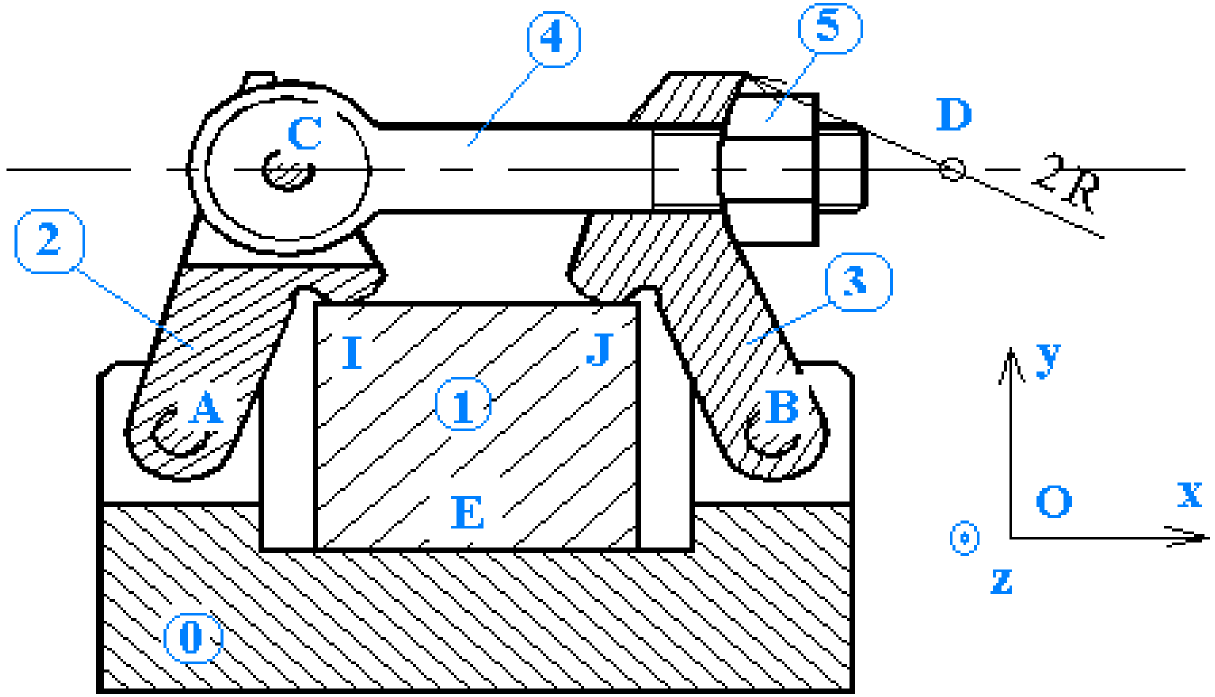
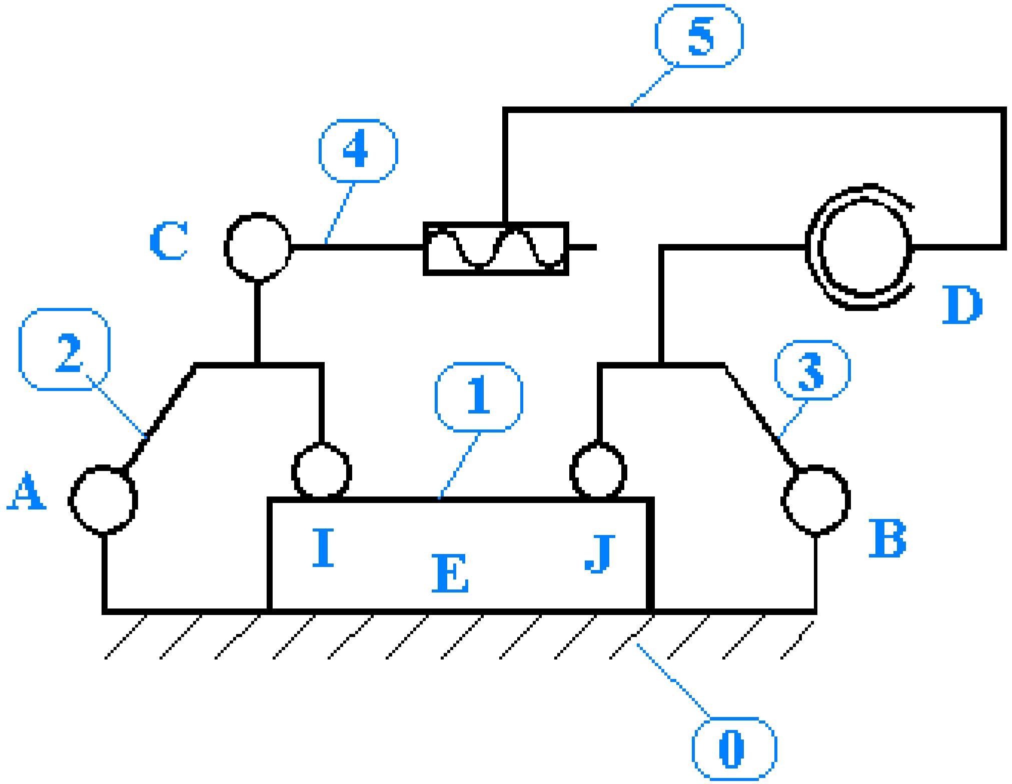
Statique des solides indéformables

LEFI ABDELLAOUI: INGÉNIEUR DOCTEUR AGRÉGÉ EN GÉNIE MÉCANIQUE

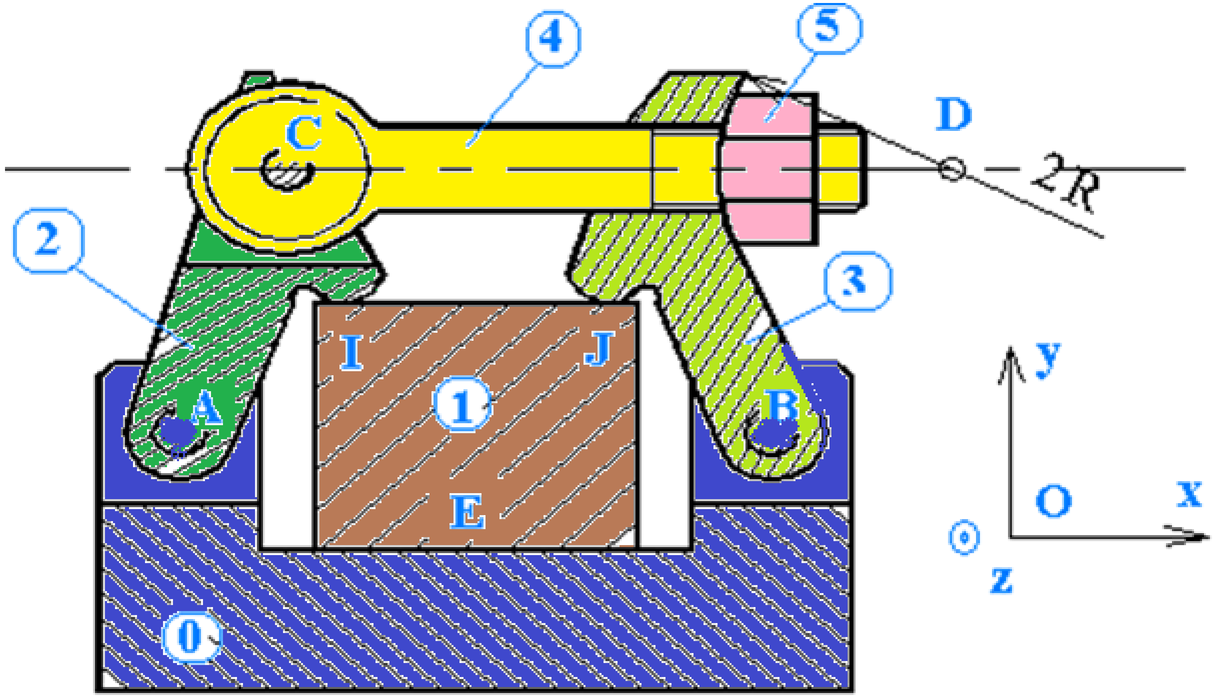
IPEIB 2020

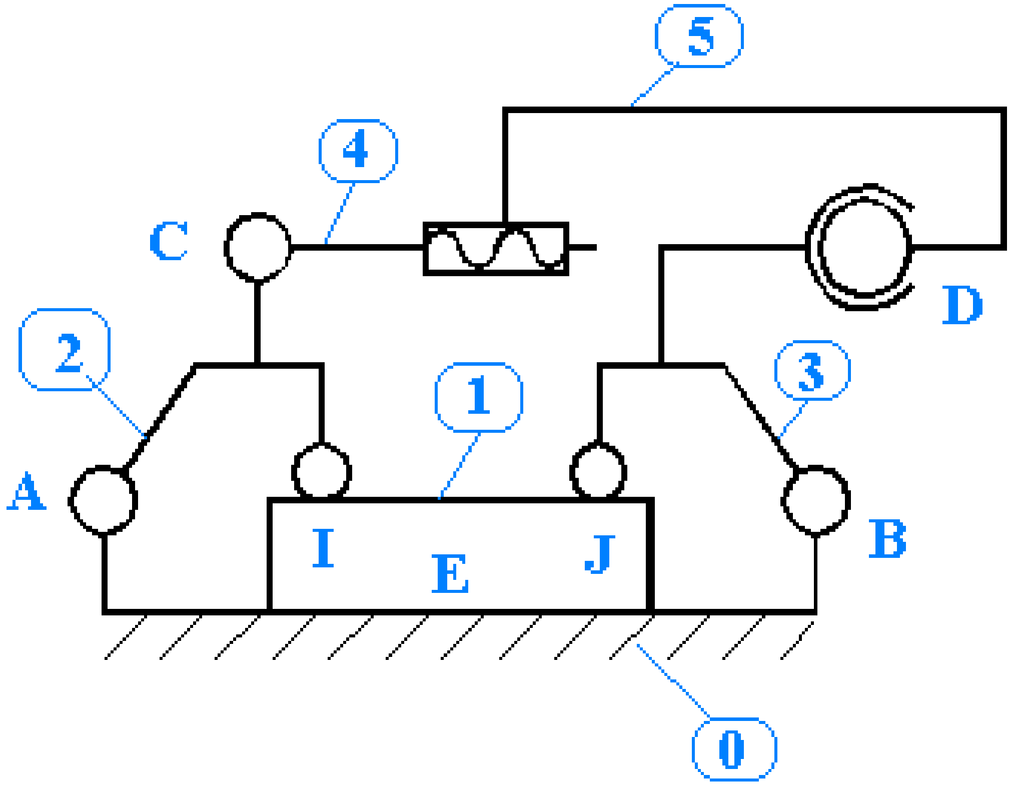
Exercice 1: Système de serrage



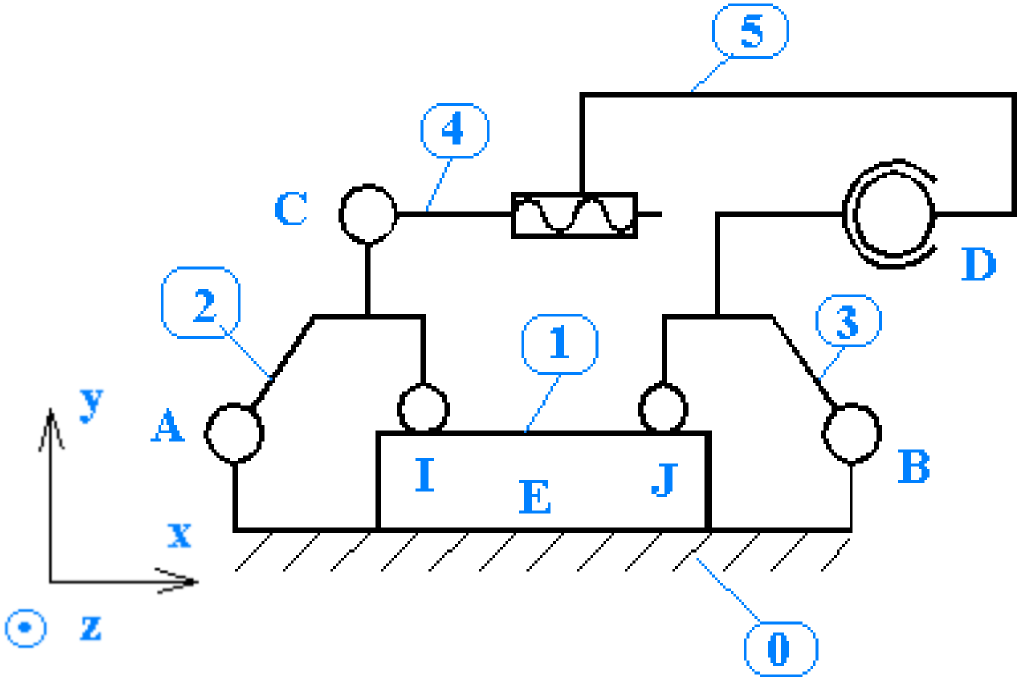


Exercice 1: Système de serrage





Exercice 1: Système de serrage



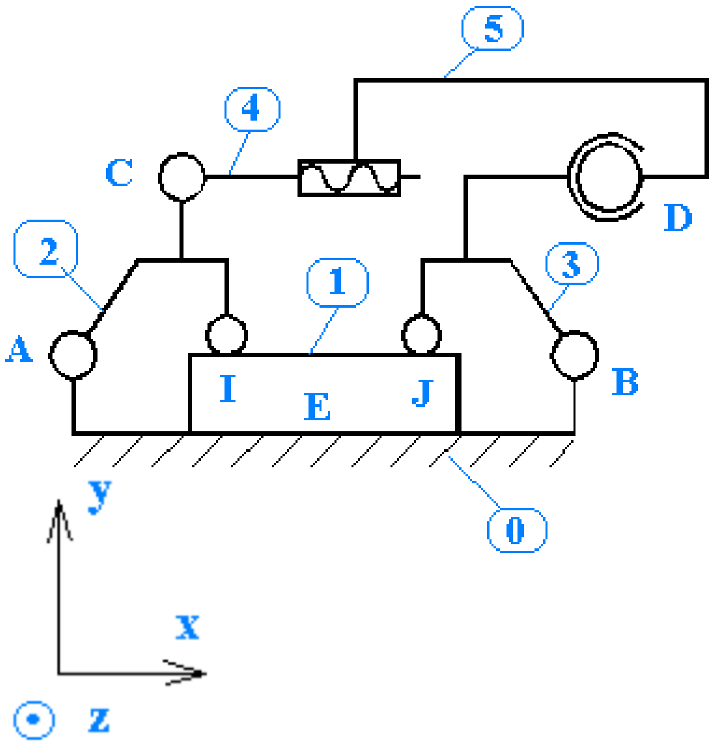
- Le système est au repos,
- L'action mécanique de l'écrou 5 sur la bride 3 au point D est donnée par le torseur suivant :

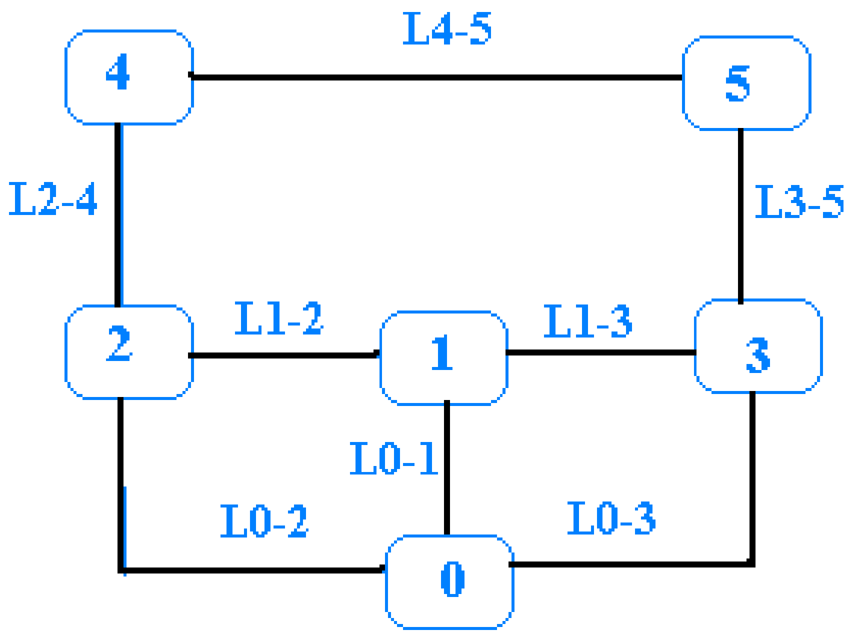
$$\{F(5 \to 3)\}_D = \begin{Bmatrix} -S\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- Au repos, le système est en équilibre par rapport au repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ supposé Galiléen ;
- L'action de la pesanteur est négligée ;
- Les liaisons sont supposées parfaites.

