÉNIEUR DOCTEUR AGRÉGÉ EN GÉNIE MÉCANIQUE

IPEIB 2020

Sujet: Vérification des performances de la motorisation de l’axe Y d’un centre d’usinage 5 axes







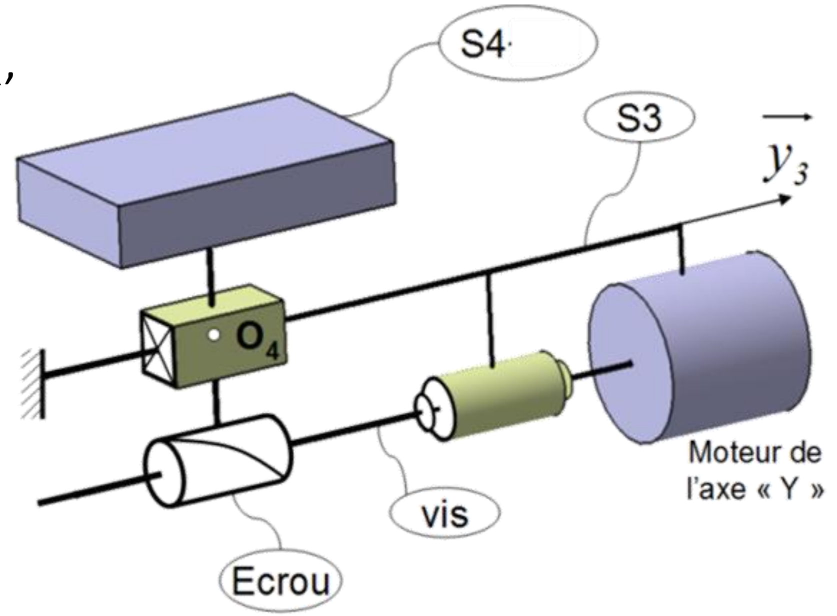
Sujet: Vérification des performances de la motorisation de l'axe Y d'un centre d'usinage 5 axes

- L'axe$(O_4, \vec{y}_3)$ est parfaitement horizontal,
- L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g\vec{z}_3$
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites sauf la liaison glissière d'axe $(O_4, \vec{y}_3)$. On donne :

$$\{F(S_3 \to S_4)\} = {}_{O_4}\begin{Bmatrix} X & L \\ -f_r(t) & M \\ Y & N \end{Bmatrix}_{R_3}$$

- La vitesse de rotation du moteur par rapport au repère galiléen R_3est notée ω_m,
- Le moment d'inertie de la vis, par rapport à son axe de rotation est noté J_v,
- Le moment d'inertie du rotor moteur par rapport à son axe de rotation est noté J_m,
- Le pas de la liaison hélicoïdale est noté "pas".
- Le coulisseau S_4 est de masse m_4 et de centre d'inertie G_4
- Soit le système matériel $\Sigma = \{vis, S_4, rotor\}$
- La vitesse de déplacement du coulisseau S_4 est donnée par $\dot{y}(t) = \frac{pas}{2\pi}\omega_m(t)$
- L'action de la pesanteur est négligée sur le rotor et la vis.
- L'action du stator du moteur sur le rotor est donnée par :

$$\{F(stator \to rotor)\} = {}_{0_3}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ c_m(t)\vec{y}_3 \end{Bmatrix}$$



1. Déterminer l'énergie cinétique du système matériel Σ dans son mouvement par rapport à R_3 en déduire le moment d'inertie équivalente J_{eq} en fonction de m_4, J_v, J_m, pas.

$\Sigma = \{vis, S_4, rotor\}$

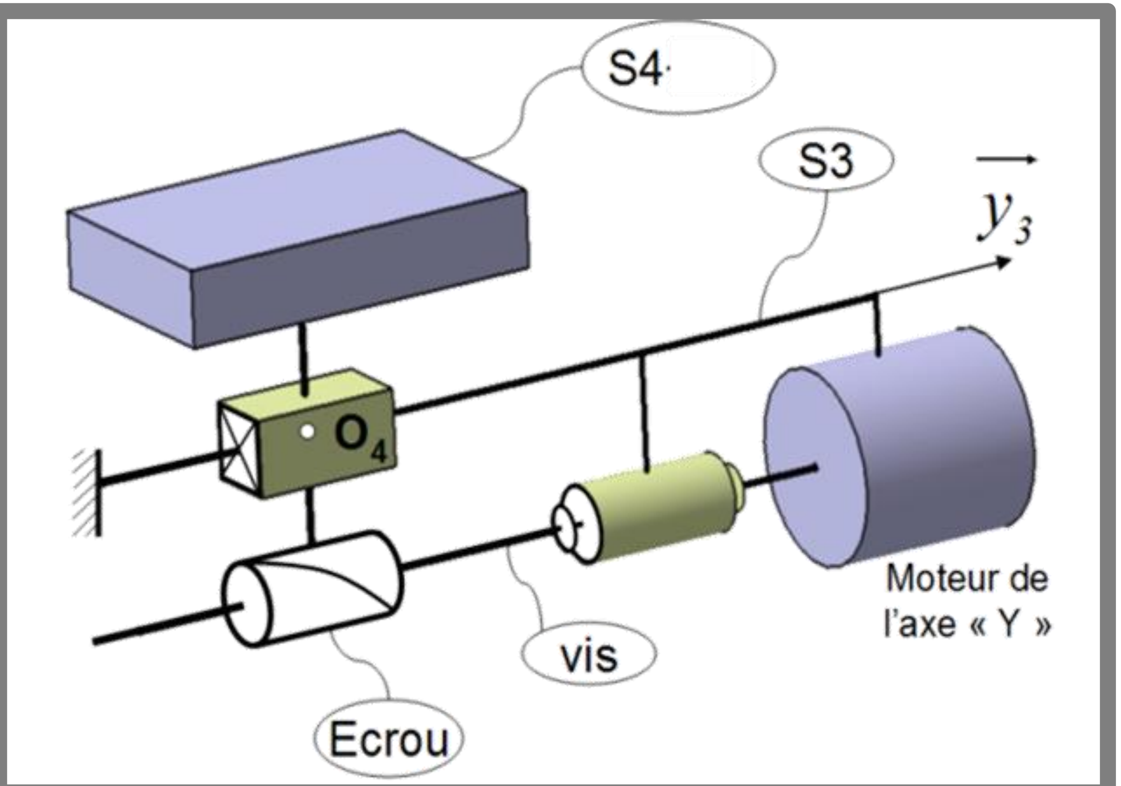
$$E_c(\Sigma/R_3) = E_c(vis/R_3) + E_c(S_4/R_3) + E_c(rotor/R_3)$$

- $E_c(vis/R_0) = \frac{1}{2} J_v \, \omega_m^2$
- $E_c(rotor/R_0) = \frac{1}{2} J_m \, \omega_m^2$
- $E_c(S_4/R_0) = \frac{1}{2} m_4 \, \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m_4 \frac{pas^2}{4\pi^2} \omega_m^2$

$$E_c(\Sigma/R_3) = \frac{1}{2}\left(J_v + J_m + m_4 \frac{pas^2}{4\pi^2}\right)\omega_m^2$$

