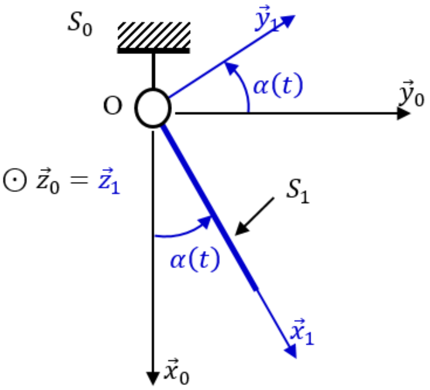
TD Dynamique des solides indéformables :

1. Exercice1 : (bras de robot)

Un robot est composé d'un seul bras S_1 articulé au point O par rapport au bâti S_0.



Données :

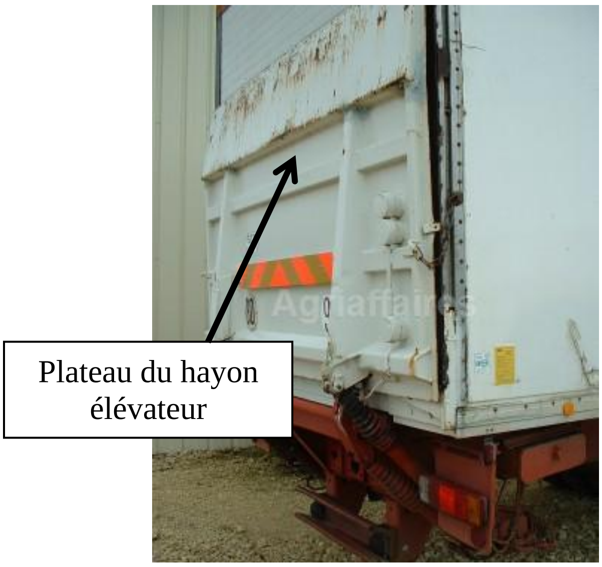
- Le bras S_1 est de masse m_1 et de matrice d'inertie $[I_0(S_1)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_1}$;
- Le centre d'inertie G_1 de S_1 est donné par $\overrightarrow{OG_1} = a\vec{x}_1$;
- La liaison pivot $(O, \vec{z}_0)$ est parfaite ;
- Le champ de la pesanteur est modélisé par $\vec{g} = g\vec{x}_0$
- Un servomoteur exerce un couple moteur $\vec{C}_m = C_m\vec{z}_0$ sur le bras S_1
- Le repère R_0 est supposé galiléen.

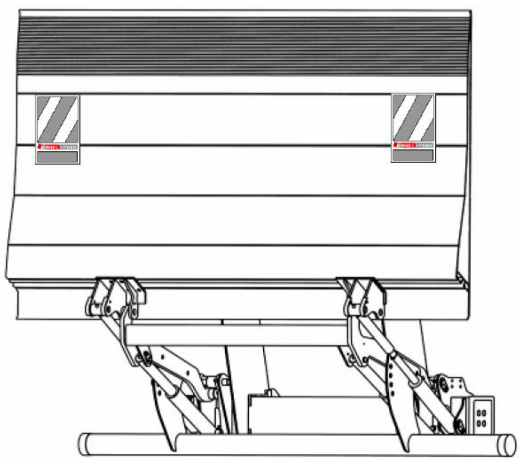
Questions :

1. Déterminer, dans la base du repère R_0, le torseur des actions mécaniques extérieures à S_1.
2. Déterminer, dans la base du repère R_0, le torseur dynamique de S_1 dans son mouvement par rapport à R_0.
3. En appliquant le PFD, déduire les expressions des inconnues statiques de la liaison pivot $(O, \vec{z}_0)$;
4. Déduire l'équation de mouvement.

