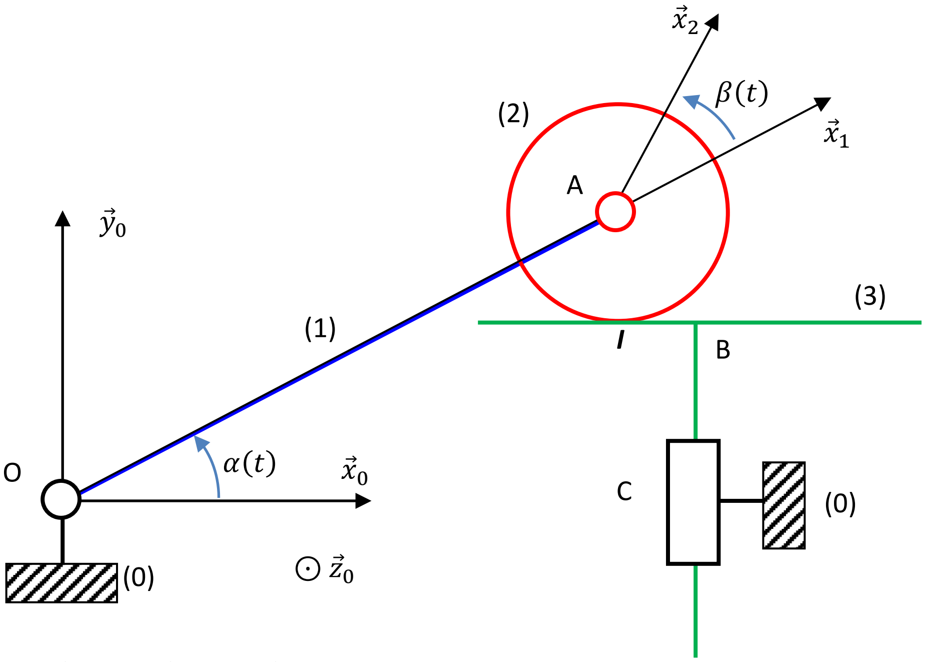
TD. Energétique des solides indéformables

Exercice 1 : Trappe de désenfumage

L'exercice porte sur l'étude d'un mécanisme d'ouverture d'une trappe de désenfumage.
Le mécanisme utilisé pour l'ouverture est composé de :

- Un bâti (0) lié au repère $R_0(0,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, supposé galiléen.
- Un bras (1), en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ avec le bâti (0), lié au repère $R_1(0,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ tel que $\alpha(t)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)$
- Une roulette (2), assimilée à un disque de rayon R et de centre A, en liaison picot d'axe $(A,\vec{z}_0)$ avec le bras (1) et lié au repère $R_2(0,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)$ tel que $\beta(t)=(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=(\vec{y}_1,\vec{y}_2)$
- Un plateau (3), en liaison glissière d'axe $(C,\vec{y}_0)$ avec le bat (0) et en liaison ponctuelle de normale $(I,\vec{y}_0)$ au point de contact I avec la roulette (2). Le contact au point I est maintenu avec un ressort non représenté.

On donne : $\overrightarrow{OA}=L\vec{x}_1$, $\overrightarrow{OC}=L\vec{x}_0$, $\overrightarrow{IB}=\mu(t)\vec{x}_0$, $\overrightarrow{CB}=\lambda(t)\vec{y}_0$ et $\overrightarrow{IA}=R\vec{y}_0$



Cinématique :

1. Déterminer $\vec{\Omega}(1/0)$, $\vec{\Omega}(2/0)$, $\vec{\Omega}(3/0)$
2. Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I de la roulette 2 par rapport au plateau 3.
3. Déterminer la condition de roulement sans glissement au point I.

Energétique :

Dans cette partie, on rajoute les hypothèses suivantes.