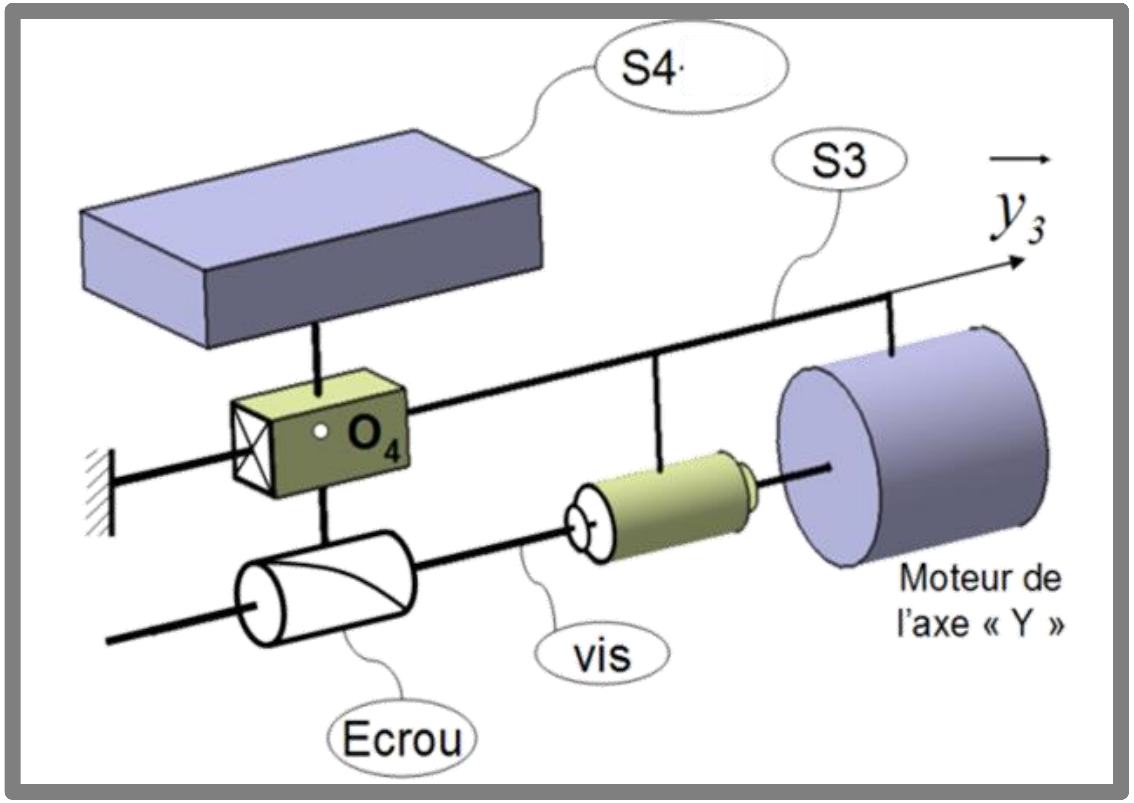
$$= \frac{1}{2} J_{eq} \, \omega_m^2 \quad \text{avec}$$

$$J_{eq} = J_v + J_m + m_4 \frac{pas^2}{4\pi^2}$$



2. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques intérieures à Σ.

$P(\text{int à } \Sigma) = P(\text{vis} \leftrightarrow S_4) = 0$ car la liaison hélicoïdale est supposée parfaite.

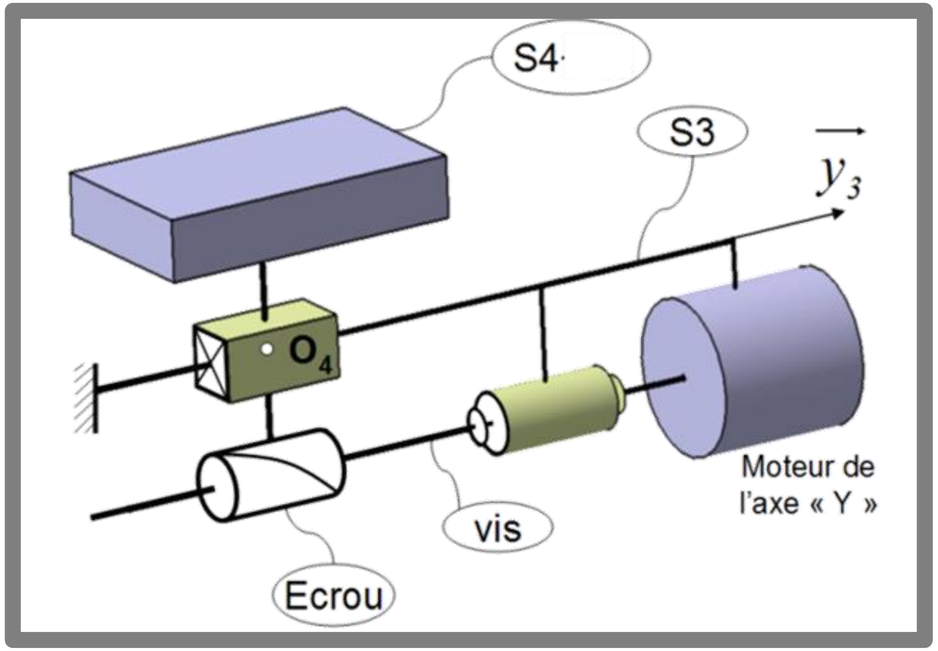


3. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures à Σ.

3°- $P(\bar{\Sigma} \to \Sigma / R_3) = P(\text{stator} \to \text{rotor} / R_3) + P(S_3 \to \text{vis} / R_3) + P(S_3 \to S_4 / R_3) + P(\vec{g} \to S_4 / R_3)$.

- $P(\text{stator} \to \text{rotor} / R_3) = \left\{ F(\text{stator} \to \text{rotor}) \right\}_{O_3} \otimes \left\{ V(\text{rot}/R_3) \right\}_{O_3}$

$$= \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m(t)\,\vec{y}_3 \end{matrix} \right\}_{O_3} \otimes \left\{ \begin{matrix} \omega_m(t)\,\vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{O_3} = C_m(t)\,\omega_m(t)$$

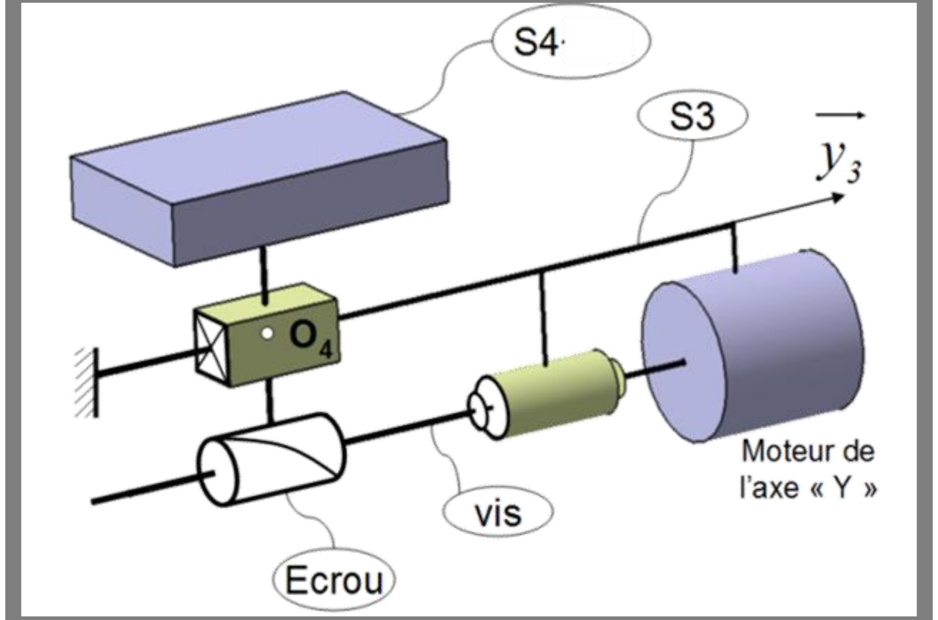


3. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures à Σ.