2. Exercice 2 (hayon d'un camion)

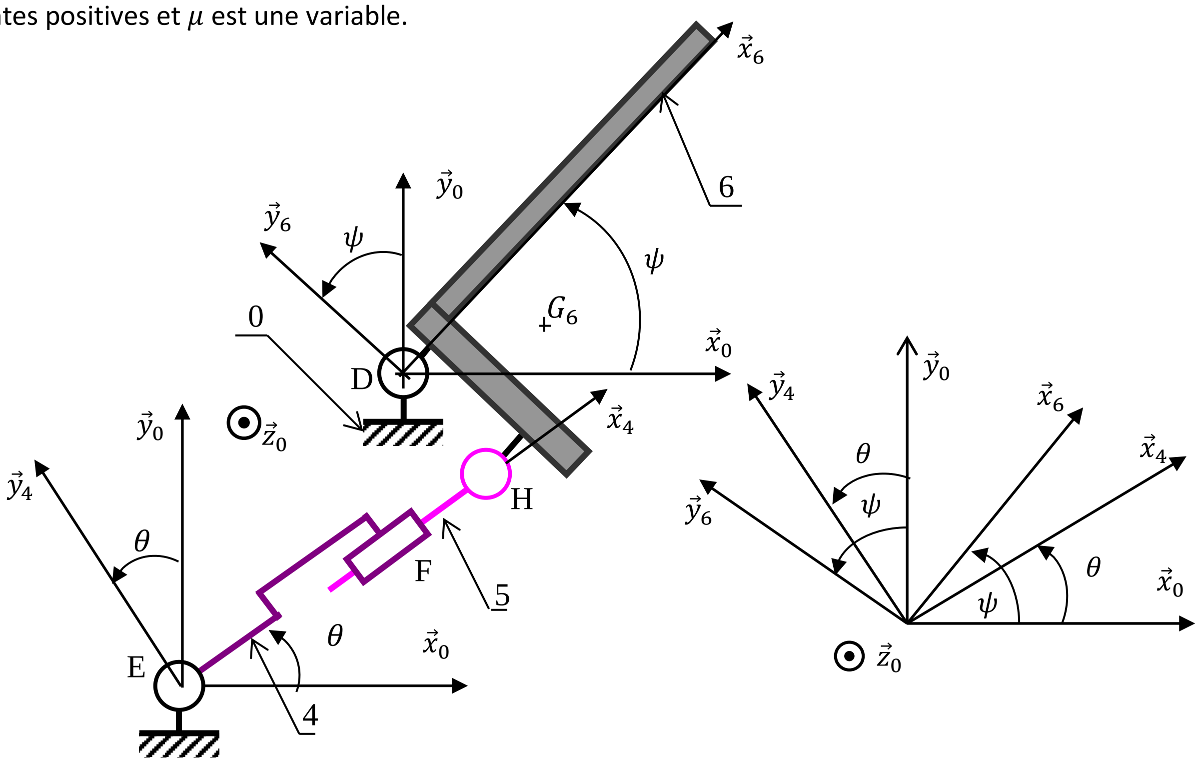
La figure suivante schématise le principe d'un hayon sur parallélogramme déformable. Ce système de manutention est constitué de deux vérins qui permettent l'ouverture, l'inclinaison et la fermeture du plateau. Il s'adapte à l'arrière du véhicule et est solidaire au châssis.





Le schéma cinématique suivant représente le système lors de l'opération d'ouverture ou de fermeture du plateau.

On donne $\overrightarrow{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0$, $\overrightarrow{HD} = h\vec{y}_6$, $\overrightarrow{FH} = \mu\vec{x}_4$, $\overrightarrow{EF} = d\vec{x}_4$ et $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_6) = (\vec{y}_0, \vec{y}_6)$ avec : e, f, h et d sont des constantes positives et μ est une variable.



1. Exprimer dans la base de R₆ la vitesse du centre d'inertie G_6 du plateau 6 dans son mouvement par rapport à R_0. $\vec{V}(G_6 \in 6/R_0)$Sachant que $\overrightarrow{DG}_6 = x_G\vec{x}_6 + y_G\vec{y}_6$.

2. Exprimer dans la base de R₆ l'accélération du centre d'inertie G_6 du plateau 6 dans son mouvement par rapport à R_0. $\vec{\Gamma}(G_6 \in 6/R_0)$

3. Exprimer dans la base du repère R_6 les éléments de réduction du torseur cinétique du plateau 6 dans son mouvement par rapport à R_0 sachant que le plateau 6 est de masse m_6 et admet une matrice d'inertie diagonale au point D et dans la base du repère R_6 avec $I_{D\vec{z}_0} = \mathrm{I}$.