$\boldsymbol{\overrightarrow{AI} = L\vec{x} + h\vec{y}}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{BJ} = -L\vec{x} + h\vec{y}}$, $\boldsymbol{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = d\vec{x} + H\vec{y}}$ **avec** $\boldsymbol{L, d, H\ et\ h}$ **sont des constantes positives.**

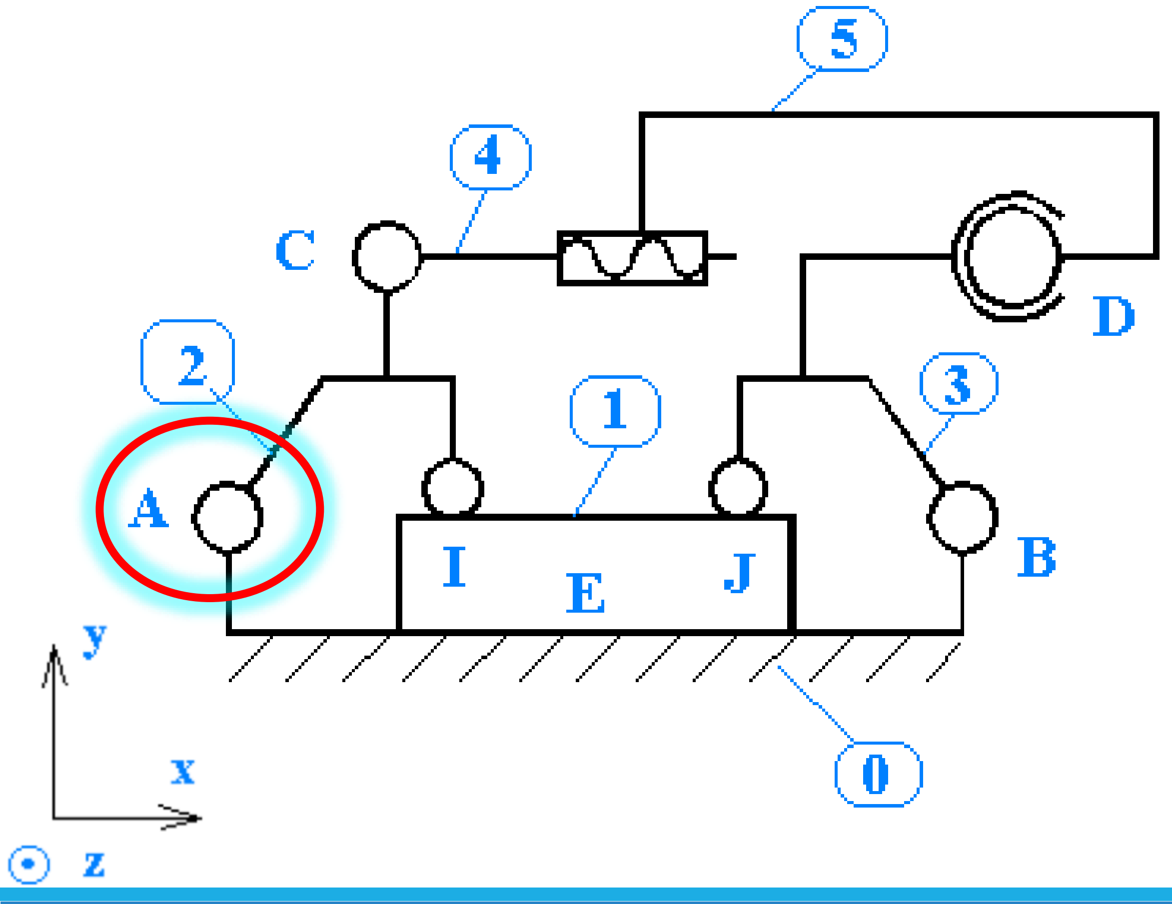
1. Graphe de liaisons





L0-2: pivot d'axe (A,z),
L0-3: pivot d'axe (B,z),
L0-1: appui plan de normale (E,y),
L1-2: appui ponctuelle de normale (I,y),
L1-3: ponctuelle de normale (J,y),
L2-4: pivot d'axe (C,z),
L4-5: hélicoïdale d'axe (C,x),
L3-5: rotule de centre D

2. Torseur statique

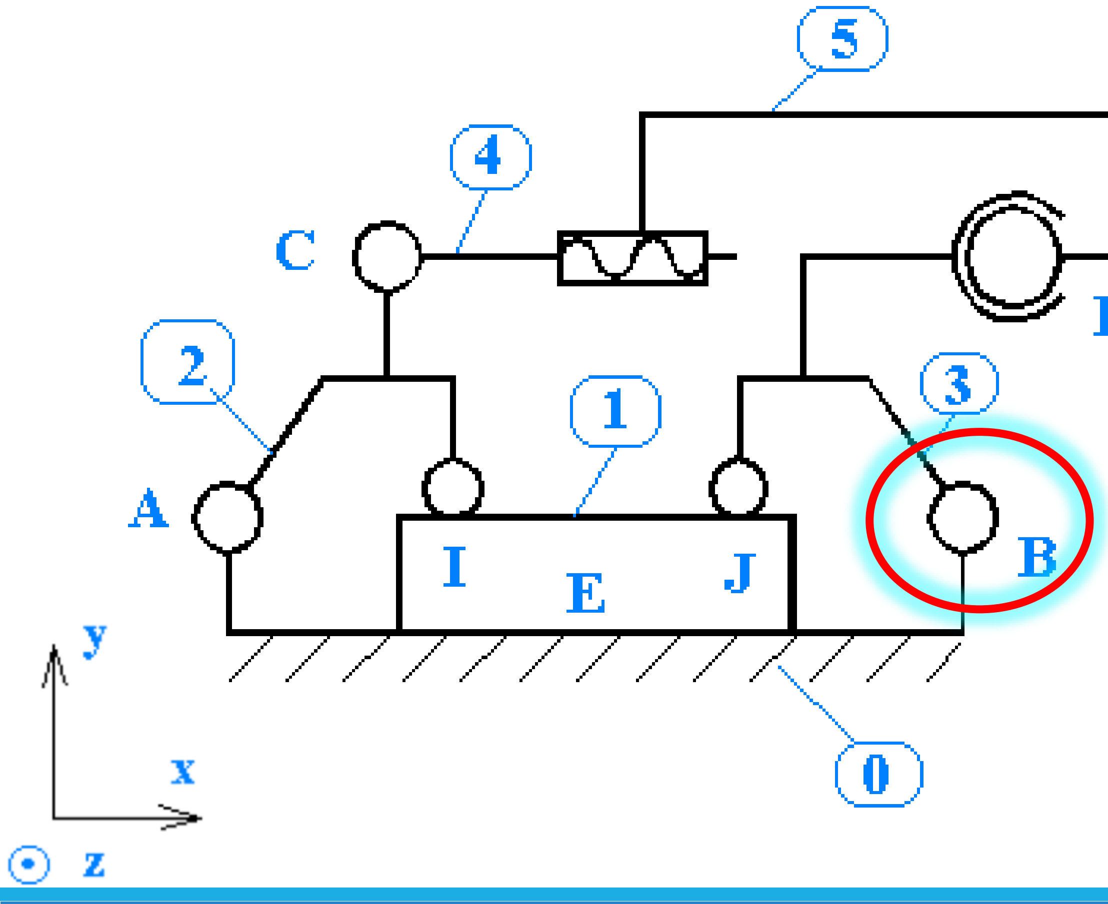


L02 : pivot d'axe $\left(A,\vec{z}\right)$

$$\left\{F\left(0\rightarrow 2\right)\right\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{c|c} X_{02} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & 0 \end{array}\right\}_{R}$$

$N_{s1}=5$

1. Torseur statique

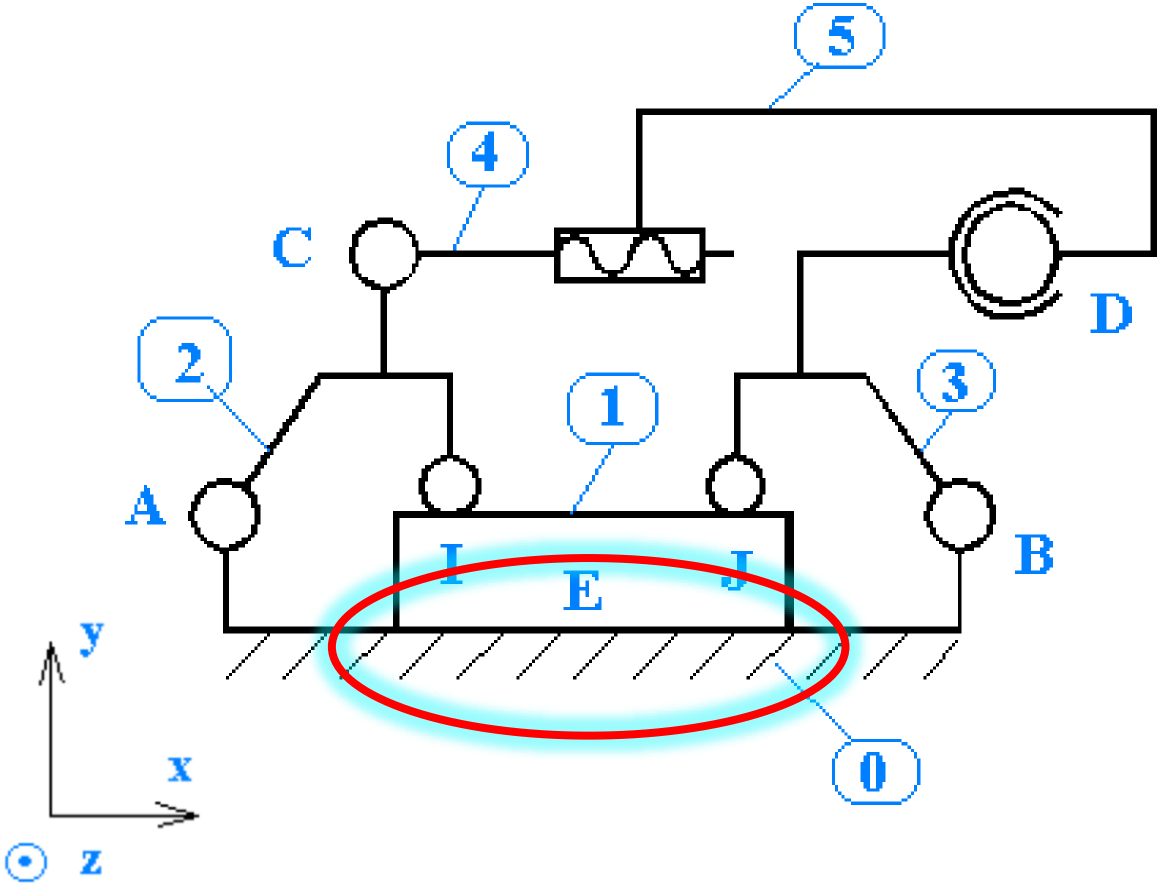


L03 : pivot d'axe $\left(B, \vec{z}\right)$

$$\{F(0 \rightarrow 3)\} = {}_{B}\begin{Bmatrix} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{Bmatrix}_{R}$$

$N_{s2}=5$

1. Torseur statique

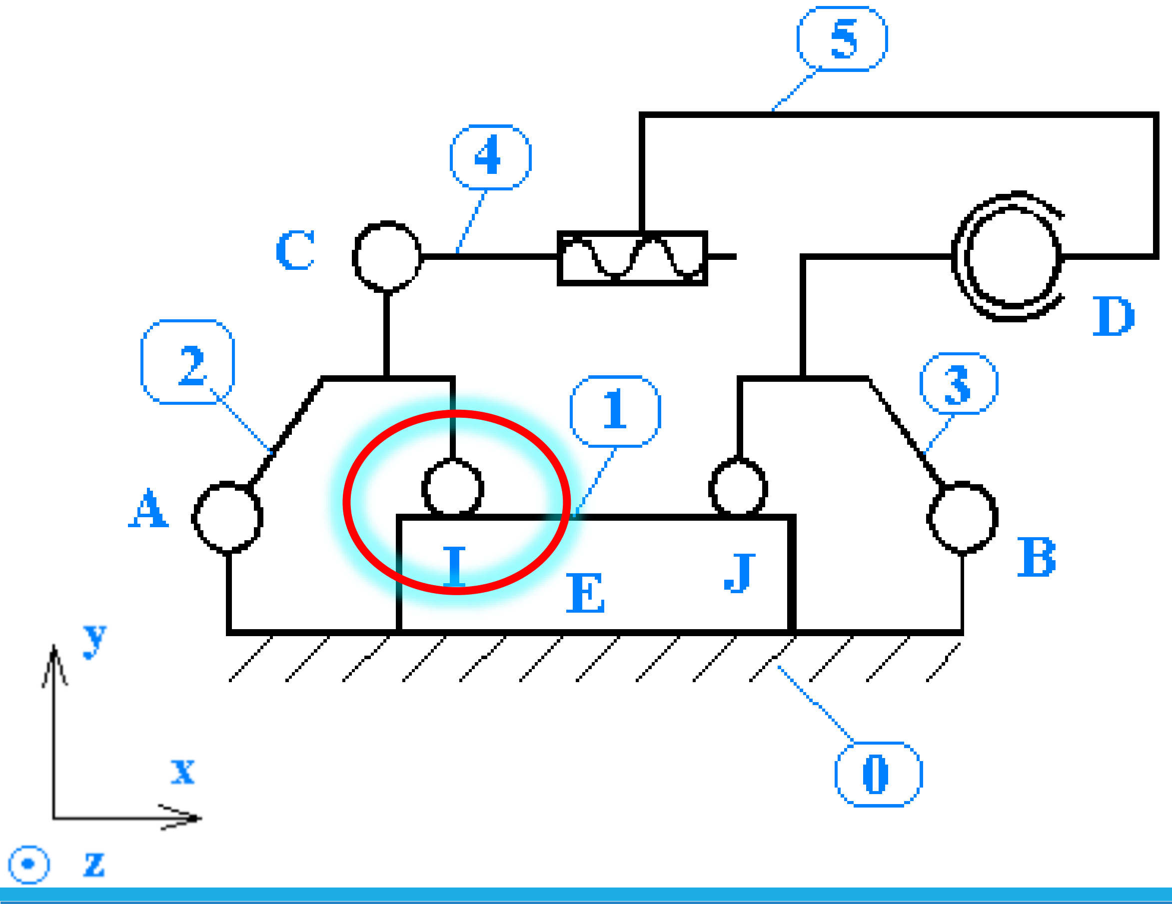


L01 : Appui plan de normale $(E, \vec{y})$

$$\{F(0 \rightarrow 1)\} = {}_{E}\begin{Bmatrix} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{Bmatrix}_{R}$$