- $P(\vec{g} \to S_4 | R_3) = 0$
- $P(S_3 \to Vis | R_3) = 0$ Car liaison parfaite
- $P(S_3 \to S_4 | R_3) = \{F(S_3 \to S_4)\}_{O_4} \otimes \{\mathcal{V}(S_4 | R_3)\}_{O_4}$

$$= \left\{ \begin{matrix} X & L \\ -f_r(t) & M \\ Y & N \end{matrix} \right\}_{O_4, R_3} \otimes \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{y}(t) \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{O_4, R_3}$$

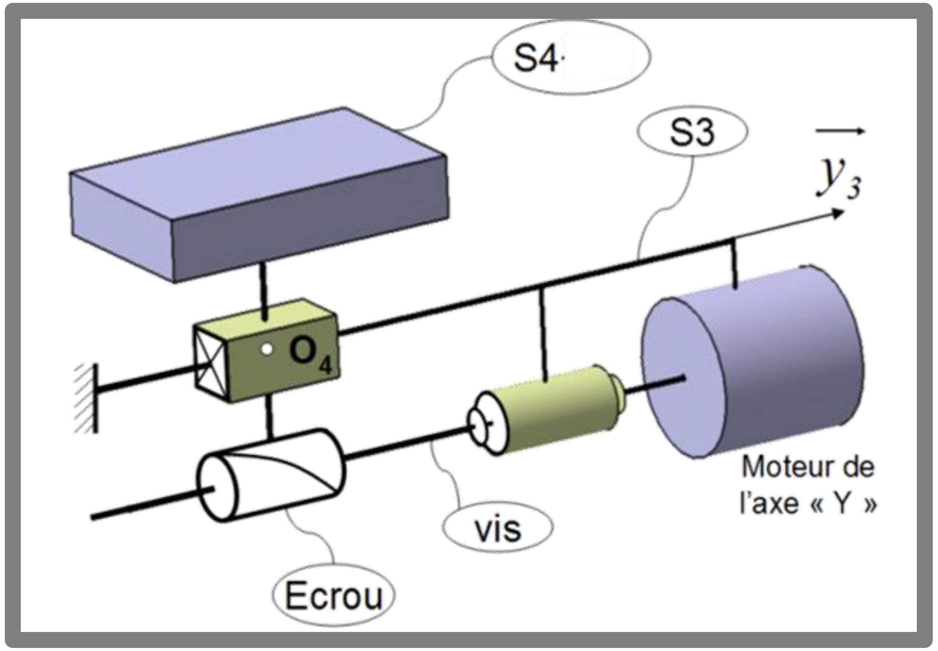
$$= -f_r(t)\,\dot{y}(t) = -f_r(t)\,\frac{pas}{2\pi}\,\omega_m(t)$$



3. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures à Σ.

D'où :

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_3) = \left(C_m(t) - \frac{pas}{2\pi} f_r(t)\right)\omega_m(t)$$

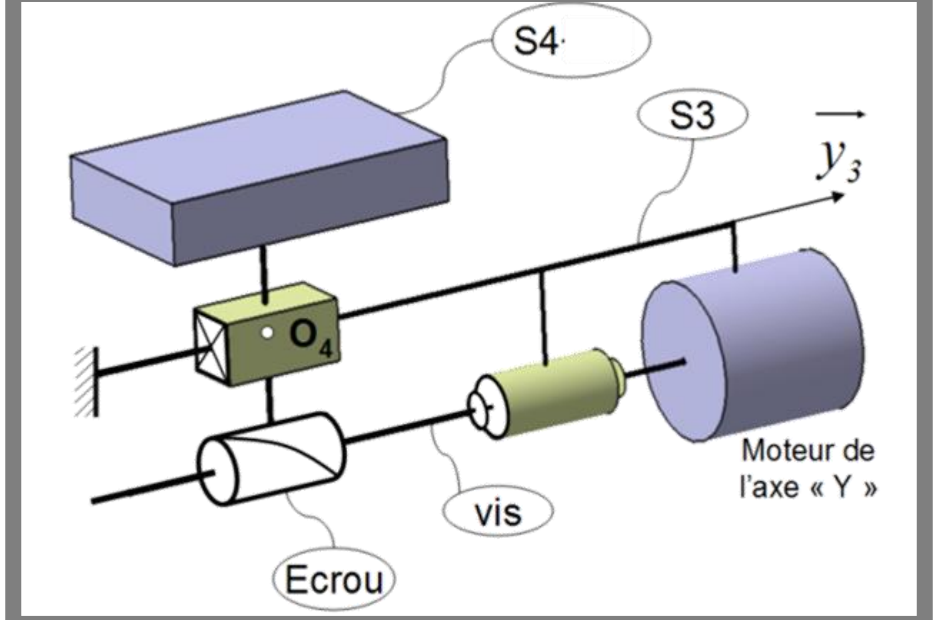


4. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique sur le système matériel Σ, déterminer l'expression du couple moteur $c_m(t)$.

$$\frac{d}{dt}E_c(\Sigma/R_3) = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_3) + P(\text{int à } \Sigma)$$

$$J_{eq}\,\cancel{\omega_m(t)}\,\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \left(C_m(t) - \frac{pas}{2\pi}f_r(t)\right)\cancel{\omega_m(t)}$$

$$C_m(t) = J_{eq}\,\frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{pas}{2\pi}f_r(t)$$



5. On donne dans la suite la loi de commande du moteur, déterminer le couple moteur pour les trois phases de travail.

* $[0, T_1[$: $\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{\omega_{max}}{T_1}$