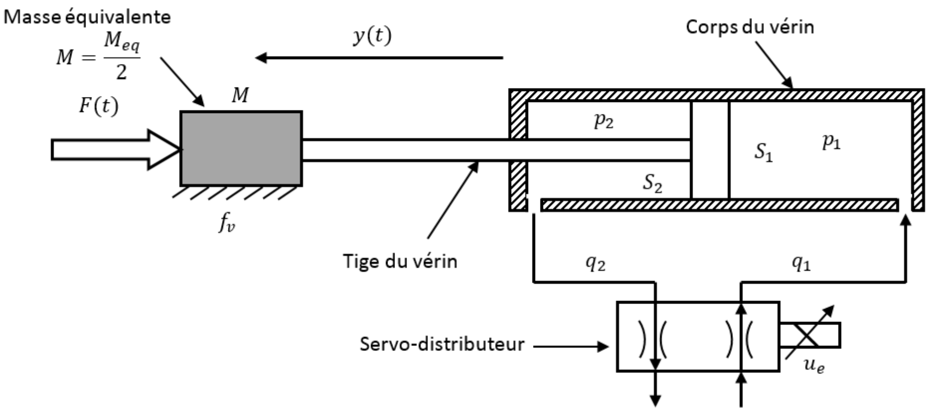
4. Exprimer dans la base du repère R_6 les éléments de réduction du torseur dynamique du plateau 6 dans son mouvement par rapport à R_0.

5. Exprimer au point D et dans la base du repère R_6 les éléments de réduction du torseur d'actions mécaniques extérieures au plateau 6. On donne $\vec{g} = -g\vec{y}_0$, l'action mécanique de la tige du vérin 5 sur le plateau 6 est donnée par le torseur suivant $\{F(5 \longrightarrow 6)\}_H = \begin{Bmatrix} F_0\vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ et on suppose que toutes les liaisons sont parfaites.

6. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur le plateau 6 dans son mouvement par rapport à R₀ supposé galiléen, déterminer les inconnues d'actions mécaniques de la liaison pivot d'axe $(D, \vec{z}_0)$ et exprimer l'effort F_0 qu'exerce la tige de vérin 5 sur le plateau 6 en fonction de$m_6, h, x_G, y_G, g, I, \psi, \ddot{\psi}$ et θ.

3. Exercice 3 (CNIM 2018 https ://lefiabdellaoui.files.wordpress.com/2018/05/cnim_si_2018_e.pdf)

Afin de mener l'étude d'asservissement de position et le contrôle de CSS (Closed Side Set), on isole le vérin V_1. Son comportement est modélisé à partir du modèle de structure donné par la figure suivante.

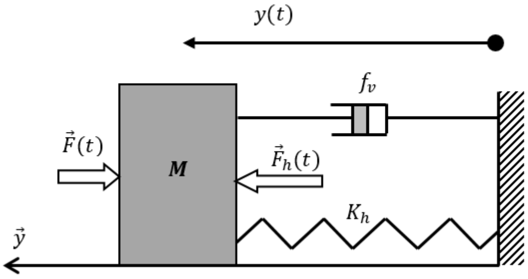


La position notée $y(t)$ de la tige du vérin est fonction du débit d'huile $q_1(t)$ à l'entrée de la chambre d'admission du vérin et la force due au concassage des roches $F(t)$. On se place dans l'hypothèse de petit déplacement autour d'un point de fonctionnement. Le système est donc supposé linéaire, continu et invariant.
On donne :

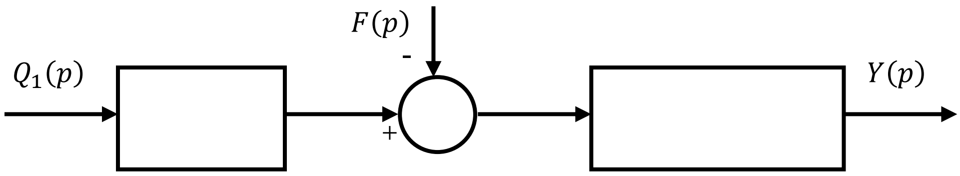
- $M = \frac{M_{eq}}{2} = 400Kg$: masse équivalente ramenée sur l'axe du vérin V_1 ;
- $f_v = 2.10^6 \; Nm^{-1}s^{-1}$: coefficient des frottements visqueux ;
- $K_h = 5.10^6 \; N/m$: raideur hydraulique du vérin ;
- $S_1 = 8.10^{-3} \; m^2$: aire de la section intérieure de la chambre d'admission ;
- $F(t)$: effort variable due au concassage des roches.