$N_{s3}=3$

1. Torseur statique

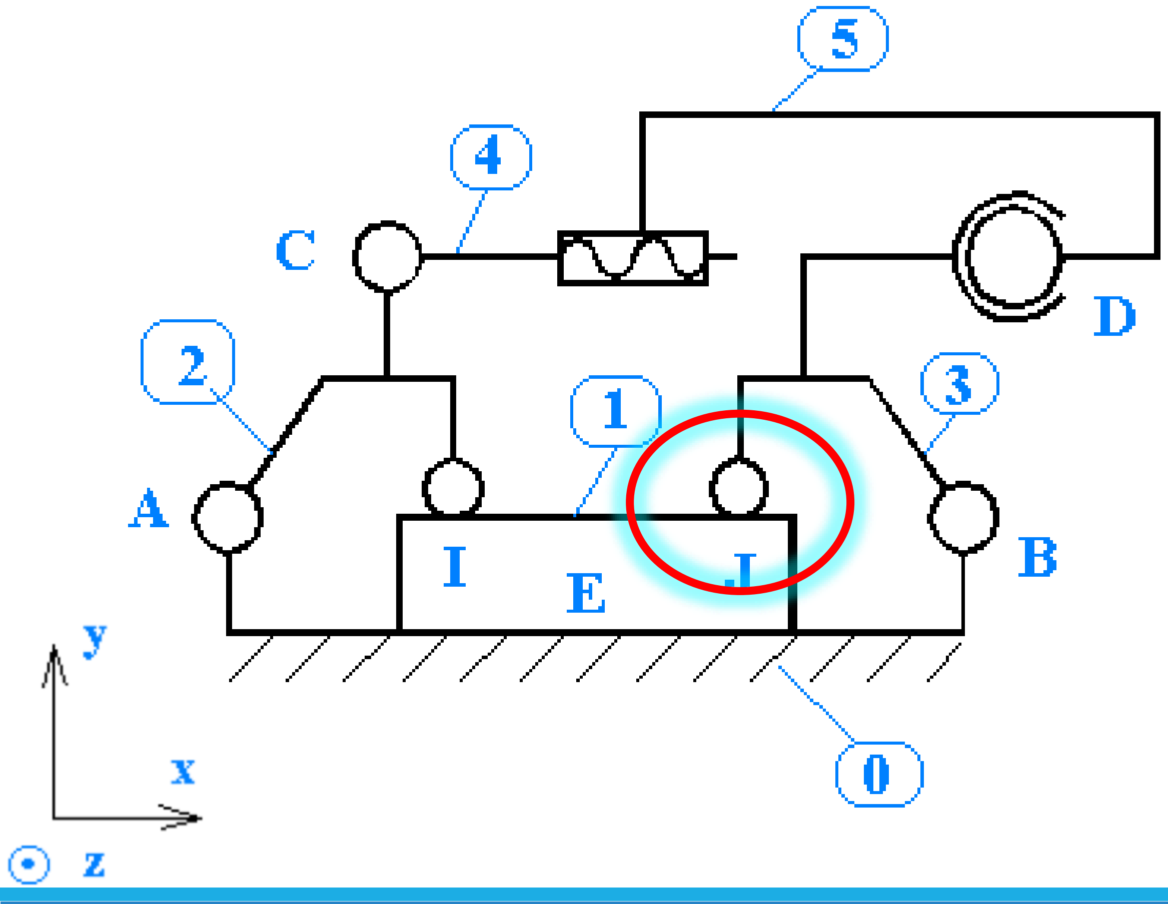


L12 : ponctuelle de normale $(I,\vec{y})$

$$\{F(1\rightarrow 2)\} = {}_{I}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R}$$

$N_{s4}=1$

1. Torseur statique

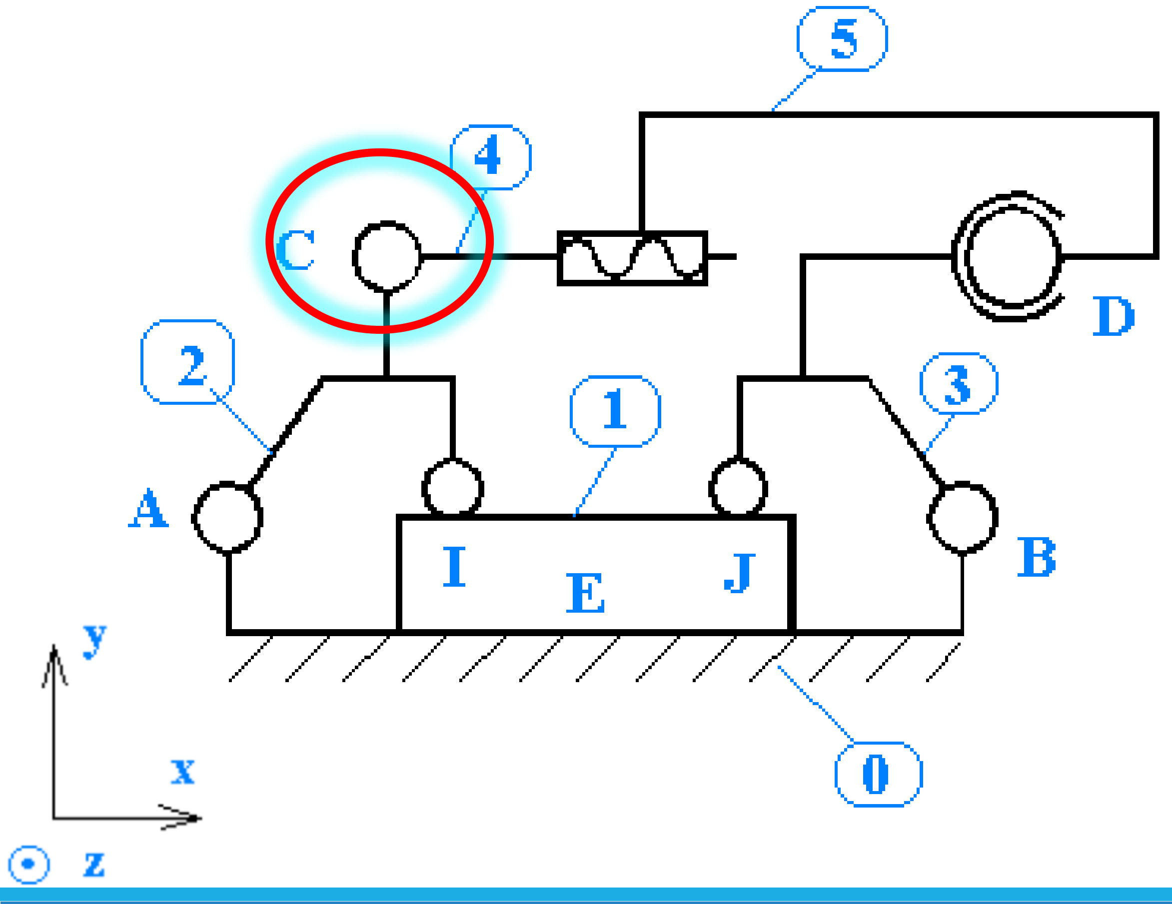


L13 : ponctuelle de normale $(J, \vec{y})$

$$\{F(1 \to 3)\} = {}_J\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{13} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$N_{s5}=1$

1. Torseur statique



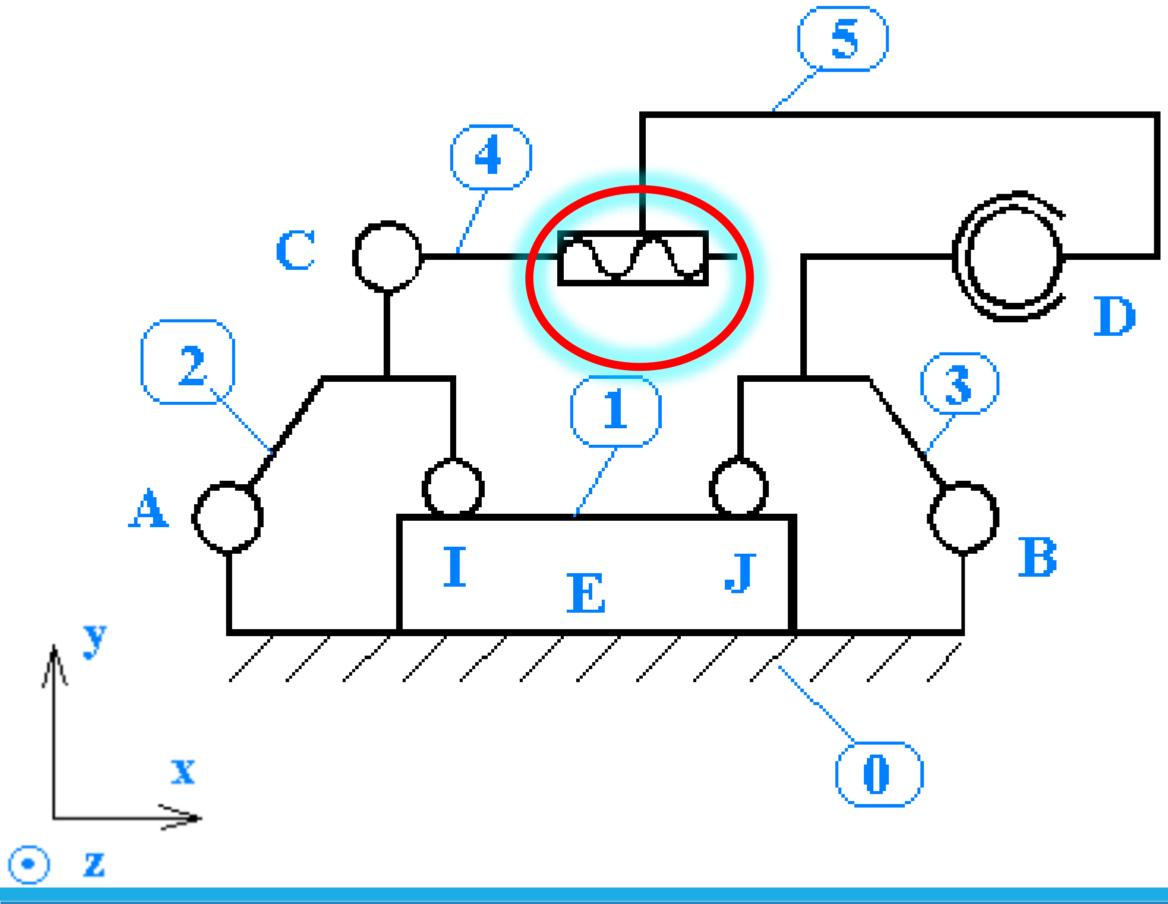
L24 : pivot d'axe $\left(C, \vec{z}\right)$

$$\{F(2\rightarrow 4)\} = {}_C\begin{Bmatrix} X_{24} & L_{24} \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$N_{s6}=5$

ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

1. Torseur statique



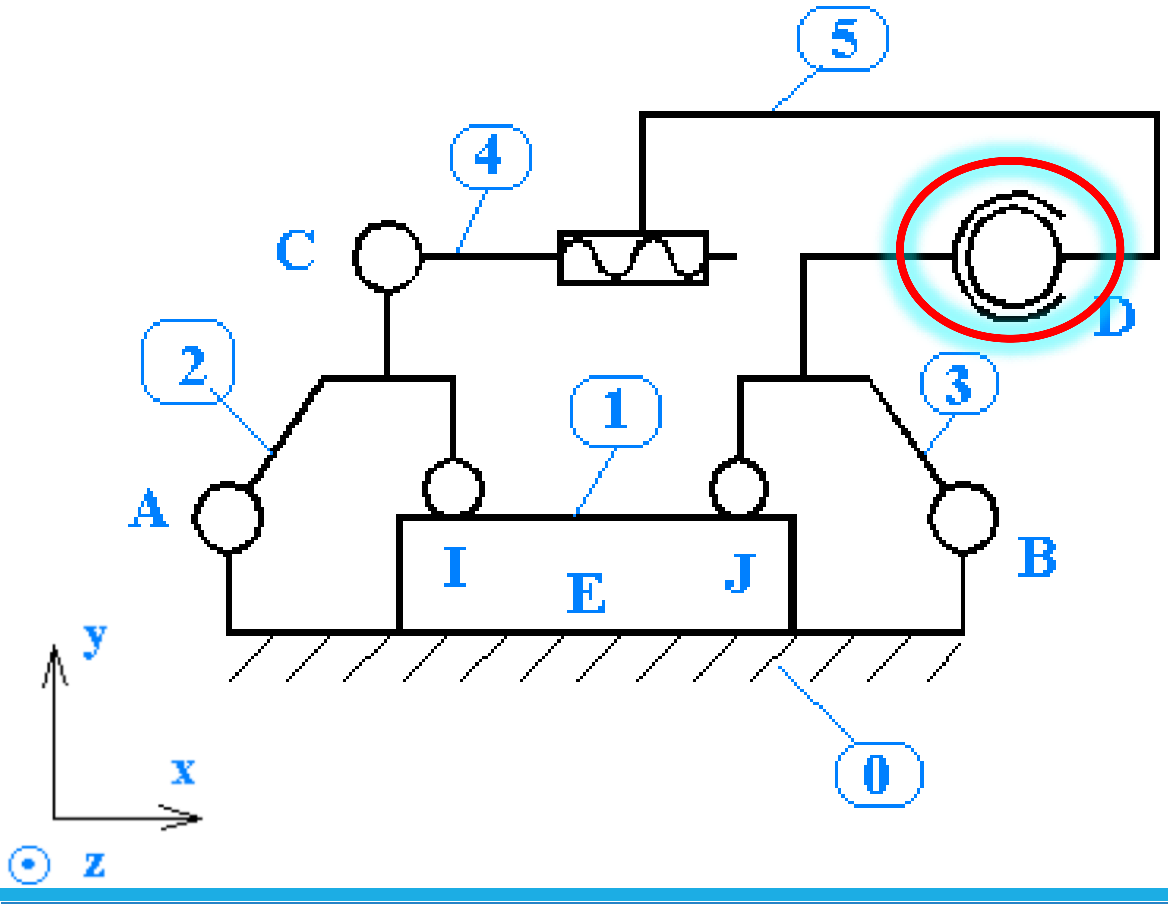
L45 : hélicoïdale d'axe $\left(C, \vec{x}\right)$

$$\left\{F(4 \rightarrow 5)\right\} = \underset{C}{\left\{\begin{array}{c|c} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{array}\right\}}_{R} \quad avec\ L_{45} = \pm p X_{45}$$

p : pas de l'hélice

$N_{s7}=5$

1. Torseur statique



L35 : rotule de centre D

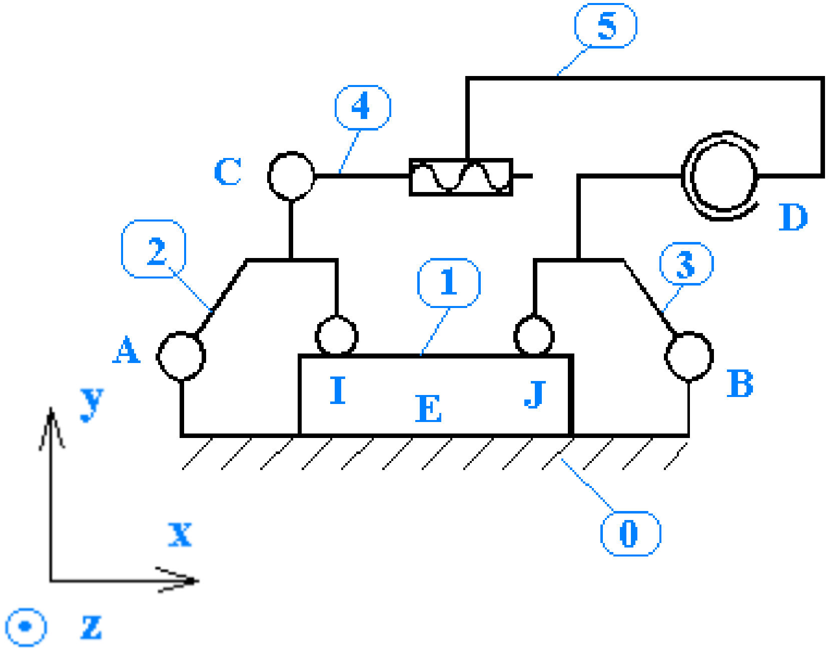
$$\{F(3 \to 5)\} = {}_{D}\begin{Bmatrix} X_{35} & 0 \\ Y_{35} & 0 \\ Z_{35} & 0 \end{Bmatrix}_{R}$$