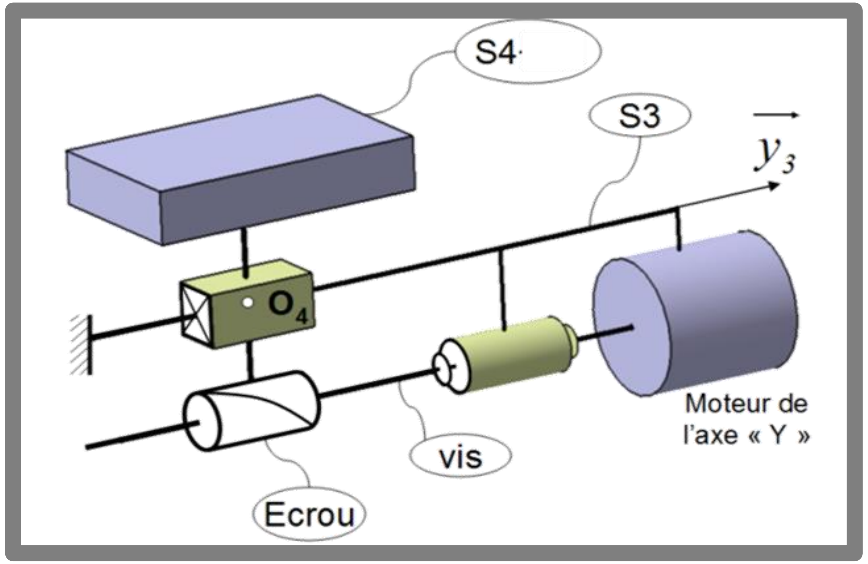
$$\Rightarrow C_m(t) = J_{eq}\frac{\omega_{max}}{T_1} + \frac{pas}{2\pi} f_r(t)$$

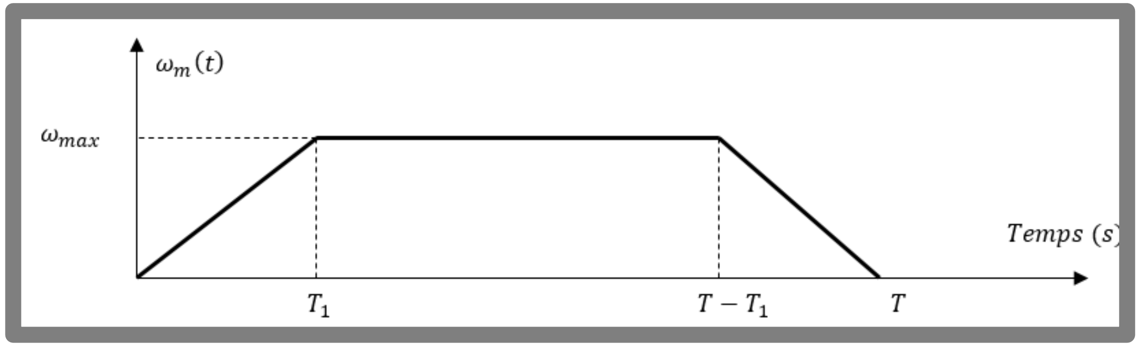
* $[T_1, T-T_1[$: $\frac{d\omega_m(t)}{dt} = 0$

$$\Rightarrow C_m(t) = \frac{pas}{2\pi} f_r(t)$$

* $]T-T_1, T]$: $\frac{d\omega_m(t)}{dt} = -\frac{\omega_{max}}{T_1}$

$$\Rightarrow C_m(t) = -J_{eq}\frac{\omega_{max}}{T_1} + \frac{pas}{2\pi} f_r(t)$$





6. Traduire les équations qui régissent le fonctionnement du moteur dans le domaine de Laplace sachant que les conditions initiales sont supposées nulles.

$$u(t) = e(t) + Ri(t)$$

$$e(t) = K_e \omega_m(t)$$

$$c_m(t) = K_t i(t)$$

$$c_m(t) = J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{pas}{2\pi} f_r(t)$$

$$U(p) - E(p) = R\, I(p)$$

$$E(p) = K_e\, \Omega_m(p)$$

$$C_m(t) = K_t\, I(p)$$

$$C_m(p) = J_{eq}\, p\, \Omega_m(p) + \frac{pas}{2\pi} F_r(p)$$

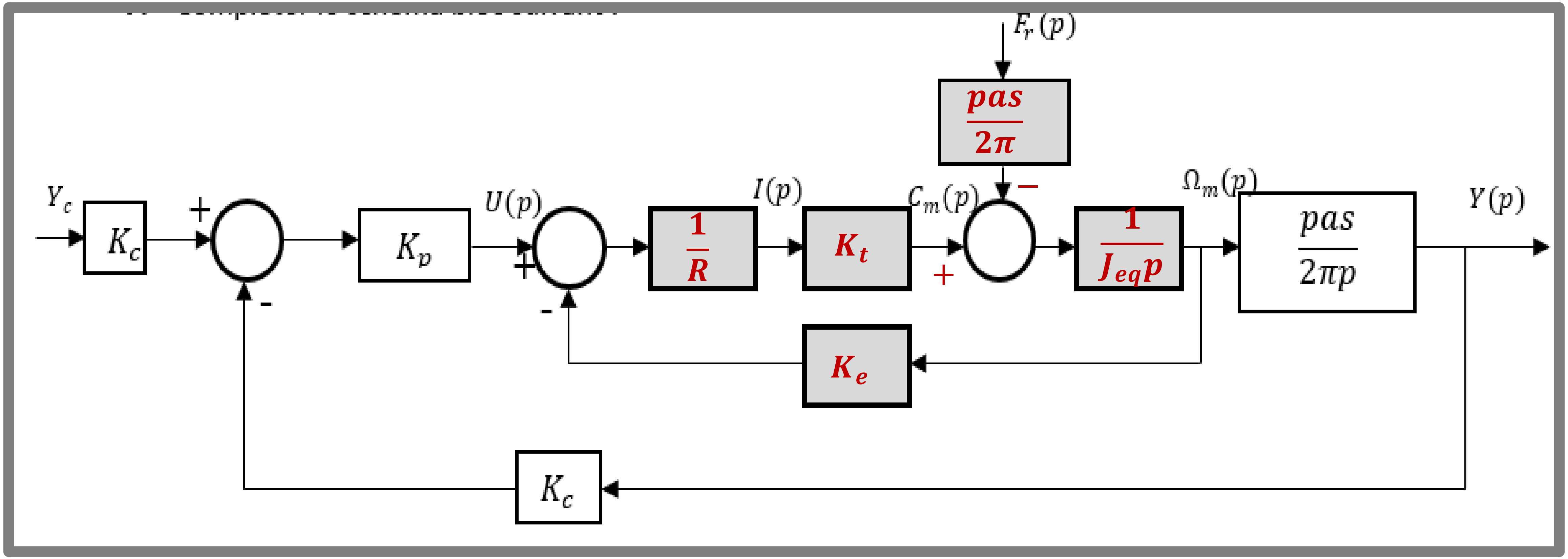
7. Compléter le schéma bloc suivant :