Dans la figure suivante, le vérin est modélisé par un ressort de raideur K_h attaché à son extrémité à la masse équivalente M. Le bilan des efforts extérieurs est comme suit :

- Le ressort exerce une force de rappel $\vec{T}_h(t) = -K_h y(t)\vec{y}$;
- Le servo-distributeur exerce une force hydraulique $\vec{F}_h(t) = K_h \left(\int_0^t \frac{q_1(\tau)}{S_1} d\tau\right)\vec{y}$;
- La force due aux frottements visqueux est modélisée par $\vec{F}_f = -f_v \frac{dy(t)}{dt}\vec{y}$;
- L'effort engendré par le concassage des roches est donné par $\vec{F}(t) = -F(t)\vec{y}$;



1. En appliquant le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe $\vec{y}$, déterminer l'équation de mouvement de la masse équivalente.
2. Traduire l'équation de mouvement dans le domaine de Laplace sachant que les conditions initiales sont supposées nulles. Compléter le schéma bloc suivant :



Exercice 4 : Equilibrage d'un solide en rotation

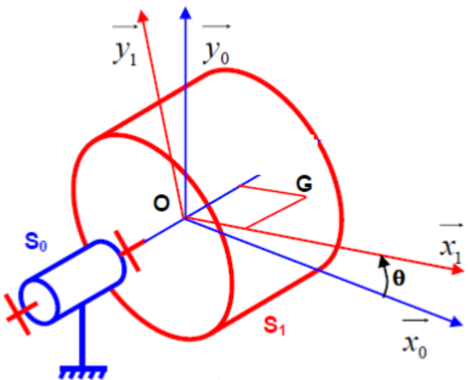
Partie1 :

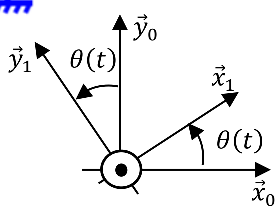
Soit un solide S_1 de masse m et de centre d'inertie G en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti S_0. Ce solide (S1) est soumis à un couple moteur $\vec{C}_m = C_m\vec{z}_0$.

- Le repère $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié à S_0, supposé galiléen.
- Le repère $R_1(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ est lié à S_1.
- $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- $\overrightarrow{OG} = a\vec{x}_1 - c\vec{z}_0$
- Le solide S_1 est de masse m
- La matrice d'inertie de S_1 est donnée par la matrice suivante :

$$[I_O(S_1)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_1}$$

- L'accélération de la pesanteur est donnée par : $\vec{g} = -g\vec{y}_0$





1. Déterminer l'accélération $\vec{\Gamma}(G \in S_1/R_0)$.
2. Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_O(S_1/R_0)$.
3. Exprimer dans R_0 le torseur dynamique $\{D(S_1/R_0)\}_O$.
4. Isoler S_1 et Exprimer dans R_0 le torseur des efforts extérieurs appliqués sur S_1 au point O.