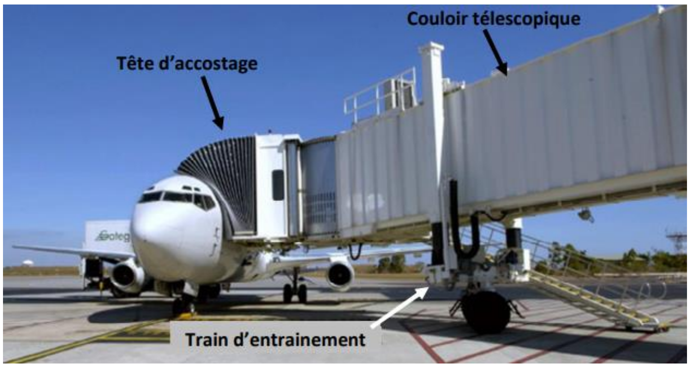
- Le bras (1) est de masse m_1, de centre d'inertie G_1 ($\overrightarrow{OG_1}=e\vec{x}_1$ et de matrice d'inertie :
$$I_O(1)=\begin{bmatrix}A_1&0&0\\0&B_1&0\\0&0&C_1\end{bmatrix}_{R_1}$$
- La roulette (2) est de masse m_2, de centre d'inertie A et de matrice d'inertie :
$$I_A(2)=\begin{bmatrix}A_2&0&0\\0&B_2&0\\0&0&C_2\end{bmatrix}_{R_2}$$
- Le plateau (3) est de masse m_3 et de centre d'inertie G_3 ($\overrightarrow{CG_3}=k\vec{y}_0$).
- Le bras (1) est entrainé par une courroie qui exerce sur 1 un torseur : $\begin{Bmatrix}\vec{R}_1\\C_M\vec{z}_0\end{Bmatrix}_O$.
- L'action de la trappe sur (3) est modélisée par le torseur : ${}_B\begin{Bmatrix}X&L\\Y&M\\Z&N\end{Bmatrix}_{R_0}$.

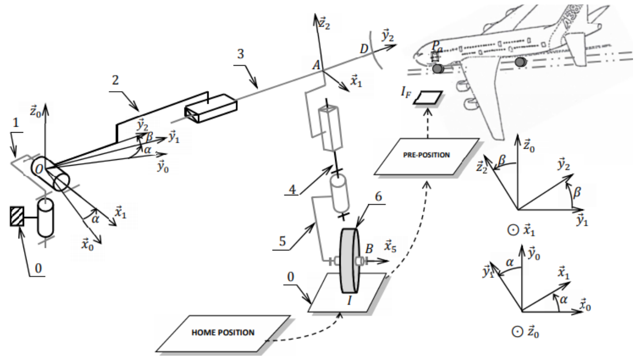
- Au point I, il y a roulement sans glissement et le facteur de frottement vaut f.
- Soit $\Sigma = \{1, 2, 3\}$
- $\vec{g} = g\vec{z}_0$
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites sauf la liaison ponctuelle.

1. Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble Σ dans le mouvement par rapport à R_0. Déduire son moment d'inertie équivalente ramenée sur l'axe moteur $(O, \vec{z}_0)$.
2. Déterminer la puissance des efforts intérieurs à Σ,
3. Déterminer la puissance des efforts extérieurs à Σ dans son mouvement par rapport à R_0.
4. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déduire l'expression du couple C_M.