$$U(p) - E(p) = R\,I(p)$$

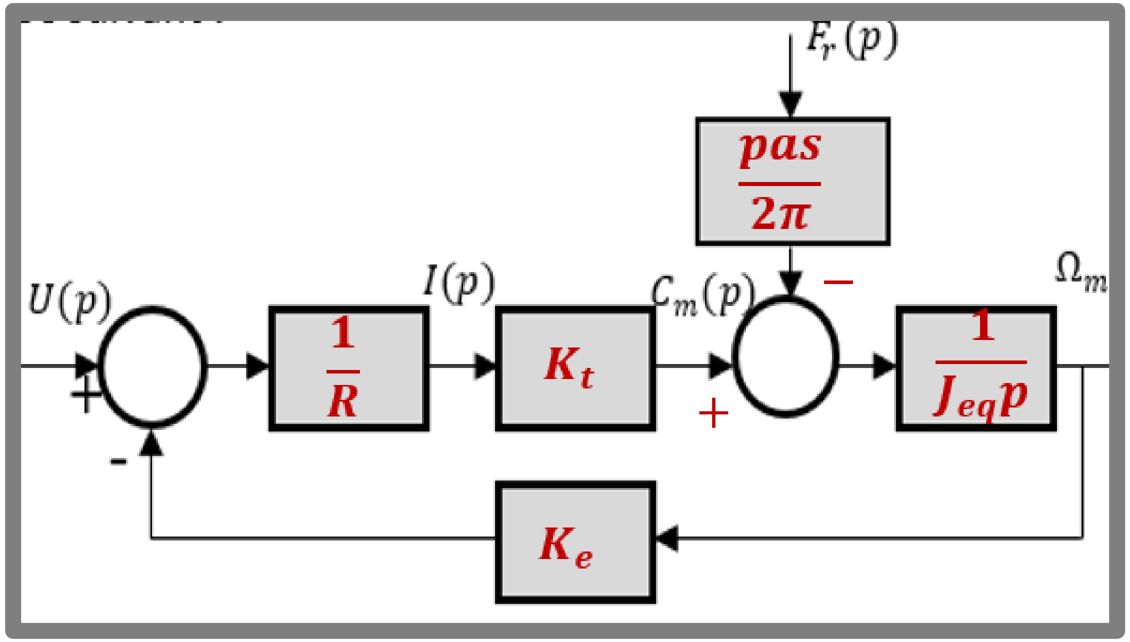
$$E(p) = K_e\,\Omega_m(p)$$

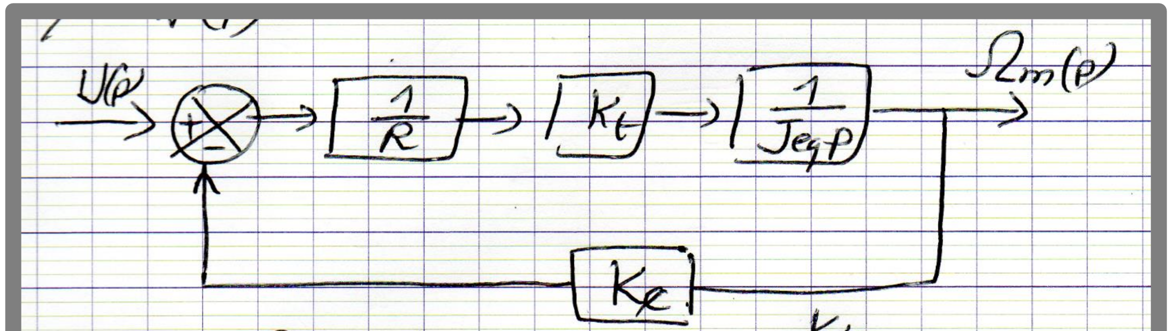
$$C_m(t) = K_t\,I(p)$$

$$C_m(p) = J_{eq}\,p\,\Omega_m(p) + \frac{pas}{2\pi}\,F_r(p)$$



8. Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ pour $F_r(p) = 0$

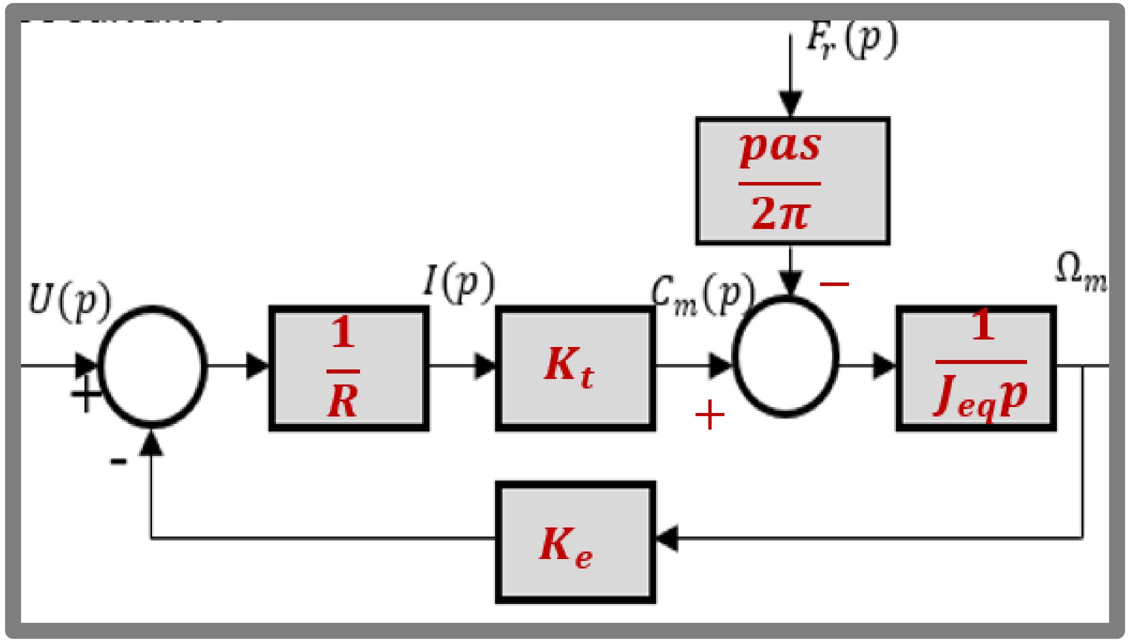




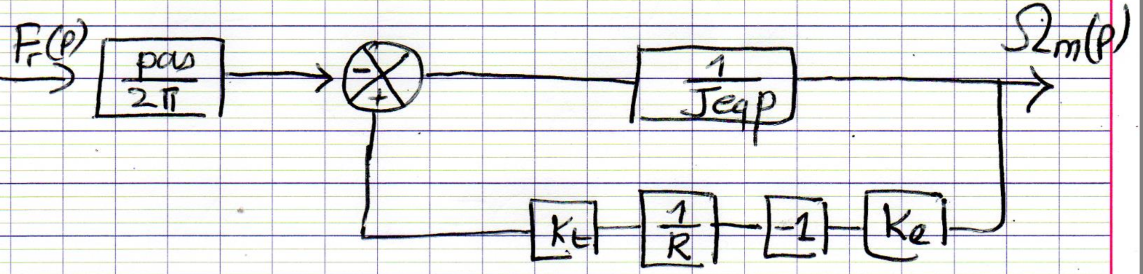
$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}\Big|_{F_r(p)=0} = \frac{\frac{K_t}{R J_{eq} p}}{1 + \frac{K_t K_e}{R J_{eq} p}}$$