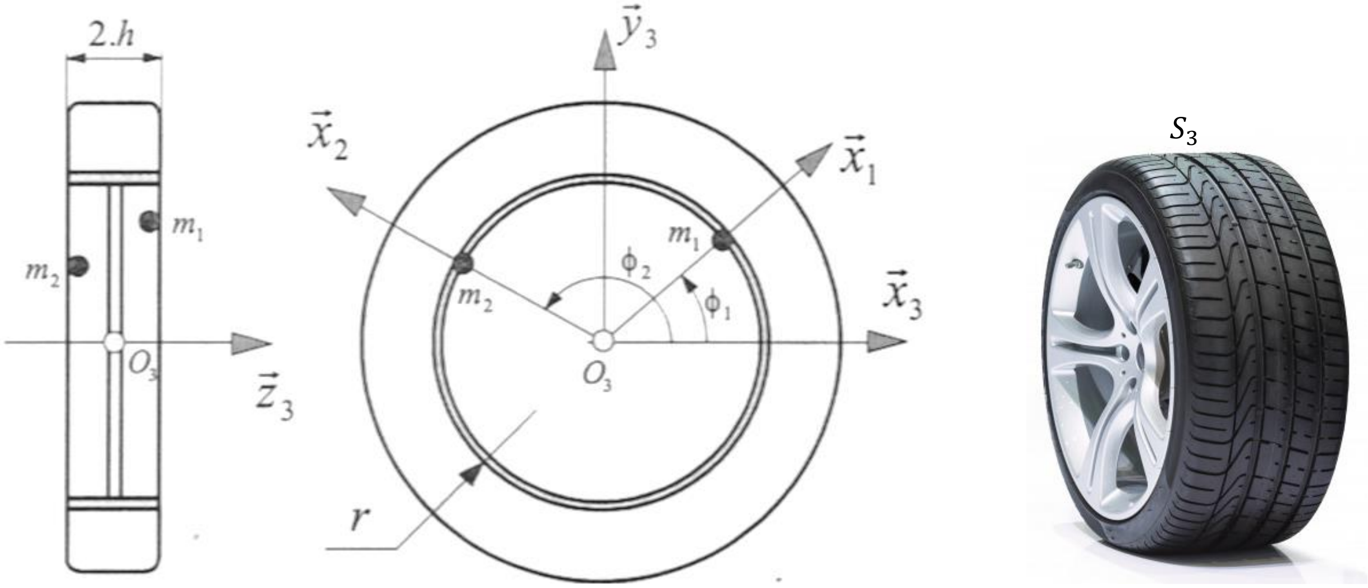
5. Déterminer les 6 équations scalaires qui découlent du PFD appliqué à S_1.
6. En déduire les 5 composantes du torseur statique de la liaison pivot entre S_1 et S_0.
7. Pour qu'il y ait équilibrage, il faut que ces 5 composantes soient constantes. En déduire les valeurs de $a, E\ et\ D$

Partie2 :

Nous avons montré dans la partie 1 que les conditions d'équilibrage d'un solide conduisait à :

- **Equilibrage statique : Ramener le centre d'inertie G de S_1 sur l'axe de rotation**
- **Equilibrage dynamique : Rendre l'axe de rotation un axe principal d'inertie**

On souhaite réaliser l'équilibrage d'une roue S_3 de véhicule (voir figure suivante) dont la symétrie de révolution n'est plus respectée.



Soient :

- Le repère $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ est lié à S_3.
- Le solide S_3 est de masse m_3 et de centre d'inertie G_3 avec $\overrightarrow{O_3G_3} = a\vec{x}_3 + b\vec{y}_3 + c\vec{z}_3$.
- La matrice d'inertie de S_3 est donnée par :

$$[I_{O_3}(S_3)] = \begin{bmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{bmatrix}_{R_3}$$

Afin d'équilibrer une roue, on peut rajouter deux masselottes (masses ponctuelles), S_1 de masse m_1 et de centre G_1 et S_2 de masse m_2 et de centre G_2. Ces deux masselottes sont fixées sur la jante, à un rayon r, de part et d'autre de la roue, à une distance h du plan de symétrie de la roue.

La position des deux masselottes est identifiée par deux repères $R_1(O_3, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_3)$ et $R_2(O_3, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_3)$, repérés par les angles ϕ_1 et ϕ_2 tels que $\phi_1 = (\vec{x}_3, \vec{x}_1)$ et $\phi_2 = (\vec{x}_3, \vec{x}_2)$. ϕ_1 et ϕ_2 sont des constantes.