$N_{s8}=3$

Donnée du problème

ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

1. Torseurs statiques



L02 : pivot d'axe $(A,\vec{z})$ $\{F(0\to 2)\} = {}_A\left\{\begin{array}{c\|c} X_{02} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & 0 \end{array}\right\}_R$ $N_{s1}=5$	L03 : pivot d'axe $(B,\vec{z})$ $\{F(0\to 3)\} = {}_B\left\{\begin{array}{c\|c} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{array}\right\}_R$ $N_{s2}=5$	L01 : Appui plan de normale $(E,\vec{y})$ $\{F(0\to 1)\} = {}_E\left\{\begin{array}{c\|c} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{array}\right\}_R$ $N_{s3}=3$
L12 : ponctuelle de normale $(I,\vec{y})$ $\{F(1\to 2)\} = {}_I\left\{\begin{array}{c\|c} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_R$ $N_{s4}=1$	L13 : ponctuelle de normale $(J,\vec{y})$ $\{F(1\to 3)\} = {}_J\left\{\begin{array}{c\|c} 0 & 0 \\ Y_{13} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_R$ $N_{s5}=1$	L24 : pivot d'axe $(C,\vec{z})$ $\{F(2\to 4)\} = {}_C\left\{\begin{array}{c\|c} X_{24} & L_{24} \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & 0 \end{array}\right\}_R$ $N_{s6}=5$
L45 : hélicoïdale d'axe $(C,\vec{x})$ $\{F(4\to 5)\} = {}_C\left\{\begin{array}{c\|c} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{array}\right\}_R$ $avec\ L_{45} = \pm pX_{45}$ p : pas de l'hélice $N_{s7}=5$	L35 : rotule de centre D $\{F(3\to 5)\} = {}_D\left\{\begin{array}{c\|c} X_{35} & 0 \\ Y_{35} & 0 \\ Z_{35} & 0 \end{array}\right\}_R$ $N_{s8}=3$ Donnée du problème	

Remarques

Le nombre d'inconnues statiques (inconnues des torseurs d'action mécanique des liaisons) est égal à 28 inconnues ;

Pour trouver ces inconnues on a besoin de 28 équations indépendantes déduites à partir du principe fondamental de la statique appliqué sur les pièces (1, 2, 3, 4 et 5).

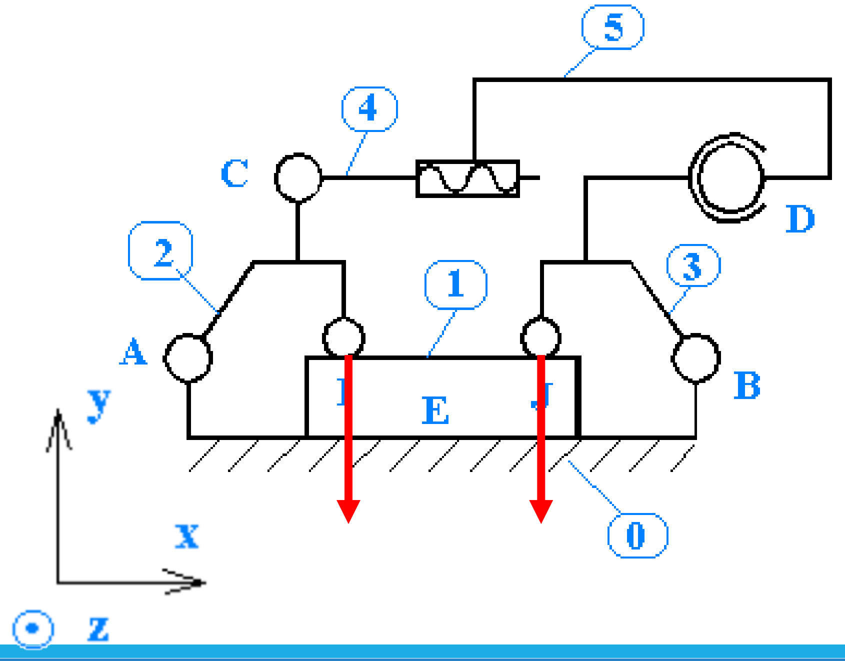
En appliquant le principe fondamental de la statique sur les cinq pièces on aura 30 équations à voir si elles sont indépendantes.

Remarques

Comme donnée du problème, on a le torseur d'action mécanique de l'écrou **5** sur la bride **3** au point **D** qui est l'opposée du torseur d'action mécanique de la liaison L35. par conséquent on aura le système d'équations suivant :

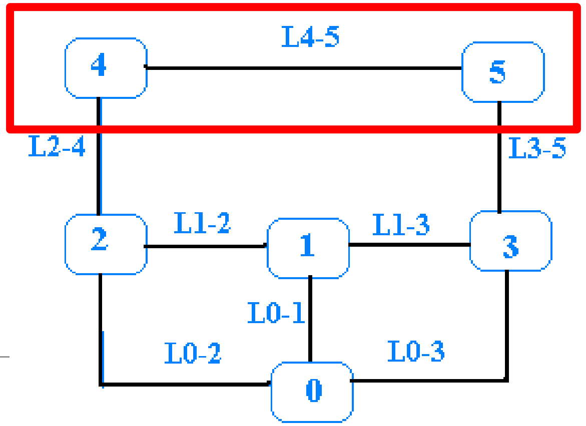
$$\begin{cases} X_{35} = S \\ Y_{35} = 0 \\ Z_{35} = 0 \end{cases}$$

Les inconnues sont : Y_{21} *et* Y_{31}



ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

3. Ecrire les équations qui découlent du théorème de la résultante statique appliqué sur l'ensemble (4 et 5).



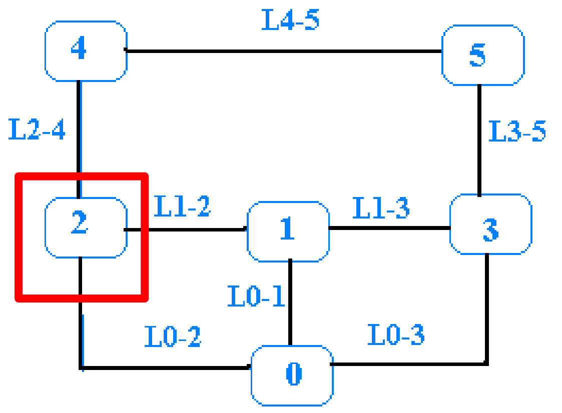
L02 : pivot d'axe $(A,\vec{z})$ $\{F(0\to 2)\} = {}_A\left\{\begin{matrix} X_{02} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & 0 \end{matrix}\right\}_R$ $N_{s1}=5$	L03 : pivot d'axe $(B,\vec{z})$ $\{F(0\to 3)\} = {}_B\left\{\begin{matrix} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{matrix}\right\}_R$ $N_{s2}=5$	L01 : Appui plan de normale $(E,\vec{y})$ $\{F(0\to 1)\} = {}_E\left\{\begin{matrix} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{matrix}\right\}_R$ $N_{s3}=3$
L12 : ponctuelle de normale $(I,\vec{y})$ $\{F(1\to 2)\} = {}_I\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_R$ $N_{s4}=1$	L13 : ponctuelle de normale $(J,\vec{y})$ $\{F(1\to 3)\} = {}_J\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{13} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_R$ $N_{s5}=1$	L24 : pivot d'axe $(C,\vec{z})$ $\{F(2\to 4)\} = {}_C\left\{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} X_{24} \\ Y_{24} \\ Z_{24} \end{matrix}} & \begin{matrix} L_{24} \\ M_{24} \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}\right\}_R$ $N_{s6}=5$
L45 : hélicoïdale d'axe $(C,\vec{x})$ $\{F(4\to 5)\} = {}_C\left\{\begin{matrix} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{matrix}\right\}_R$ *avec* $L_{45} = \pm p X_{45}$ p : pas de l'hélice $N_{s7}=5$	L35 : rotule de centre D $\{F(3\to 5)\} = {}_D\left\{\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} X_{35} \\ Y_{35} \\ Z_{35} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}\right\}_R$ $N_{s8}=3$ Donnée du problème	

$$E_1 = \{4,5\} \qquad \bar{E}_1 = \{2,3\}$$

$$\vec{R}(\bar{E}_1 \to E_1) = \boxed{\vec{R}(2\to 4)} + \boxed{\vec{R}(3\to 5)} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} X_{24} + X_{35} = 0 \\ Y_{24} + Y_{35} = 0 \\ Z_{24} + Z_{35} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} X_{24} = -S \\ Y_{24} = 0 \\ Z_{24} = 0 \end{cases}$$

4. Ecrire les équations qui découlent du théorème du moment statique appliqué au point A sur la bride 2 et déduire l’action de la bride 2 sur la pièce 1.



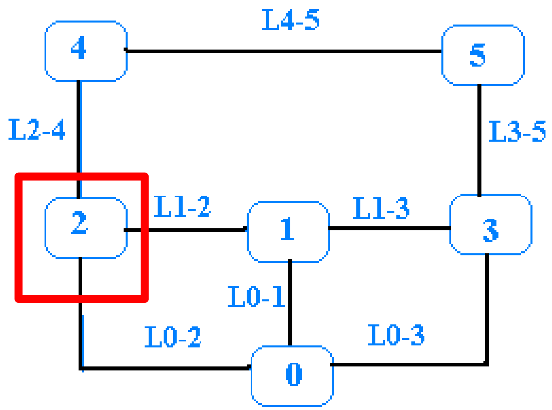
L02 : pivot d’axe $(A,\vec{z})$ $\{F(0\to 2)\} = \boxed{\left\{\begin{matrix} X_{02} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & 0 \end{matrix}\right\}_{A,R}}$ $N_{s1}=5$	L03 : pivot d’axe $(B,\vec{z})$ $\{F(0\to 3)\} = \left\{\begin{matrix} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{matrix}\right\}_{B,R}$ $N_{s2}=5$	L01 : Appui plan de normale $(E,\vec{y})$ $\{F(0\to 1)\} = \left\{\begin{matrix} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{matrix}\right\}_{E,R}$ $N_{s3}=3$
L12 : ponctuelle de normale $(I,\vec{y})$ $\{F(1\to 2)\} = \boxed{\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{I,R}}$ $N_{s4}=1$	L13 : ponctuelle de normale $(J,\vec{y})$ $\{F(1\to 3)\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{13} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{J,R}$ $N_{s5}=1$	L24 : pivot d’axe $(C,\vec{z})$ $\{F(2\to 4)\} = \boxed{\left\{\begin{matrix} X_{24} & L_{24} \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & 0 \end{matrix}\right\}_{C,R}}$ $N_{s6}=5$
L45 : hélicoïdale d’axe $(C,\vec{x})$ $\{F(4\to 5)\} = \left\{\begin{matrix} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{matrix}\right\}_{C,R}$ *avec* $L_{45} = \pm p X_{45}$ p : pas de l’hélice $N_{s7}=5$	L35 : rotule de centre D $\{F(3\to 5)\} = \left\{\begin{matrix} X_{35} & 0 \\ Y_{35} & 0 \\ Z_{35} & 0 \end{matrix}\right\}_{D,R}$ $N_{s8}=3$ Donnée du problème	

$$\overline{2} = \{0,1,4\}$$

$$\vec{M}_A(\overline{2}\to 2) = \boxed{\vec{M}_A(0\to 2)} + \boxed{\vec{M}_A(1\to 2)} + \boxed{\vec{M}_A(4\to 2)}$$

$$\vec{M}_A(0\to 2) = \left|\begin{matrix} L_{02} \\ M_{02} \\ N_{02} \end{matrix}\right._{R}$$

4. Ecrire les équations qui découlent du théorème du moment statique appliqué au point A sur la bride 2 et déduire l'action de la bride 2 sur la pièce 1.



L02 : pivot d'axe $(A,\vec z)$ $\{F(0\to2)\} = \boxed{\left\{\begin{array}{c\|c} X_{02} & L_{02}\\ Y_{02} & M_{02}\\ Z_{02} & 0\end{array}\right\}_{A}}_{R}$ $N_{s1}=5$	L03 : pivot d'axe $(B,\vec z)$ $\{F(0\to3)\} = \left\{\begin{array}{c\|c} X_{03} & L_{03}\\ Y_{03} & M_{03}\\ Z_{03} & 0\end{array}\right\}_{B\,R}$ $N_{s2}=5$	L01 : Appui plan de normale $(E,\vec y)$ $\{F(0\to1)\} = \left\{\begin{array}{c\|c} 0 & L_{01}\\ Y_{01} & 0\\ 0 & N_{01}\end{array}\right\}_{E\,R}$ $N_{s3}=3$
L12 : ponctuelle de normale $(I,\vec y)$ $\{F(1\to2)\} = \boxed{\left\{\begin{array}{c\|c} 0 & 0\\ Y_{12} & 0\\ 0 & 0\end{array}\right\}}$ $N_{s4}=1$	L13 : ponctuelle de normale $(J,\vec y)$ $\{F(1\to3)\} = \left\{\begin{array}{c\|c} 0 & 0\\ Y_{13} & 0\\ 0 & 0\end{array}\right\}_{J\,R}$ $N_{s5}=1$	L24 : pivot d'axe $(C,\vec z)$ $\{F(2\to4)\} = \boxed{\left\{\begin{array}{c\|c} X_{24} & L_{24}\\ Y_{24} & M_{24}\\ Z_{24} & 0\end{array}\right\}_{C\,R}}$ $N_{s6}=5$
L45 : hélicoïdale d'axe $(C,\vec x)$ $\{F(4\to5)\} = \left\{\begin{array}{c\|c} X_{45} & L_{45}\\ Y_{45} & M_{45}\\ Z_{45} & N_{45}\end{array}\right\}_{C\,R}$ *avec* $L_{45} = \pm p X_{45}$ p : pas de l'hélice $N_{s7}=5$	L35 : rotule de centre D $\{F(3\to5)\} = \left\{\begin{array}{c\|c} X_{35} & 0\\ Y_{35} & 0\\ Z_{35} & 0\end{array}\right\}_{D\,R}$ $N_{s8}=3$ Donnée du problème	

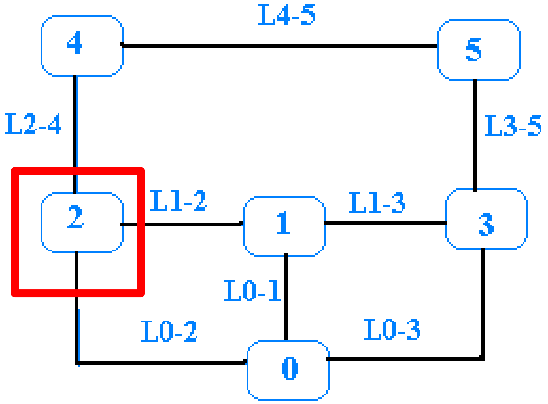
$$\overline{2} = \{0,1,4\}$$

$$\vec M_A(\overline{2}\to 2) = \boxed{\vec M_A(0\to 2)} + \boxed{\vec M_A(1\to 2)} + \boxed{\vec M_A(4\to 2)}$$

$$\vec M_A(1\to 2) = \vec M_I(1\to 2) + \overrightarrow{AI}\wedge \vec R\,(1\to 2)$$

$$\vec M_A(1\to 2) = \left|\begin{array}{l} L\\ h\\ 0\end{array}\right._R \wedge \left|\begin{array}{l} 0\\ Y_{12}\\ 0\end{array}\right._R = \left|\begin{array}{l} 0\\ 0\\ LY_{12}\end{array}\right._R$$

4. Ecrire les équations qui découlent du théorème du moment statique appliqué au point A sur la bride 2 et déduire l'action de la bride 2 sur la pièce 1.