$$= \frac{K_t}{K_t K_e + R J_{eq} p}$$

9. Déterminer la fonction de transfert $H_2(p) = \dfrac{\Omega_m(p)}{F_r(p)}$ pour $U(p) = 0$



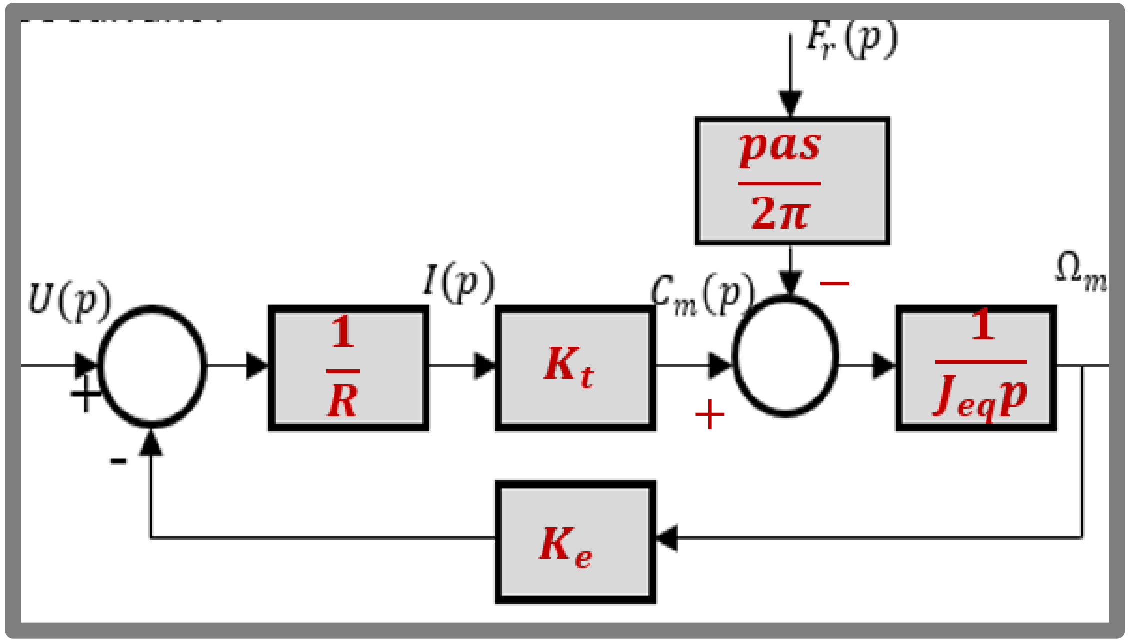
9/ $U(p) = 0$



$$H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{F_r(p)} = -\frac{pas}{2\pi} \times \left(\frac{\frac{1}{J_{eq}p}}{1 + \frac{K_tK_e}{RJ_{eq}p}} \right)$$

$$= \frac{-\frac{R\,pas}{2\pi}}{K_tK_e + RJ_{eq}p}$$

10. Exprimer $\Omega_m(p)$ en fonction de $U(p)$ et $F_r(p)$



$$\Omega_m(p) = H_1(p)\, U_m(p) + H_2(p)\, F_r(p)$$

$$= \frac{1}{K_t K_e + R J_{eq} p} \left(K_t U(p) - \frac{R\, pas}{2\pi} F_r(p) \right)$$

Dans la suite, on suppose que l'effort résistant $f_r(t) = 0N$

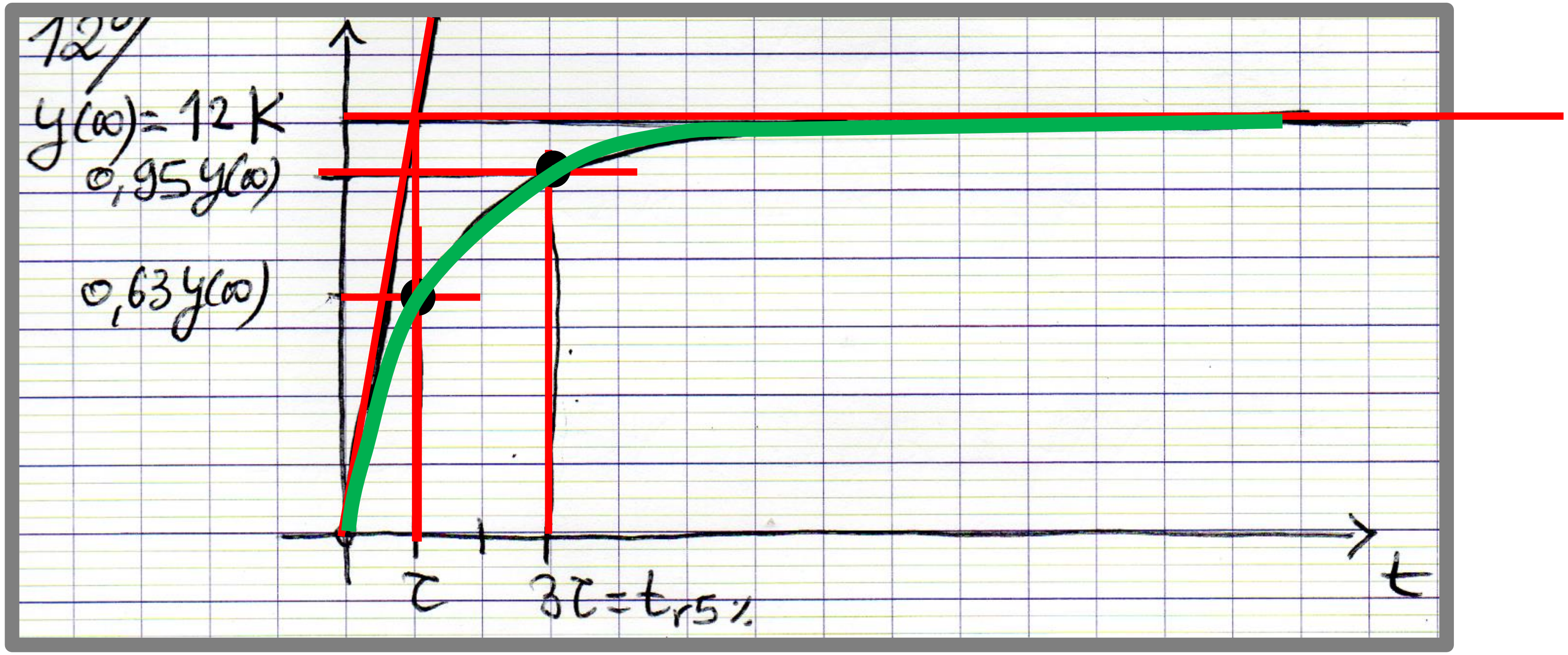
11. Mettre $H_1(p)$ sous la forme canonique d'un système de premier ordre $\left(H(p) = \frac{K}{1+\tau p}\right)$ en déduire l'expression de K et τ.