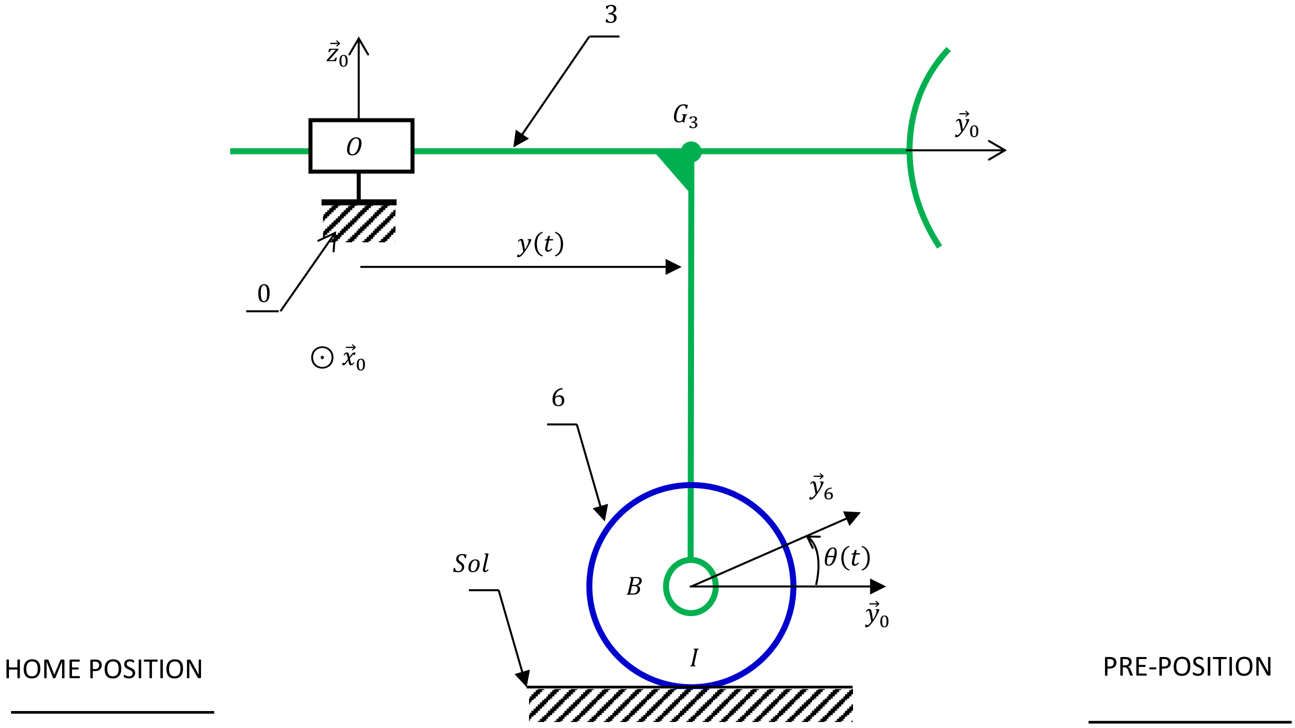
Exercice 2 : Passerelle télescopique (CNIM 2017)

L'étude porte sur le déplacement horizontal de la passerelle de la position « **HOME POSITION** » à la position « **PRE-POSITION** ».





L'effet de l'inclinaison des couloirs est négligé ($\beta = 0°$) et on se place dans le cas où l'angle α est nul. Le couloir (2) est supposé immobile par rapport au bâti (0). Pour cela, le couloir (3) est supposé en liaison glissière d'axe $(O, \vec{y}_0)$ avec le bâti (0) et de paramètre de translation $y(t)$ (voir figure suivante).



On adopte également les hypothèses suivantes :

- Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est supposé galiléen.
- La roue (6) est supposée en liaison pivot parfaite d'axe $(B, \vec{x}_0)$ avec le couloir (3) et en liaison ponctuelle de normale $(I, \vec{z}_0)$ avec le sol de coefficient de frottement f_0. Elle est supposée de masse m_6, de centre d'inertie B, d'axe principal d'inertie $(B, \vec{x}_0)$ et de moment principal d'inertie A_6 par rapport à $(B, \vec{x}_0)$. On donne $\overrightarrow{BI} = -\frac{D}{2}\vec{z}_0$avec $D = 1m$.
- Le couloir (3) est supposé de masse m_3 et de centre d'inertie G_3avec $\overrightarrow{OG_3} = y(t)\vec{y}_0$.
- L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g\vec{z}_0$.

- La liaison glissière entre le bâti (0) et le couloir (3) est supposée avec frottement dont le torseur d'actions mécaniques est donné par le torseur suivant : $\{F(0 \to 3)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} X & L \\ -f_R(t) & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)}$.
- Les masses et les inerties des éléments du motoréducteur sont négligées.
- Le rapport de réduction du réducteur est $K_r = 200$.
- Le motoréducteur $MR1$ exerce un couple sur la roue (6) donné par le torseur suivant : $\{F(MR1 \to 6)\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -\eta K_r c_m \vec{x}_0 \end{Bmatrix}$ AvecK_r est le rapport de réduction du réducteur et η son rendement.
- On donne : $\vec{\Omega}(6/0) = \dot{\theta}\vec{x}_0 = -\frac{\omega_m(t)}{K_r}\vec{x}_0$ avec $\omega_m(t)$ est la vitesse angulaire de l'arbre moteur et K_r le rapport de réduction du réducteur.