L02 : pivot d'axe $(A,\vec{z})$ $\{F(0\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c\|c} X_{02} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & 0 \end{array}\right\}_{A\,R}$ $N_{s1}=5$	L03 : pivot d'axe $(B,\vec{z})$ $\{F(0\rightarrow 3)\}=\left\{\begin{array}{c\|c} X_{03} & L_{03} \\ Y_{03} & M_{03} \\ Z_{03} & 0 \end{array}\right\}_{B\,R}$ $N_{s2}=5$	L01 : Appui plan de normale $(E,\vec{y})$ $\{F(0\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{c\|c} 0 & L_{01} \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & N_{01} \end{array}\right\}_{E\,R}$ $N_{s3}=3$
L12 : ponctuelle de normale $(I,\vec{y})$ $\{F(1\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{c\|c} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}$ $N_{s4}=1$	L13 : ponctuelle de normale $(J,\vec{y})$ $\{F(1\rightarrow 3)\}=\left\{\begin{array}{c\|c} 0 & 0 \\ Y_{13} & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{J\,R}$ $N_{s5}=1$	L24 : pivot d'axe $(C,\vec{z})$ $\{F(2\rightarrow 4)\}=\left\{\begin{array}{c\|c} X_{24} & L_{24} \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & 0 \end{array}\right\}_{C\,R}$ $N_{s6}=5$
L45 : hélicoïdale d'axe $(C,\vec{x})$ $\{F(4\rightarrow 5)\}=\left\{\begin{array}{c\|c} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & N_{45} \end{array}\right\}_{C\,R}$ *avec* $L_{45}=\pm pX_{45}$ p : pas de l'hélice $N_{s7}=5$	L35 : rotule de centre D $\{F(3\rightarrow 5)\}=\left\{\begin{array}{c\|c} X_{35} & 0 \\ Y_{35} & 0 \\ Z_{35} & 0 \end{array}\right\}_{D\,R}$ $N_{s8}=3$ Donnée du problème	

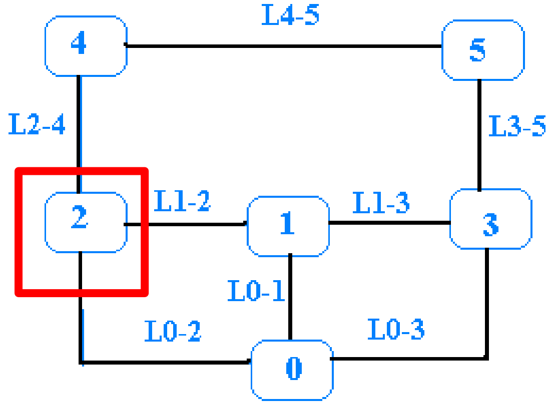
$$\bar{2}=\{0,1,4\}$$

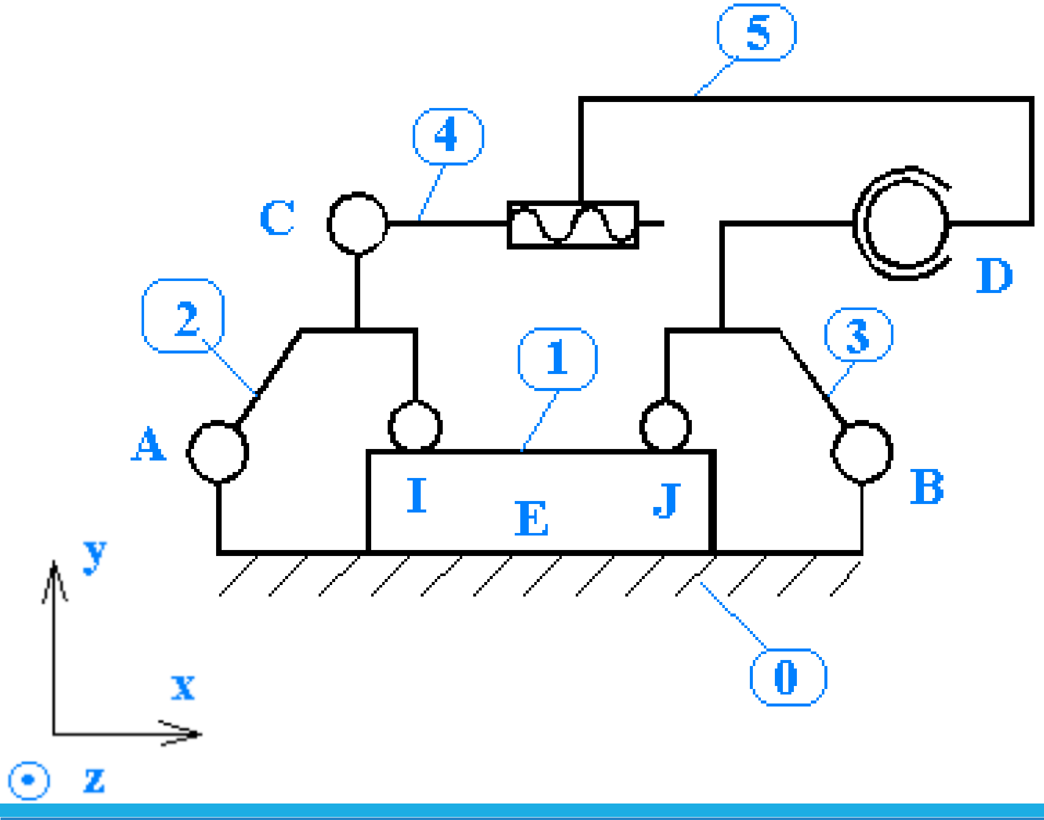
$$\vec{M}_A(\bar{2}\rightarrow 2)=\boxed{\vec{M}_A(0\rightarrow 2)}+\boxed{\vec{M}_A(1\rightarrow 2)}+\boxed{\vec{M}_A(4\rightarrow 2)}$$

$$\vec{M}_A(4\rightarrow 2)=\vec{M}_C(4\rightarrow 2)+\overrightarrow{AC}\wedge\vec{R}\;(4\rightarrow 2)$$

$$\vec{M}_A(4\rightarrow 2)={}_R\begin{vmatrix}-L_{24}\\-M_{24}\\0\end{vmatrix}+{}_R\begin{vmatrix}d\\H\\0\end{vmatrix}\wedge{}_R\begin{vmatrix}S\\0\\0\end{vmatrix}={}_R\begin{vmatrix}-L_{24}\\-M_{24}\\-HS\end{vmatrix}$$

4. Ecrire les équations qui découlent du théorème du moment statique appliqué au point A sur la bride 2 et déduire l'action de la bride 2 sur la pièce 1.





$$\overline{2}=\{0,1,4\}$$

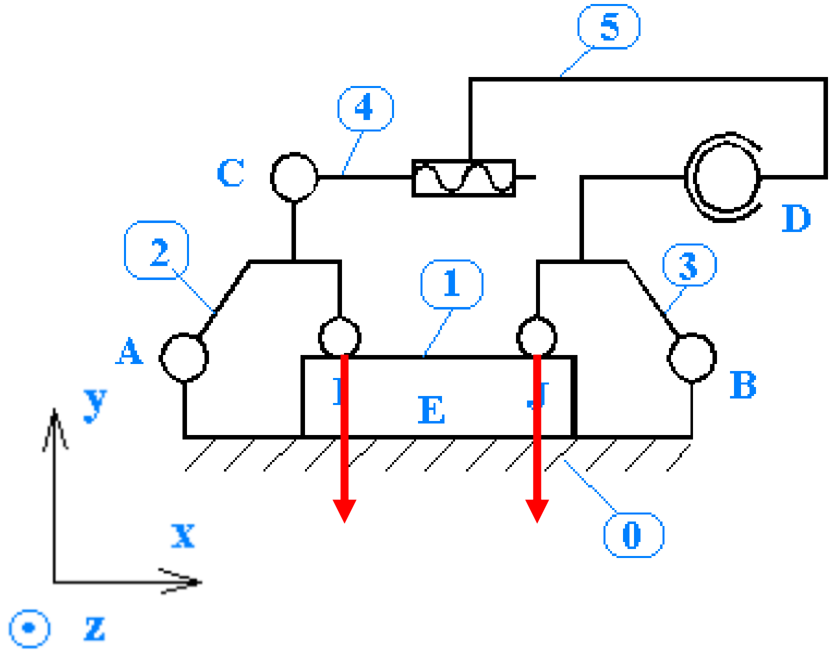
$$\vec{M}_A(\overline{2}\rightarrow 2)=\vec{M}_A(0\rightarrow 2)+\vec{M}_A(1\rightarrow 2)+\vec{M}_A(4\rightarrow 2)$$

$$\begin{cases} L_{02}-L_{24}=0 & (4) \\ M_{02}-M_{24}=0 & (5) \\ LY_{12}-HS=0 & (6) \end{cases}$$

$$Y_{12}=\underbrace{\frac{H}{L}}_{\text{rapport de deux distance}}\underbrace{S}_{\text{effort de serrage}}$$

ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

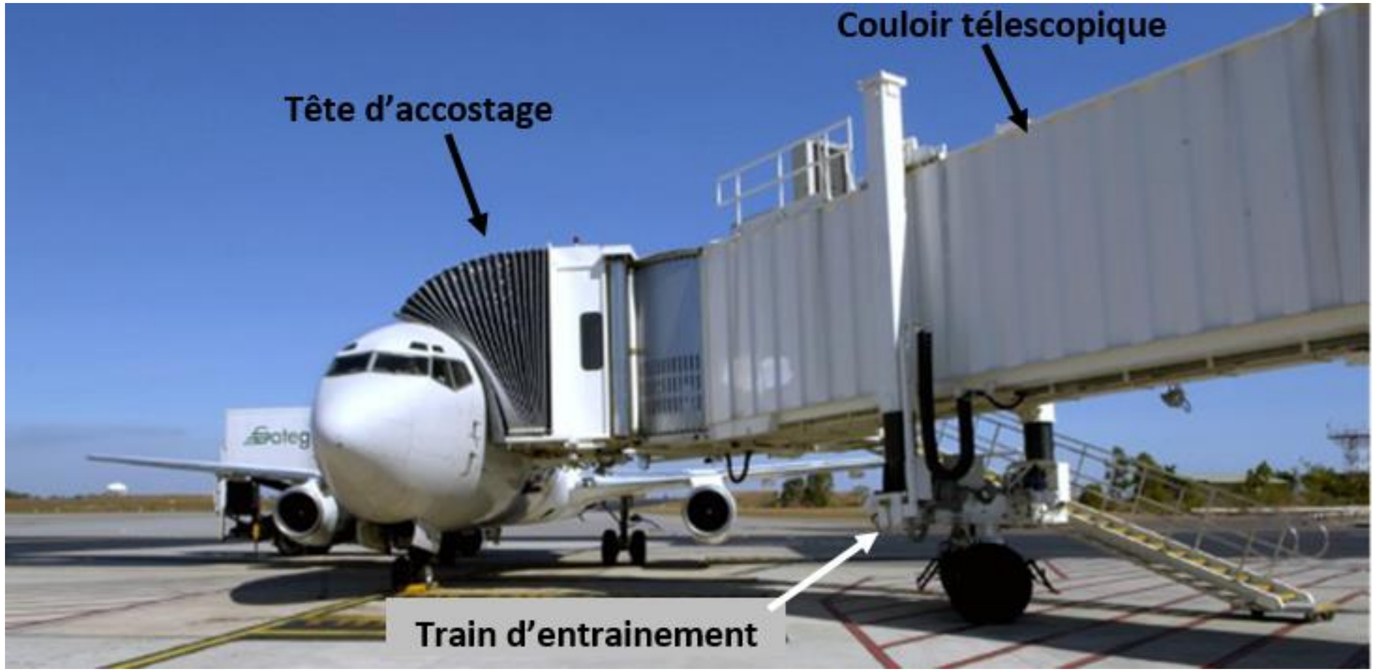
4. Ecrire les équations qui découlent du théorème du moment statique appliqué au point B sur la bride 3 et déduire l'action de la bride 3 sur la pièce 1.