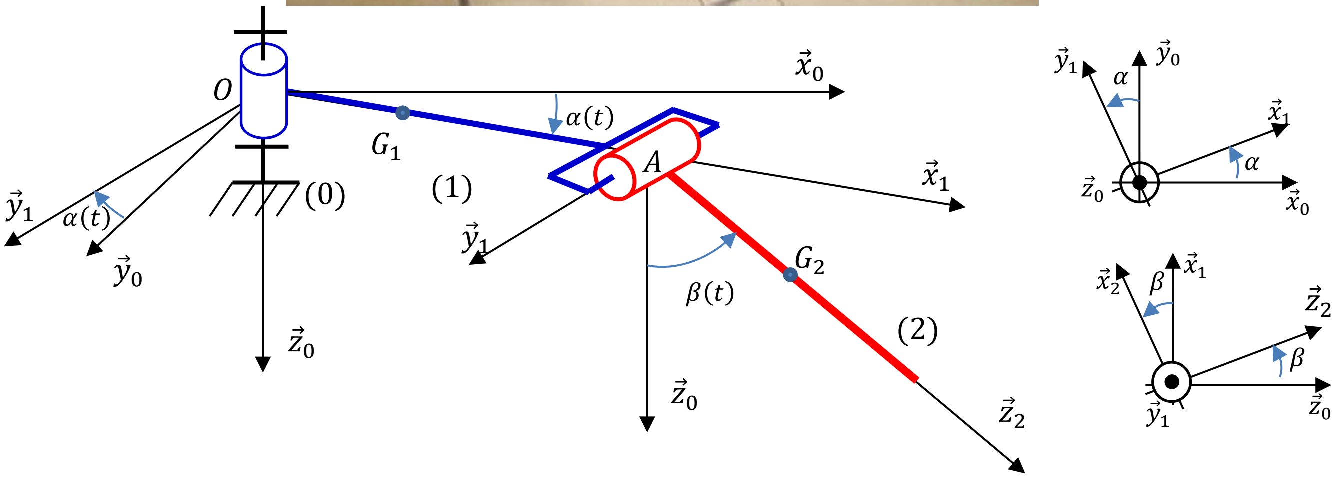
On appellera S le système composé par les trois solides S_1, S_2 et S_3, de centre d'inertie G et de matrice d'inertie donnée par :

$$[I_{O_3}(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_3}$$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{O_3G}$ dans le repère R_3.
2. Déterminer les deux équations scalaires traduisant la condition d'équilibrage statique dans le repère R_3.
3. Exprimer D et E en fonction des données géométriques du problème et des composantes de $[I_{O_3}(S_3)]$.
4. Donner les deux équations scalaires traduisant la condition d'équilibrage dynamique dans R_3.

Exercice 5 : Centrifugeuse

La centrifugeuse est constituée par le bras 1 et d'une cabine 2. Le bras 1 est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$ avec le bâti 0. La cabine 2 est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{y}_1)$ avec le bras 1.



Repères et paramétrages :

- Le repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est lié au bâti 0.
- Le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ est lié au bras 1 tel que $(\vec{y}_0,\vec{y}_1)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=\alpha(t)=\omega t$
- Le repère $R_2(A,\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z}_2)$ est lié à la cabine 2 tel que $(\vec{z}_0,\vec{z}_2)=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\beta(t)$

Caractéristiques géométriques et d'inertie :

- Bras 1 : De centre d'inertie G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1}=e\vec{x}_1$, de moment d'inertie par rapport à $(O,\vec{z}_0)$, supposé moment principal d'inertie, est noté par I et $\overrightarrow{OA}=a\vec{x}_1$ et de masse m_1
- Cabine 2 : De centre d'inertie G_2 tel que $\overrightarrow{AG_2}=b\vec{z}_2$, de masse m_2 et de matrice d'inertie : $[I_A(2)]=\begin{bmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{bmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{z}_2)}$

Chargement :

- $\vec{g}=g\vec{z}_0$: champ d'action de la pesanteur,
- Un moteur exerce un couple sur le bras (1). Cette action est modélisée par le torseur suivant :

$$\{F_{M\to 1}\}=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ C_m\vec{z}_0\end{Bmatrix}_O$$

A- Cinématique :

1. Déterminer le torseur cinématique de la cabine 2 au point A dans son mouvement par rapport au bâti ;
2. Déterminer la vitesse du point G_2, centre d'inertie de la cabine 2, par rapport au repère lié au bâti.
3. Déterminer l'accélération du point G_2, centre d'inertie de la cabine 2, par rapport au repère lié au bâti.

B- Dynamique :

1. Donner le torseur cinétique de la cabine 2, au point A, dans son mouvement par rapport au bâti 0 ;
2. Déterminer la projection sur l'axe $\vec{y}_1$, du moment dynamique de la cabine 2 au point A dans son mouvement par rapport au bâti ;
3. Déterminer la projection sur l'axe $\vec{z}_0$ du moment dynamique de l'ensemble formé par la cabine 2 et le bras 1 au point O dans leur mouvement par rapport au bâti ;

4. Déterminer, au point A et dans la base du repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, le torseur des actions mécaniques extérieures à la cabine 2 ;

5. Déterminer, au point 0 et dans la base du repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, le torseur des actions mécaniques extérieures à l'ensemble S formé par le bras 1 et la cabine 2 ;

6. Déterminer les deux équations de mouvement de la centrifugeuse par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.