1. A partir de la condition de roulement sans glissement au point I entre la roue (6) et le sol, montrer que$\dot{y}(t) = \frac{D}{2K_r}\omega_m(t)$. Déduire la vitesse angulaire maximale du moteur ω_{max} permettant de répondre au critère imposé par le cahier des charges. On rappelle que la vitesse maximale de déplacement horizontal autorisée pour la passerelle est de 1,2m/s.

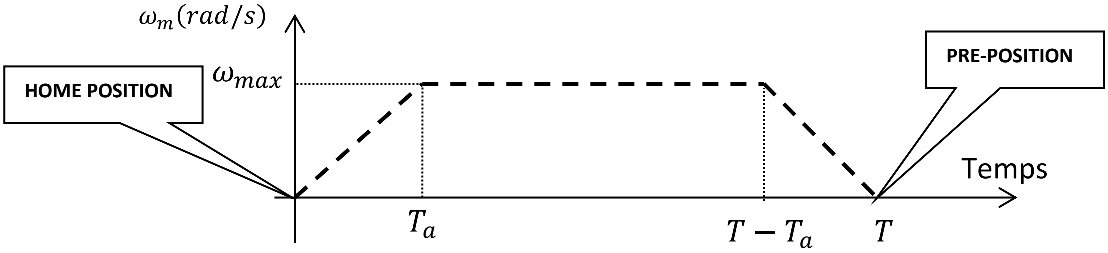
2. Déterminer l'énergie cinétique du système matériel Σ formé par le couloir (3) et la roue (6) dans son mouvement par rapport à R_0. Déduire le moment d'inertie équivalente J_{eq} du système Σ, ramenée sur l'arbre moteur, en fonction de m_3, m_6, D, A_6 et K_r.

3. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques intérieures au système matériel Σ.

4. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures au système matériel Σ.

5. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique (Energie-Puissance), exprimer le couple moteur $c_m(t)$ en fonction de J_{eq}, $f_R(t)$, D, K_r, η et $\frac{d\omega_m(t)}{dt}$.

La courbe donnée ci-dessous correspond à la loi de commande du moteur (**HORIZONTAL DRIVE MOTOR**) en fonction du temps lorsque la passerelle passe de la position (**HOME POSITION**) à la position (**PRE-POSITION**).

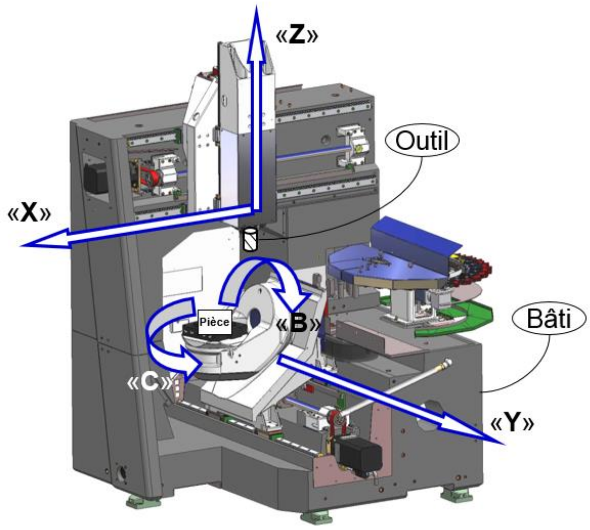


6. En se basant sur la loi de commande du moteur, compléter le tableau suivant et indiquer dans quelle période, le moteur fournit un couple maximal. On donne : $c_m(t) = \frac{1}{\eta}\left[\frac{D}{2K_r}f_R(t) + J_{eq}\frac{d\omega_m(t)}{dt}\right]$.

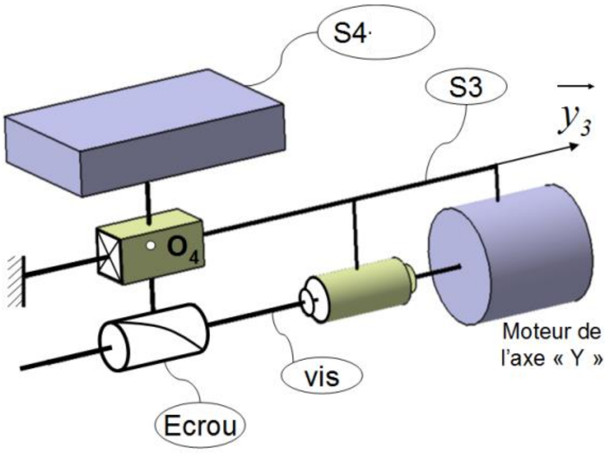
Période	$[0, T_a]$	$]T_a, T - T_a[$	$[T - T_a, T]$
$\frac{d\omega_m(t)}{dt}$ en $(rads^{-2})$			
Couple moteur $c_m(Nm)$ Expression analytique			