$F_r(p) = 0$

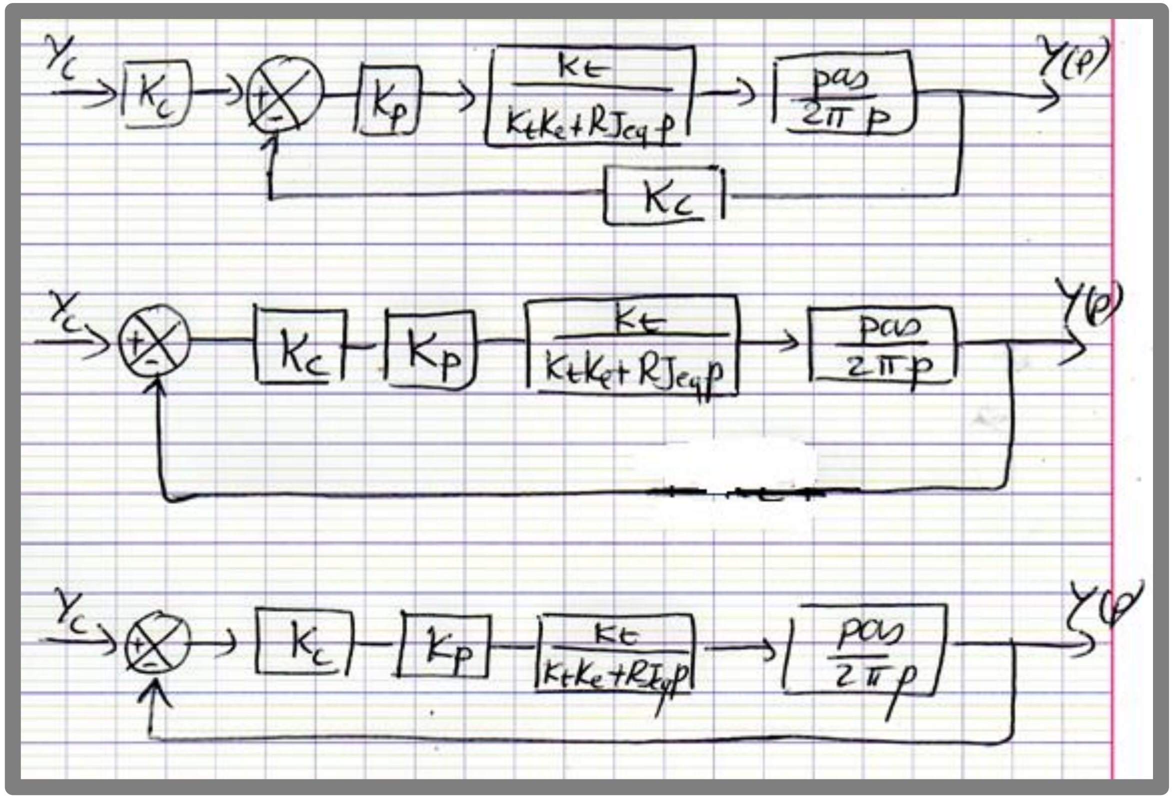
$$H_1(p) = \frac{K_t}{K_t K_e + R J_{eq} p} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J_{eq}}{K_t K_e} p}$$

$$= \frac{K}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = \frac{1}{K_e} \\ \tau = \frac{R J_{eq}}{K_t K_e} \end{cases}$$

12. Donner l'allure de la réponse indicielle $\omega_m(t)$ pour une tension d'alimentation $u(t)$ échelon d'amplitude 12V.



13. Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{Y(p)}{Y_c(p)}$



$$H(p) = \frac{\dfrac{K_c K_p K_t\, pas}{2\pi p\,(K_t K_e + R J_{eq} p)}}{1 + \dfrac{K_c K_p K_t\, pas}{2\pi p\,(K_t K_e + R J_{eq} p)}}$$

$$= \frac{K_c K_p K_t\, pas}{K_c K_p K_t\, pas + 2\pi p\,(K_t K_e + R J_{eq} p)}$$

14. Mettre $H(p)$ sous la forme canonique d'un système de second ordre $\left(\frac{K_s}{1+2\frac{m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0{}^2}}\right)$ en déduire l'expression de K_s, m et ω_0.

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\pi K_e}{K_c K_p\, pas}\, p + \frac{2\pi R J_{eq}}{K_c K_p K_t\, pas}\, p^2}$$

$$\begin{cases} K_S = 1 \\ \frac{2m}{\omega_0} = \frac{2\pi K_e}{K_c K_p\, pas} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{K_c K_p K_t\, pas}{2\pi R J_{eq}}} \end{cases}$$

$$m = \frac{\pi K_e}{K_c K_p\, pas} \sqrt{\frac{K_c K_p K_t\, pas}{2\pi R J_{eq}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi K_t K_e^2}{2 K_c K_p\, pas\, R J_{eq}}}$$

15. Exprimer, en fonction des paramètres du système, la valeur du correcteur K_p permettant d'avoir la réponse la plus rapide sans avoir de dépassement.

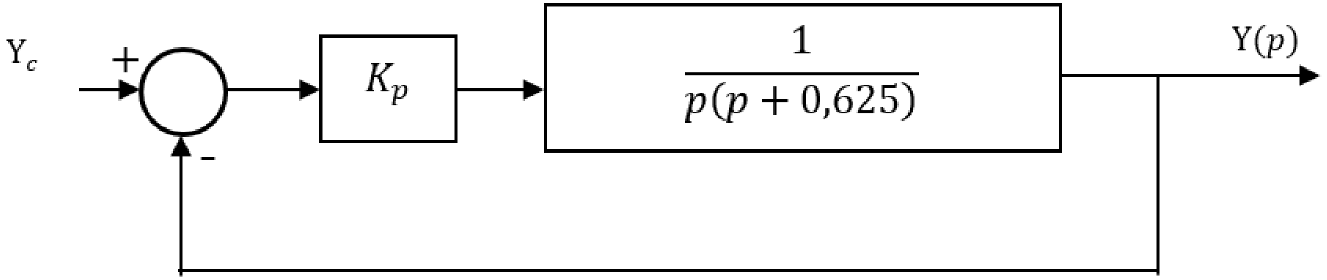
Réponse rapide sans dépassement pour un système de 2^{nd} ordre :

$m = 1$

$$\frac{\pi K_t K_e^2}{2 K_c K_p \, pas \, R J_{eq}} = 1$$

$$\Rightarrow K_p = \frac{\pi K_t K_e^2}{2 R J_{eq} K_c K_p \, pas}$$

16. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p)$ et en boucle ouverte $FTBO(p)$