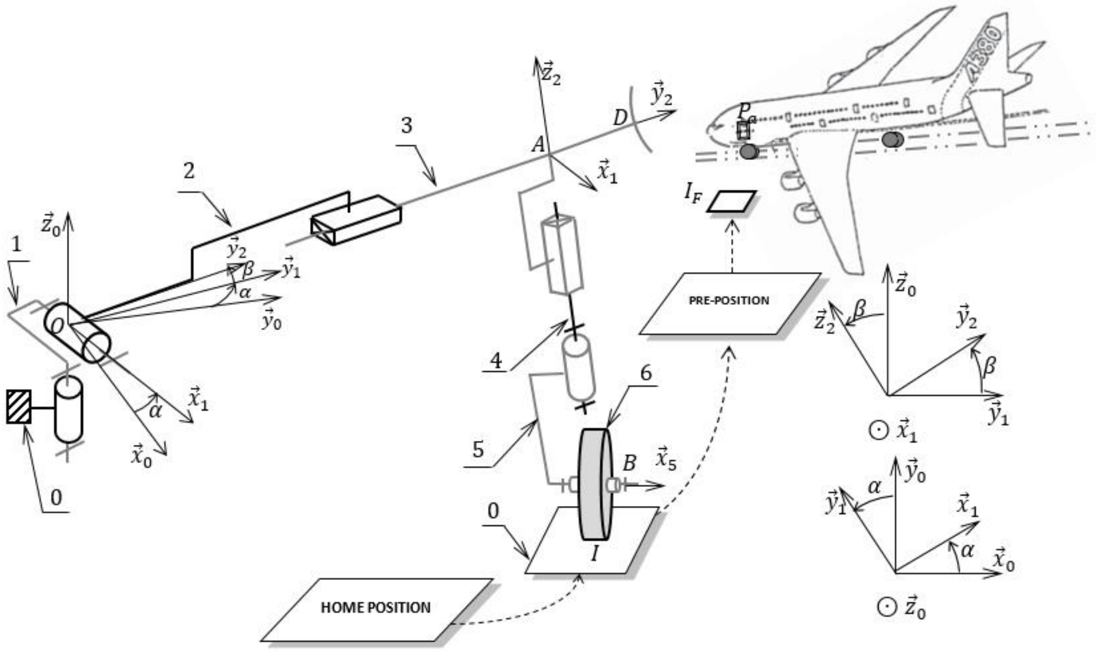


De meme on trouve:

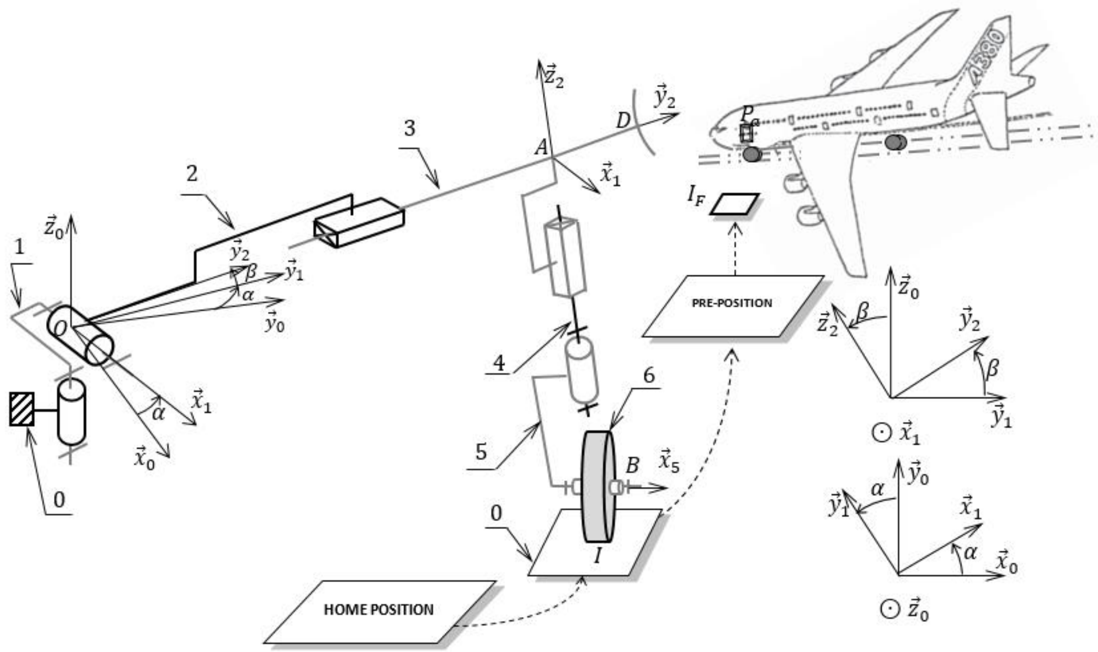
$$Y_{31} = -Y_{13} = -\frac{H}{L} S$$

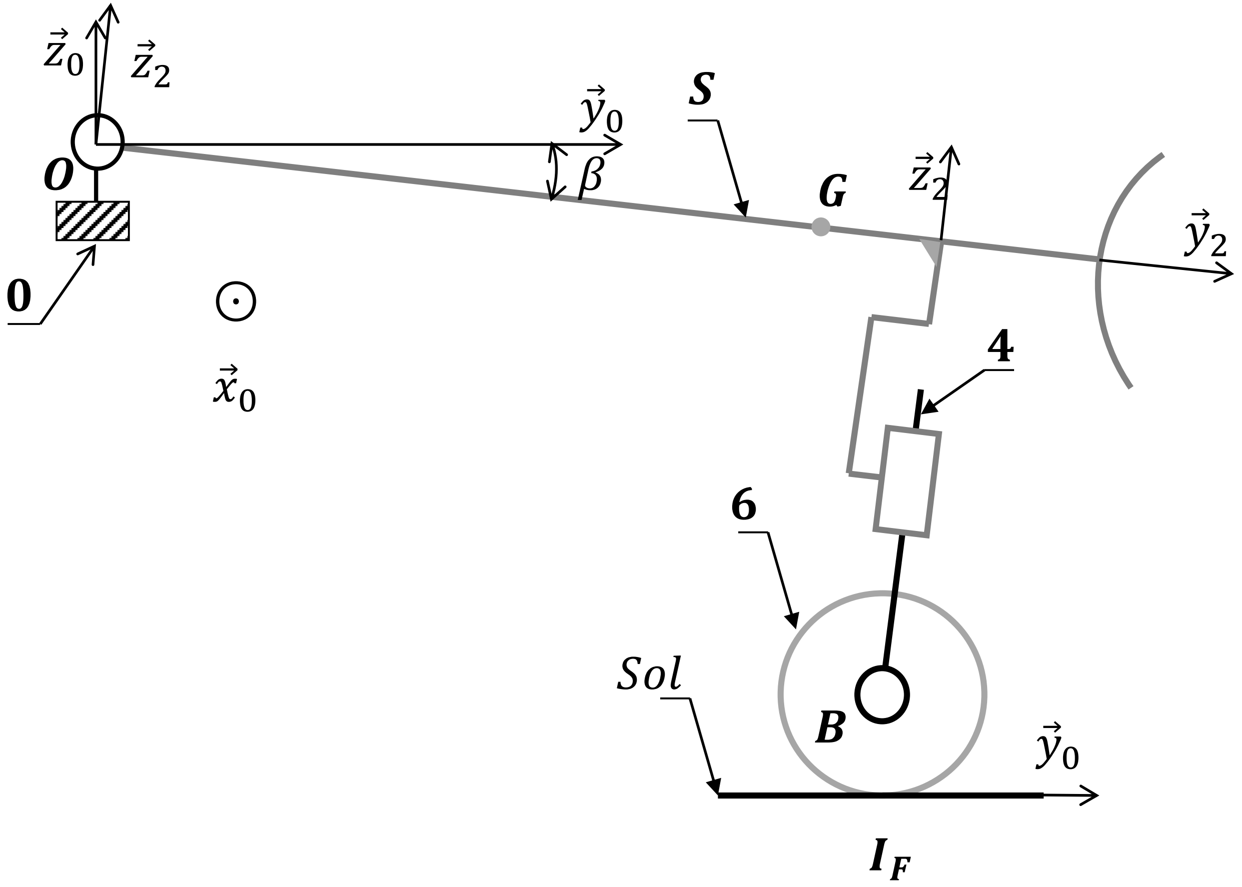
Exercice 4: Passerelle télescopique (CNIM2017)





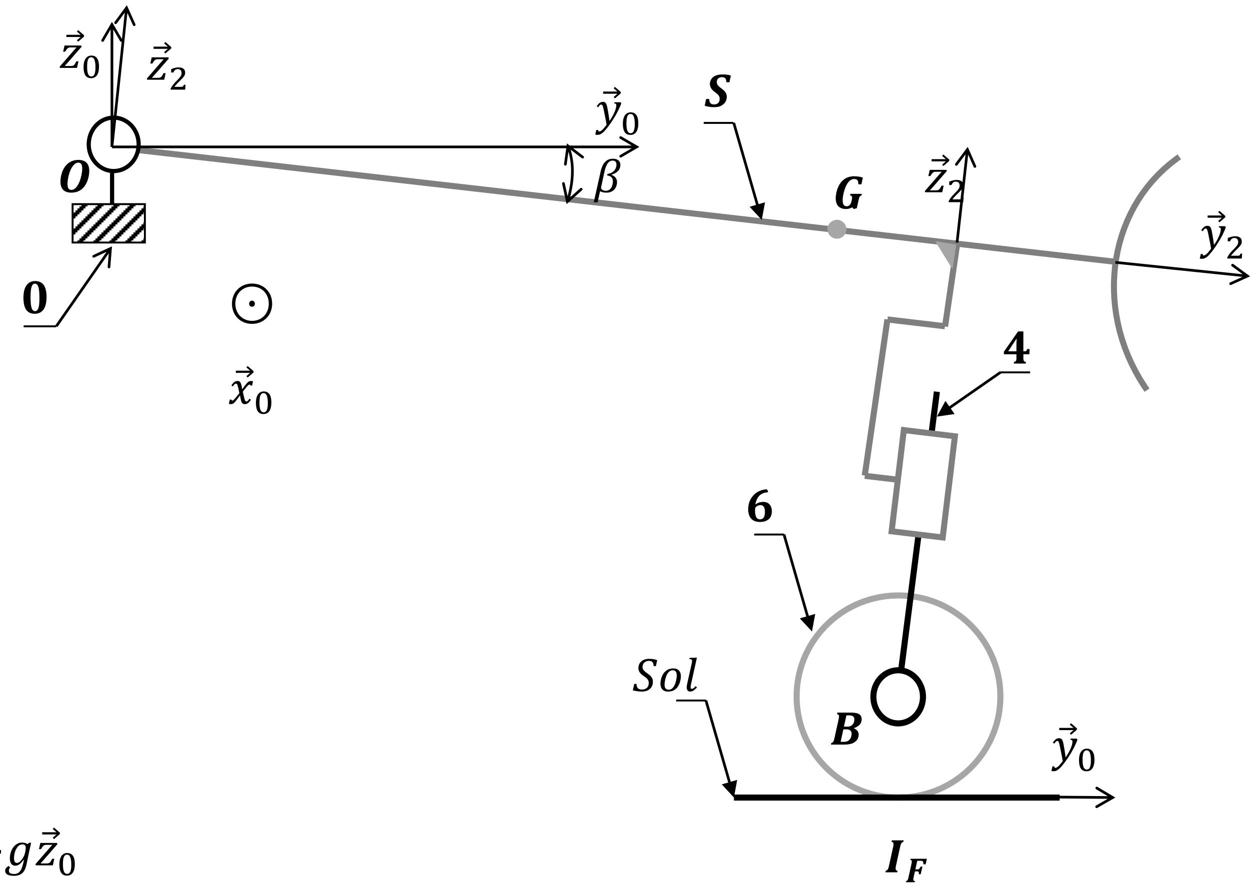
Exercice 4: Passerelle télescopique (CNIM2017)





Exercice 4: Passerelle télescopique (CNIM2017)

- L'angle α=constante=0°.
- La passerelle est supposée en équilibre.
- Dans cette configuration, l'ensemble des deux couloirs (2) et (3) forment un seul solide S de masse M et de centre d'inertie G tel que $\overrightarrow{OG} = y_G\vec{y}_2$. Le couloir (2) est supposé de masse m_2 et de centre d'inertie G_2 tel que $\overrightarrow{OG_2} = y_2\vec{y}_2$ alors que le couloir (3) est supposé de masse m_3 et de centre d'inertie G_3 tel que $\overrightarrow{OG_3} = y_3\vec{y}_2$.
- Le système du pont élévateur (4) exerce sur l'ensemble S une action mécanique représentée par le torseur suivant : $\{F(4 \to S)\} = \begin{Bmatrix} F\vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$
- L'accélération de la pesanteur est donnée par $\vec{g} = -g\vec{z}_0$
- On donne : $\overrightarrow{OB} = b\vec{y}_2 - a\vec{z}_2$



1. Exprimer y_G, position du centre d'inertie de l'ensemble S formé par les couloirs (2) et (3), en fonction de m_2, m_3, y_2 et y_3.

Dans cette configuration, l'ensemble des deux couloirs (2) et (3) forment un seul solide S de masse M et de centre d'inertie G tel que $\overrightarrow{OG} = y_G \vec{y}_2$. Le couloir (2) est supposé de masse m_2 et de centre d'inertie G_2 tel que $\overrightarrow{OG_2} = y_2 \vec{y}_2$ alors que le couloir (3) est supposé de masse m_3 et de centre d'inertie G_3 tel que $\overrightarrow{OG_3} = y_3 \vec{y}_2$.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \overrightarrow{OG_i}$$

$$y_G = \frac{m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_2 + m_3}$$

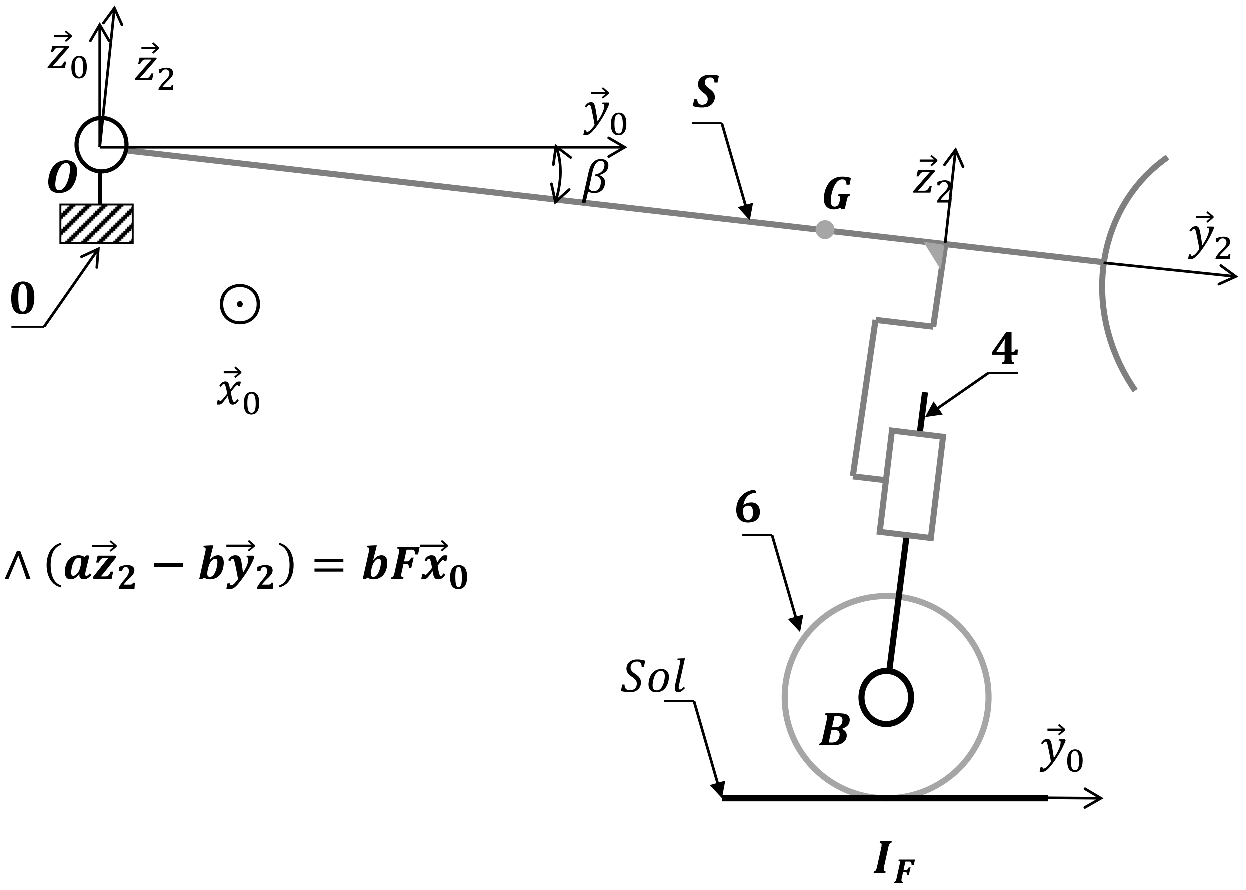
2. *<u>Dans la suite de cette partie, on termine les calculs avec y_G.</u>* Déterminer, au point O et dans la base du repère R_0, le torseur d'actions mécaniques extérieures à l'ensemble S.

$$\bar{S} = \{0, 4, g\}$$

$$\{F(0 \to S)\} = {}_O\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{R_0}$$