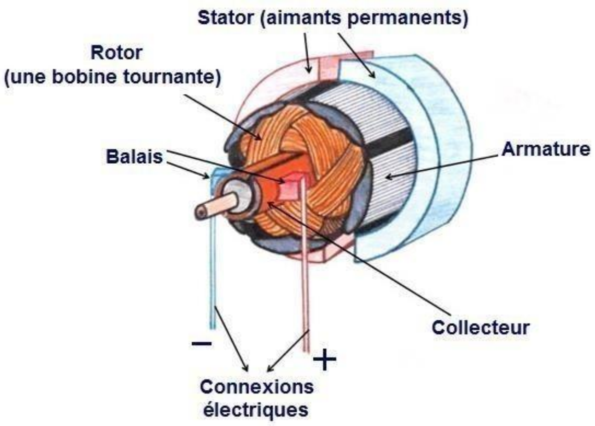
Exercice 3 : Centre d'usinage 5 axes

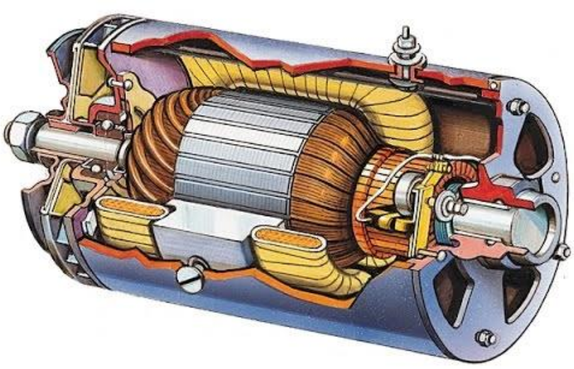
L'objectif de cette partie est de vérifier les performances de la motorisation de l'axe « Y » d'un centre d'usinage 5 axes.



La chaine cinématique de transformation du mouvement de rotation du moteur de l'axe « Y » en mouvement de translation horizontale est schématisée ci-après.







Données :

- L'axe$(O_4, \vec{y}_3)$ est parfaitement horizontal,
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites sauf la liaison glissière d'axe $(O_4, \vec{y}_3)$. On donne :

$$\{F(S_3 \rightarrow S_4)\} = \underset{O_4}{\left\{\begin{matrix} X \\ -f_r(t) \\ Y \end{matrix}\middle|\begin{matrix} L \\ M \\ N \end{matrix}\right\}}_{R_3}$$

- La vitesse de rotation du moteur par rapport au repère galiléen R_3est notée ω_m,
- Le moment d'inertie de la vis, par rapport à son axe de rotation est noté J_v,

- Le moment d'inertie du rotor moteur par rapport à son axe de rotation est noté J_m,
- Le pas de la liaison hélicoïdale est noté "pas".
- Le coulisseau S_4 est de masse m_4 et de centre d'inertie G_4
- Soit le système matériel $\Sigma = \{vis, S_4, rotor\}$
- La vitesse de déplacement du coulisseau S_4 est donnée par $\dot{y}(t) = \frac{pas}{2\pi}\omega_m(t)$
- L'action de la pesanteur est négligée sur le rotor et la vis.
- L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g\vec{z}_3$
- L'action du stator du moteur sur le rotor est donnée par :

$$\{F(stator \rightarrow rotor)\} = {}_{0_3}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ c_m(t)\vec{y}_3 \end{Bmatrix}$$