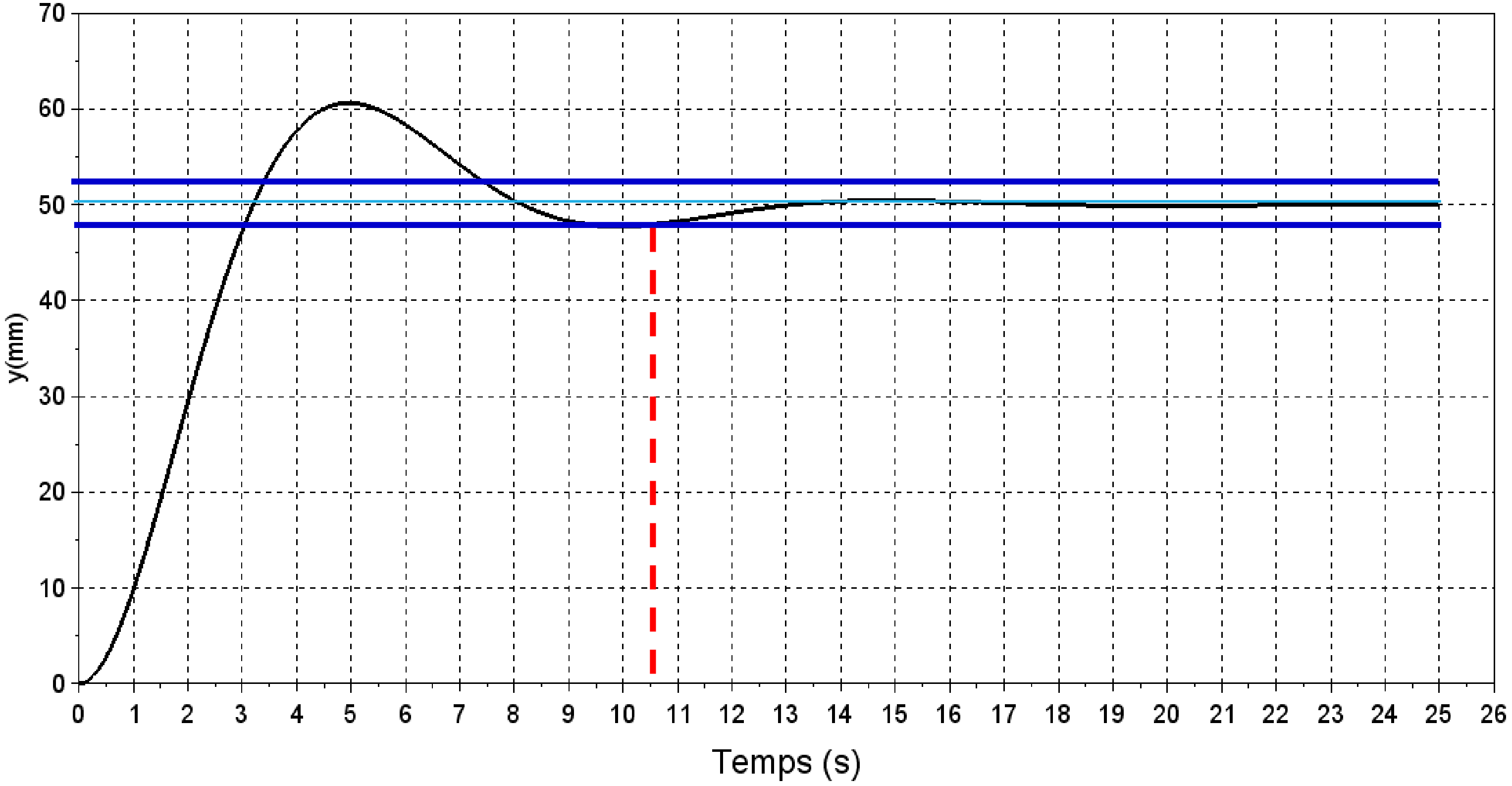
$$FTBO(p) = \frac{K_p}{p(p+0,625)}$$

$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1+FTBO(p)}$$

$$= \frac{K_p}{K_p + p(p+0,625)}$$

17. Déduire le temps de réponse à 5% et l'erreur de position. Conclure quant aux critères de rapidité et de précision sachant que le cahier des charges impose une erreur statique nulle et un temps de réponse minimum de 5s.

On donne ci-après la réponse indicielle du système de positionnement le long de l'axe « Y » pour une consigne de position $y_c(t) = 50u(t)$ en mm.



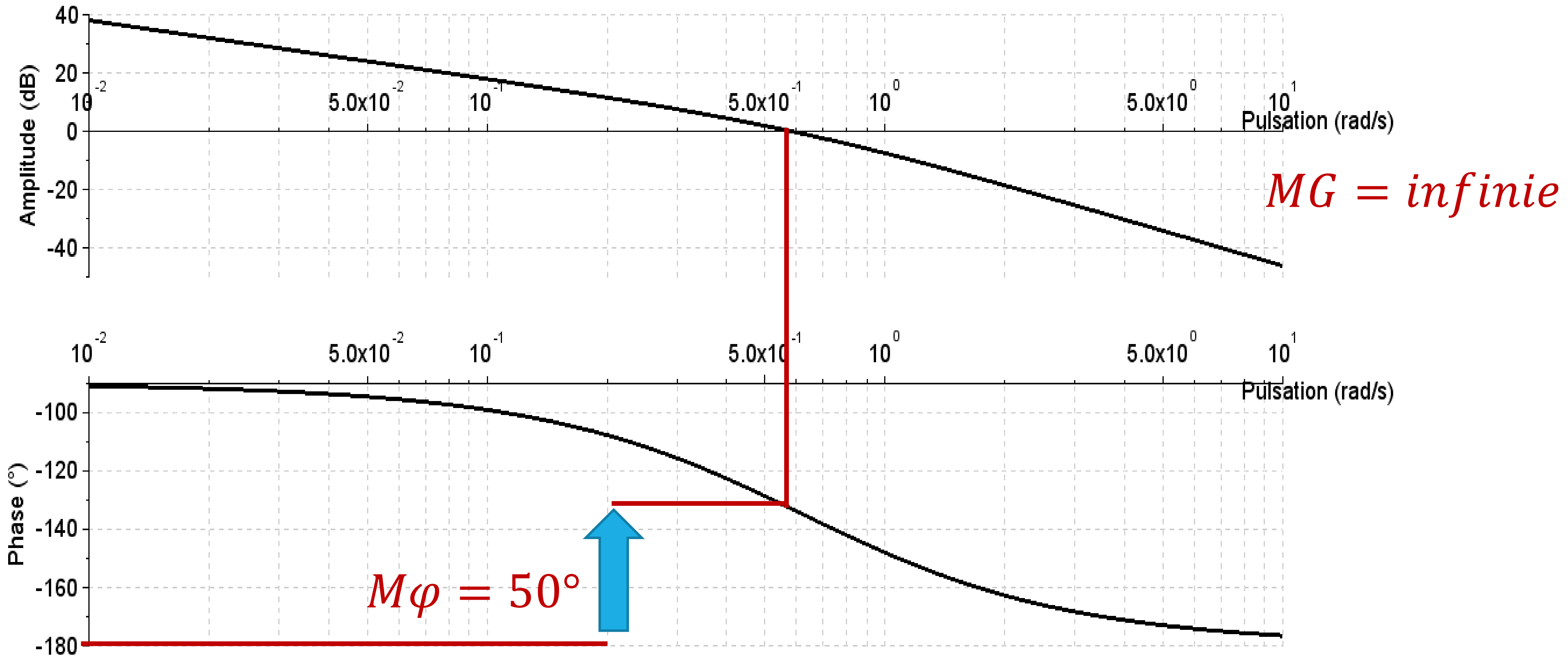
$t_{r5\%} = 10{,}5s$

➔ Cahier des charges non respecté

$\varepsilon_s = 0$

➔ Cahier des charges respecté

18. Déterminer la marge de gain et la marge de phase. Conclure quant au critère de stabilité sachant que la marge de phase minimale demandée est de 45° et la marge de gain minimale demandée est de 10dB.



Merci pour votre attention