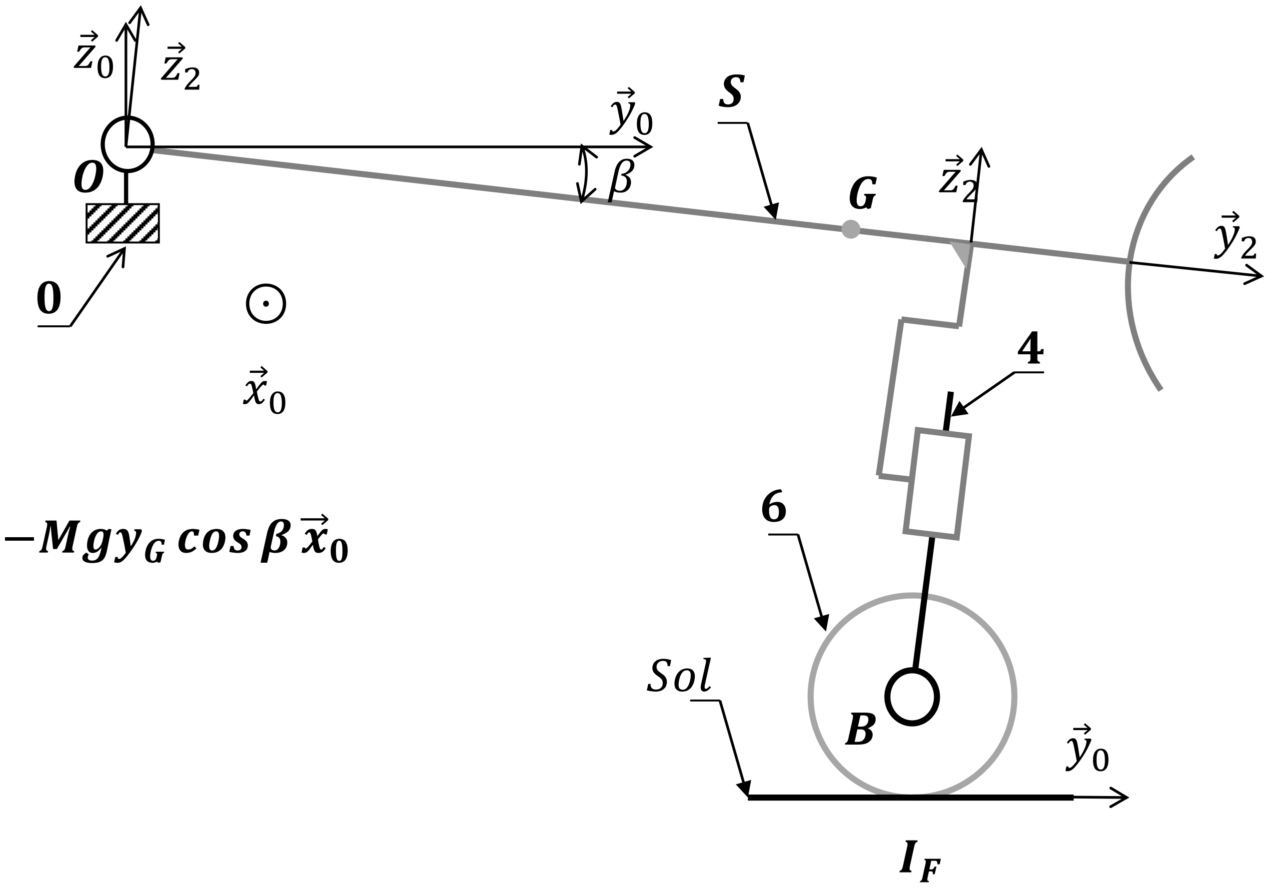
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(4 \to S) = \overrightarrow{\mathcal{M}_B}(4 \to S) + \vec{\mathcal{R}}(4 \to S) \wedge \overrightarrow{BO} = F\vec{z}_2 \wedge (a\vec{z}_2 - b\vec{y}_2) = bF\vec{x}_0$$

$$\{F(4 \to S)\} = {}_O\begin{Bmatrix} 0 & bF \\ F\sin\beta & 0 \\ F\cos\beta & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$



ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

2. ***Dans la suite de cette partie, on termine les calculs avec $\boldsymbol{y_G}$.***
Déterminer, au point O et dans la base du repère R_0, le torseur d'actions mécaniques extérieures à l'ensemble S.

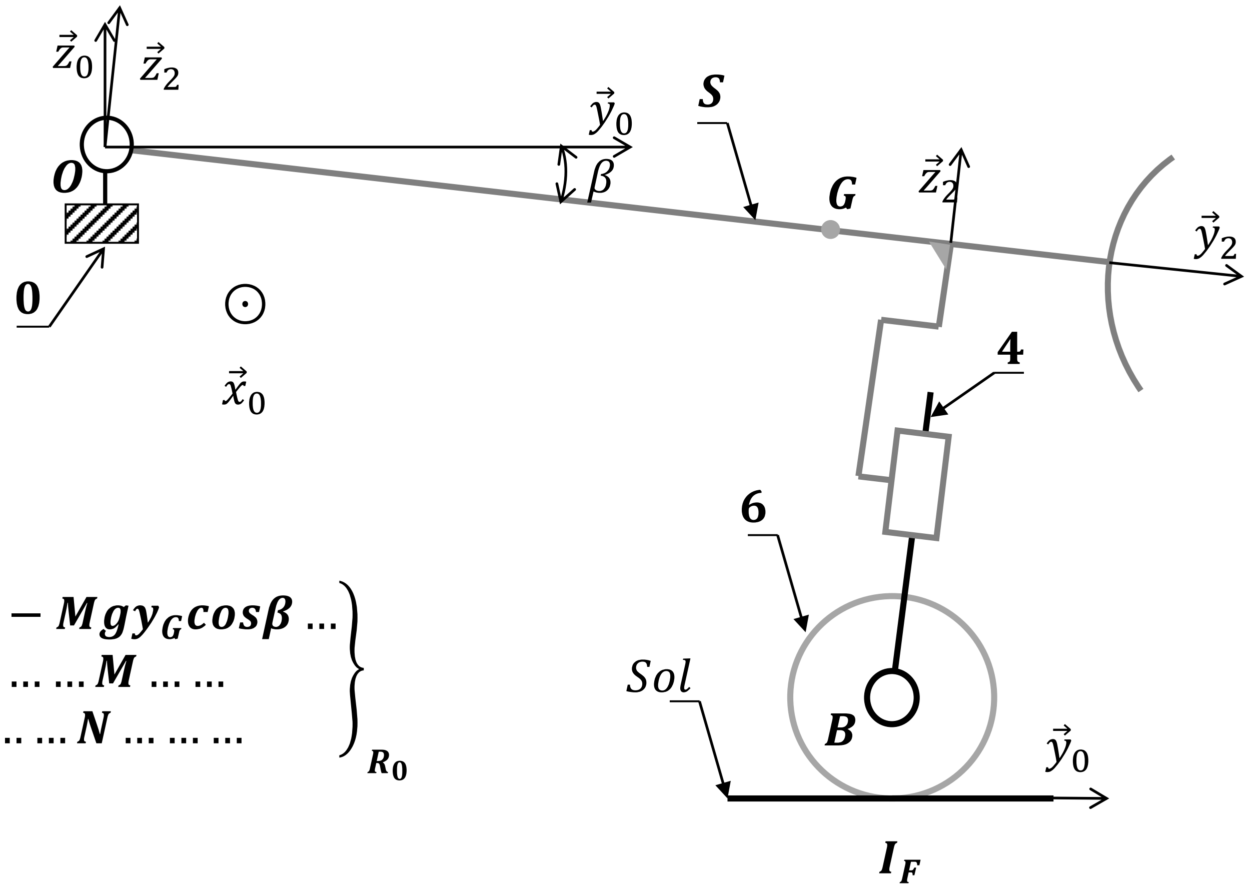


$\overline{\boldsymbol{S}} = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{g}\}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{M}_O}(\boldsymbol{g} \to \boldsymbol{S}) = \overrightarrow{\boldsymbol{OG}} \wedge \boldsymbol{M}\vec{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{y_G}\vec{\boldsymbol{y}}_2 \wedge (-\boldsymbol{Mg}\vec{\boldsymbol{z}}_0) = -\boldsymbol{Mgy_G}\cos\boldsymbol{\beta}\,\vec{\boldsymbol{x}}_0$$

$$\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{4} \to \boldsymbol{S})\} = {}_{O}\left\{\begin{array}{c|c} 0 & -Mgy_G\cos\beta \\ 0 & 0 \\ -Mg & 0 \end{array}\right\}_{R_0}$$

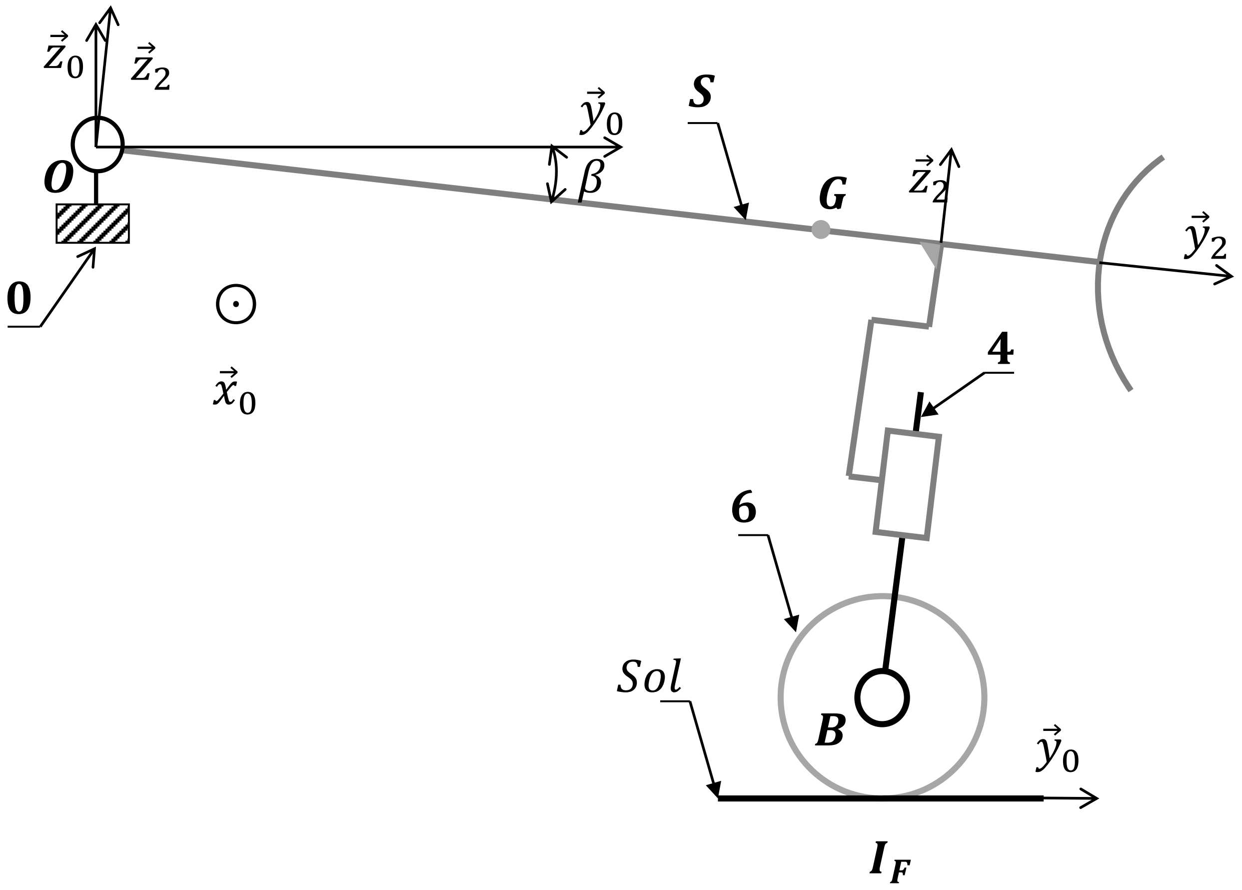
2. ***<u>Dans la suite de cette partie, on termine les calculs avec y_G.</u>***
Déterminer, au point O et dans la base du repère R_0, le torseur d'actions mécaniques extérieures à l'ensemble S.



$$\{F(\overline{S} \rightarrow S)\} = \left\{\begin{array}{c|c} \dots\dots X \dots\dots\dots & \dots bF - Mgy_G\cos\beta \dots \\ \dots\dots Y + F\sin\beta \dots\dots\dots & \dots\dots M \dots\dots \\ \dots\dots Z + F\cos\beta - Mg \dots\dots & \dots\dots N \dots\dots\dots \end{array}\right\}_{O,\,R_0}$$

ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

2. En appliquant le théorème du moment statique au point O en projection sur l'axe $\vec{x}_0$, Montrer que l'effort F qu'exerce (4) sur S est donné par : $F = \dfrac{Mgy_G \cos\beta}{b}$.



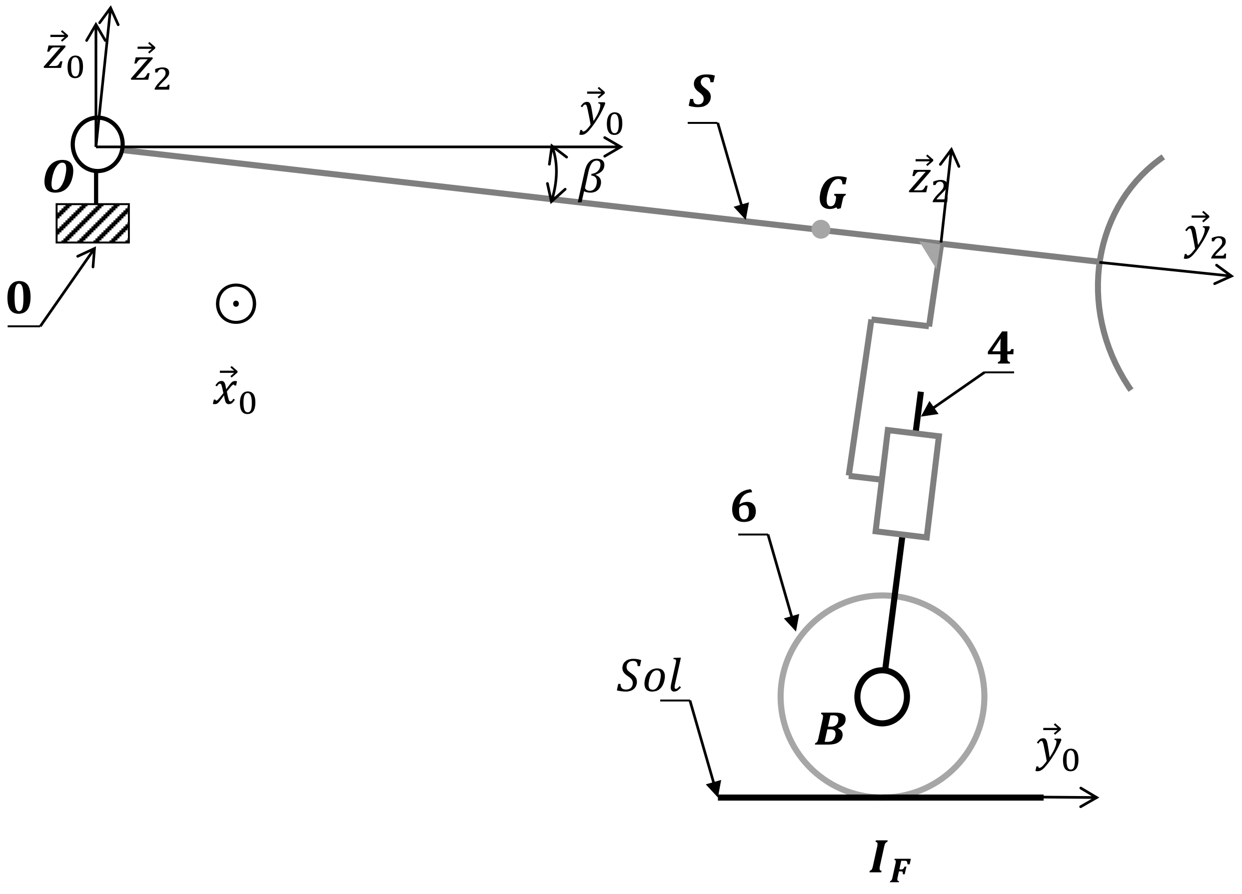
$$\vec{x}_0 . \overrightarrow{\mathcal{M}}_0(\bar{S} \to S) = 0$$

$$bF - Mgy_G cos\beta = 0$$

$$F = \frac{Mgy_G cos\beta}{b}$$

ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

3. En appliquant le théorème du moment statique au point O en projection sur l'axe $\vec{x}_0$, Montrer que l'effort F qu'exerce (4) sur S est donné par : $F = \frac{Mgy_G \cos\beta}{b}$.