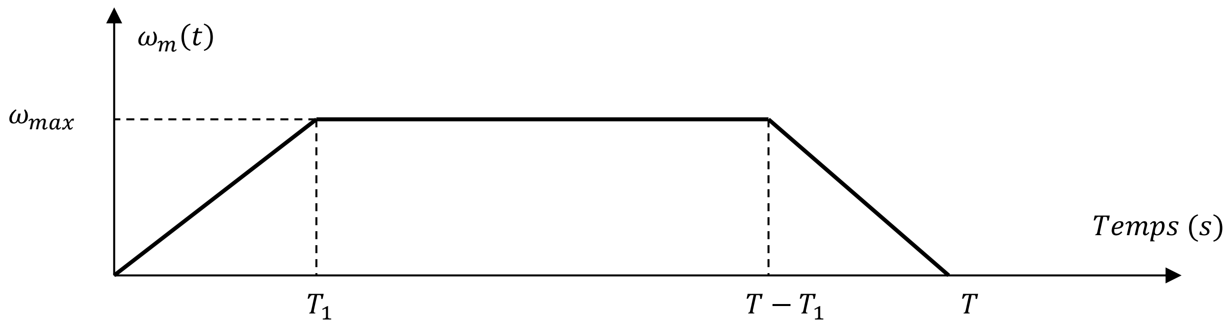
1. Déterminer l'énergie cinétique du système matériel Σ dans son mouvement par rapport à R_3 en déduire le moment d'inertie équivalente J_{eq} en fonction de m_4, J_v, J_m, pas.

2. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques intérieures à Σ.

3. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures à Σ.

4. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique sur le système matériel Σ, déterminer l'expression du couple moteur $c_m(t)$.

5. On donne dans la suite la loi de commande du moteur, compléter le tableau suivant :

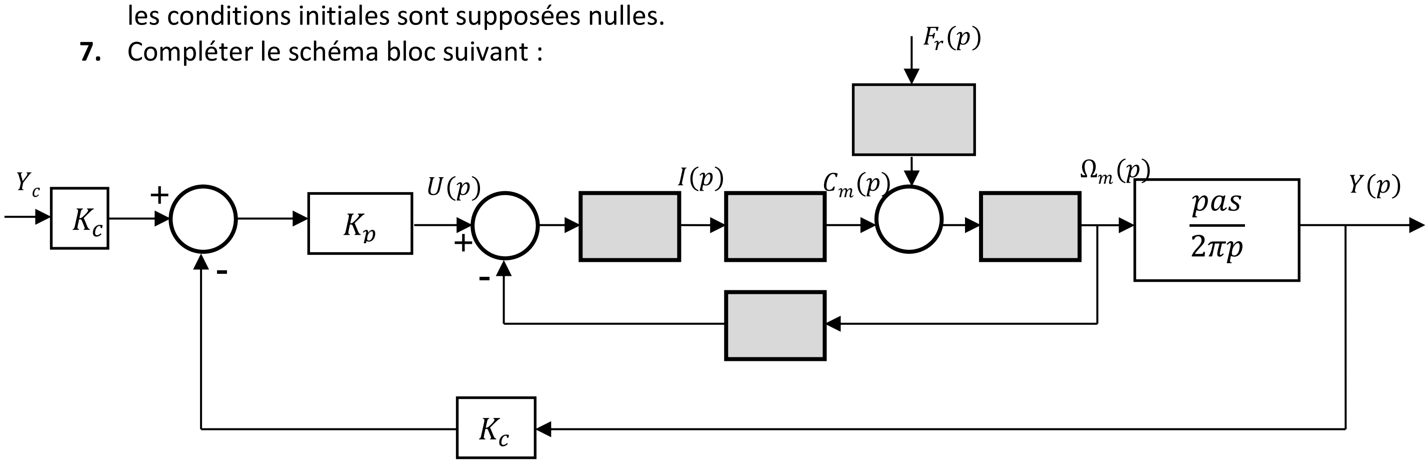


Période	$[0, T_1[$	$[T_1, T - T_1]$	$]T - T_1, T]$
$\frac{d\omega_m(t)}{dt}$			
c_m			

On donne ci-après les lois de comportement du moteur utilisé dans la commande de l'axe « Y » :

$$u(t) = e(t) + Ri(t)$$
$$e(t) = K_e\omega_m(t)$$
$$c_m(t) = K_t i(t)$$
$$c_m(t) = J_{eq}\frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{pas}{2\pi}f_r(t)$$

6. Traduire les équations qui régissent le fonctionnement du moteur dans le domaine de Laplace sachant que les conditions initiales sont supposées nulles.
7. Compléter le schéma bloc suivant :



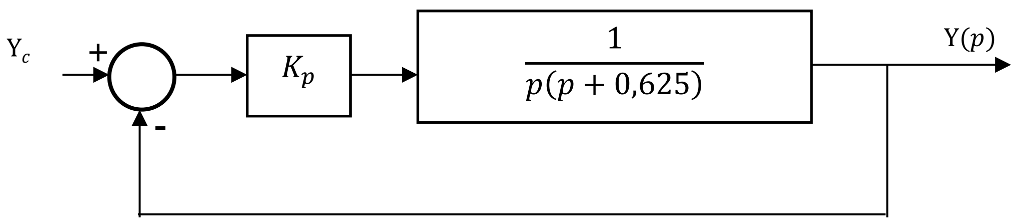
Etude du moteur :

8. Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ pour $F_r(p) = 0$
9. Déterminer la fonction de transfert $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{F_r(p)}$ pour $U(p) = 0$
10. Exprimer $\Omega_m(p)$ en fonction de $U(p)$ et $F_r(p)$

Dans la suite, on suppose que l'effort résistant $\boldsymbol{f_r(t) = 0N}$

11. Mettre $H_1(p)$ sous la forme canonique d'un système de premier ordre $\left(H(p) = \frac{K}{1+\tau p}\right)$ en déduire l'expression de K et τ.
12. Donner l'allure de la réponse indicielle $\omega_m(t)$ pour une tension d'alimentation $u(t)$ échelon d'amplitude 12V.
13. Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)}$
14. Mettre $H(p)$ sous la forme canonique d'un système de second ordre $\left(\frac{K_s}{1+2\frac{m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0{}^2}}\right)$ en déduire l'expression de K_s, m et ω_0.
15. Exprimer, en fonction des paramètres du système, la valeur du correcteur K_p permettant d'avoir la réponse la plus rapide sans avoir de dépassement.

Dans la suite on ramène le schéma bloc sous la forme suivante :

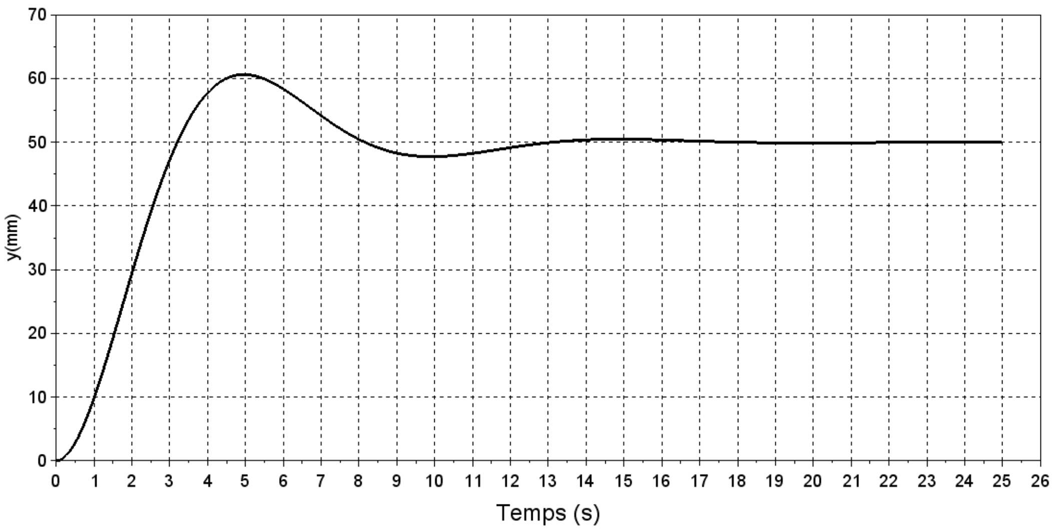


16. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $FTBF(p)$ et en boucle ouverte $FTBO(p)$

Dans la suite, on prendra $\boldsymbol{K_p = 0,5}$

On donne ci-après la réponse indicielle du système de positionnement le long de l'axe « Y » pour une consigne de position $y_c(t) = 50u(t)$ en mm.

17. Déduire le temps de réponse à 5% et l'erreur de position. Conclure quant aux critères de rapidité et de précision sachant que le cahier des charges impose une erreur statique nulle et un temps de réponse minimum de 5s.



***** Fin *****