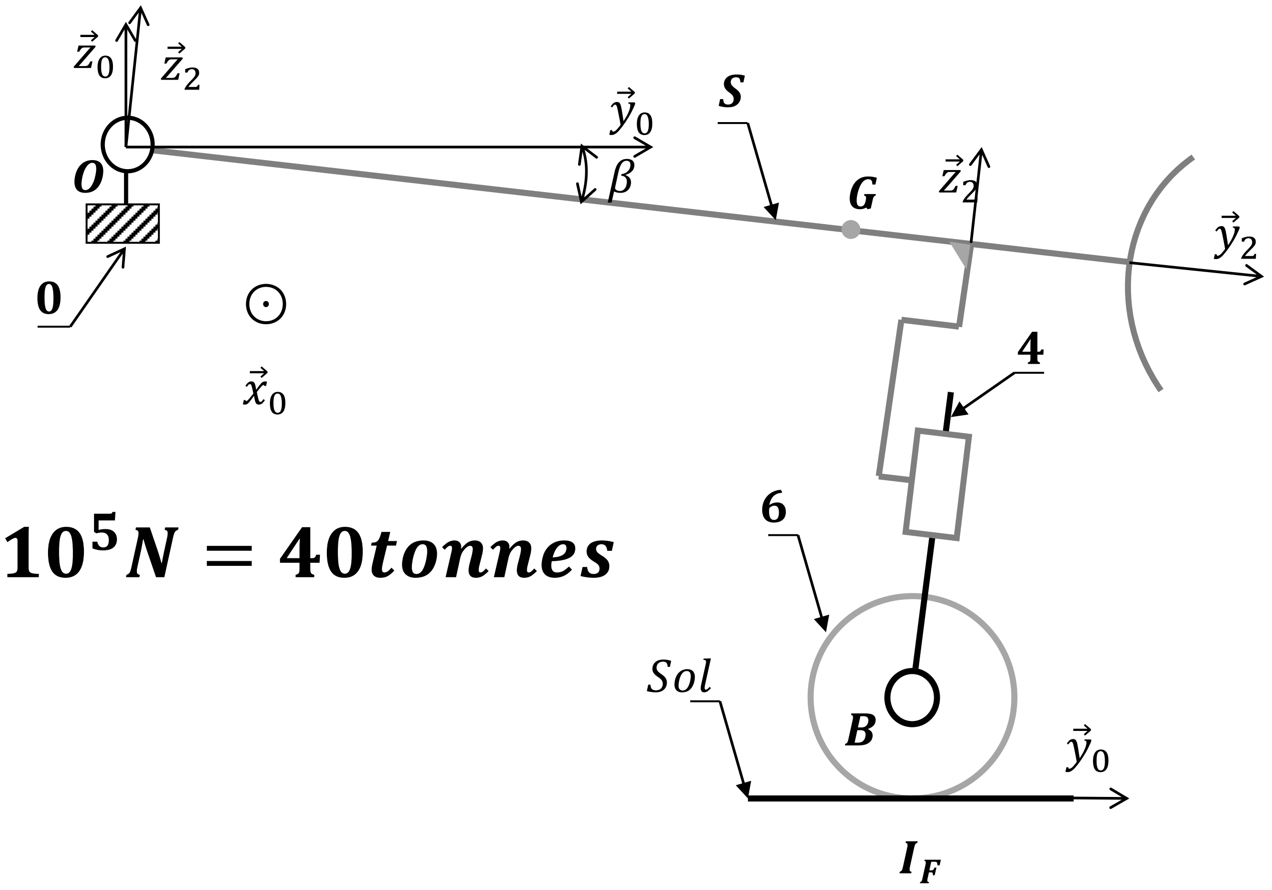


$$\vec{x}_0 . \overrightarrow{\mathcal{M}}_0(\bar{S} \rightarrow S) = 0$$

$$bF - Mgy_G\cos\beta = 0$$

$$F = \frac{Mgy_G\cos\beta}{b}$$

4. D'après le cahier des charges, la charge maximale admissible par l'essieu de la passerelle est de 70tonnes. Est-ce que cette condition est respectée sachant que $M = 60.10^3 Kg, g = 10ms^{-2}, y_G = 10m, b = 15m\ et \cos\beta \approx 1$.



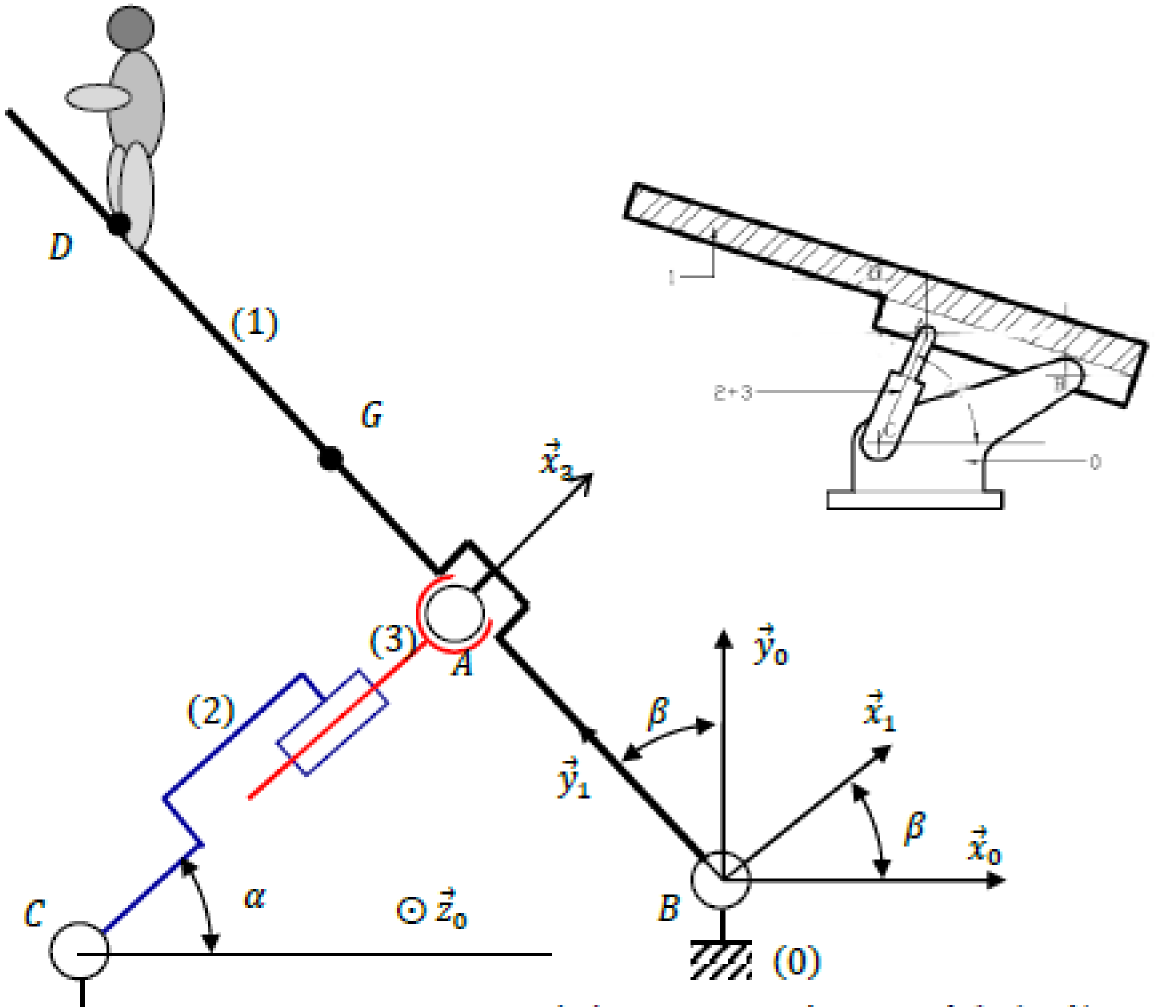
$$\boldsymbol{F = \frac{M g y_G \cos\beta}{b} = \frac{60.10^3 \times 10 \times 10}{15} = 4.10^5 N = 40 tonnes}$$

$$\boldsymbol{F = 40 tonnes < 70 tonnes}$$

Le cahier des charges est respecté

ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

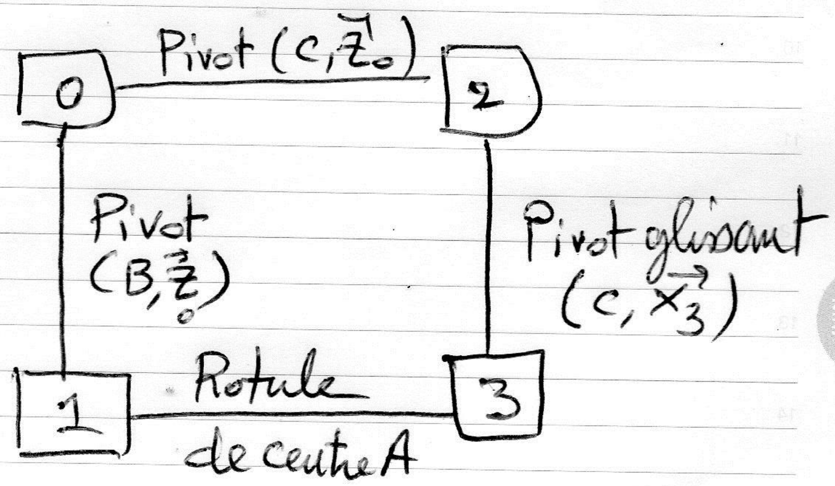
Exercice 2: Echelle mobile



$\overrightarrow{BA} = a\vec{y}_1, \overrightarrow{BG} = b\vec{y}_1$ et $\overrightarrow{BD} = c\vec{y}_1$

Correction de l'exercice 2 :

1°_ graphe de liaisons :

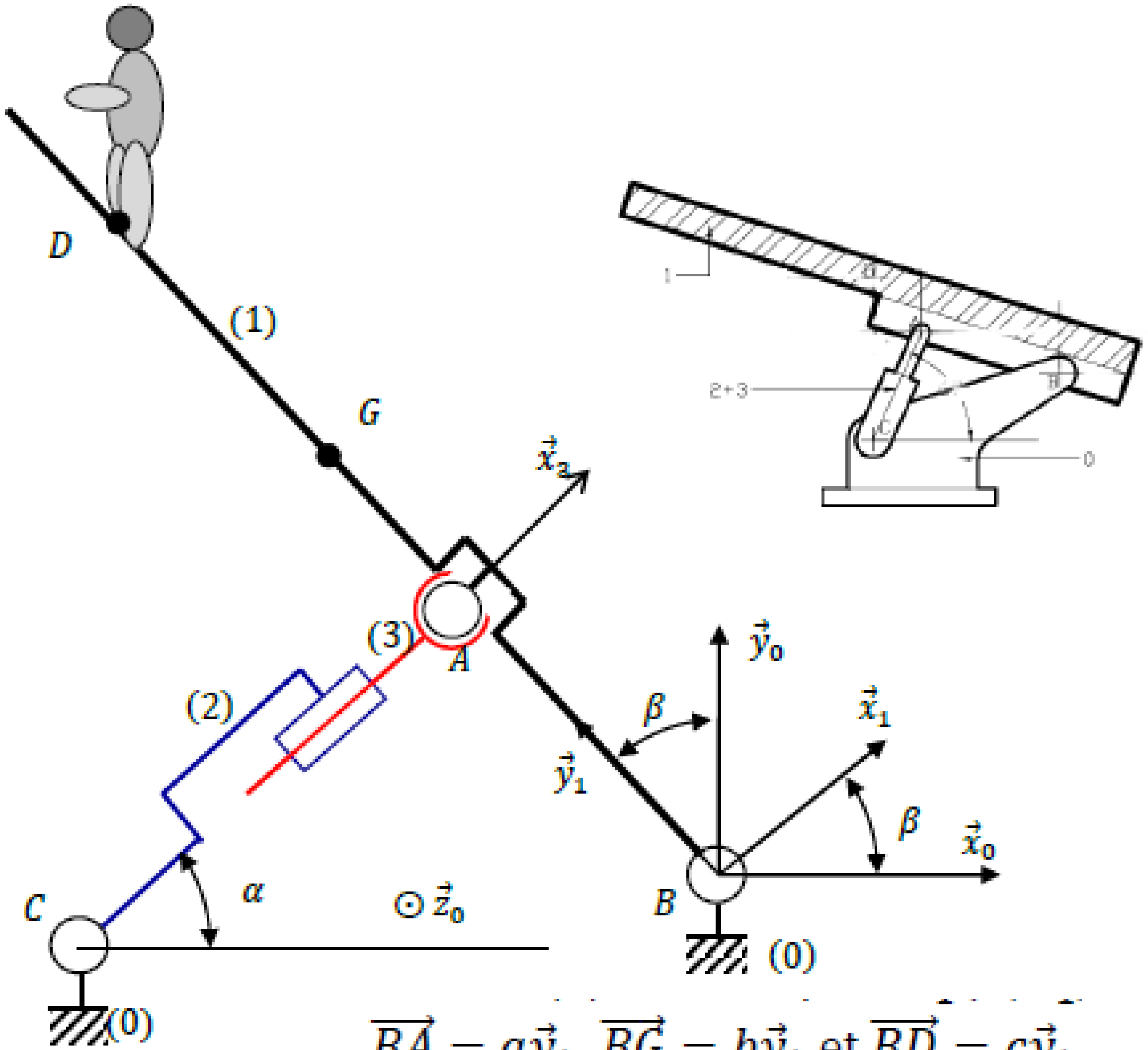


2°_ torseurs statiques

l_{02} : Pivot $(C, \vec{z}_0)$

$$\{F(0\to 2)\} = \left\{\begin{matrix} X_{02} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & 0 \end{matrix}\right\}_{C,\ R_0 \text{ ou } R_2 \text{ ou } R_3}$$

Exercice 2: Echelle mobile



$\overrightarrow{BA} = a\vec{y}_1$, $\overrightarrow{BG} = b\vec{y}_1$ et $\overrightarrow{BD} = c\vec{y}_1$

l_{23} : Pivot glissant d'axe $(C, \vec{x}_3)$

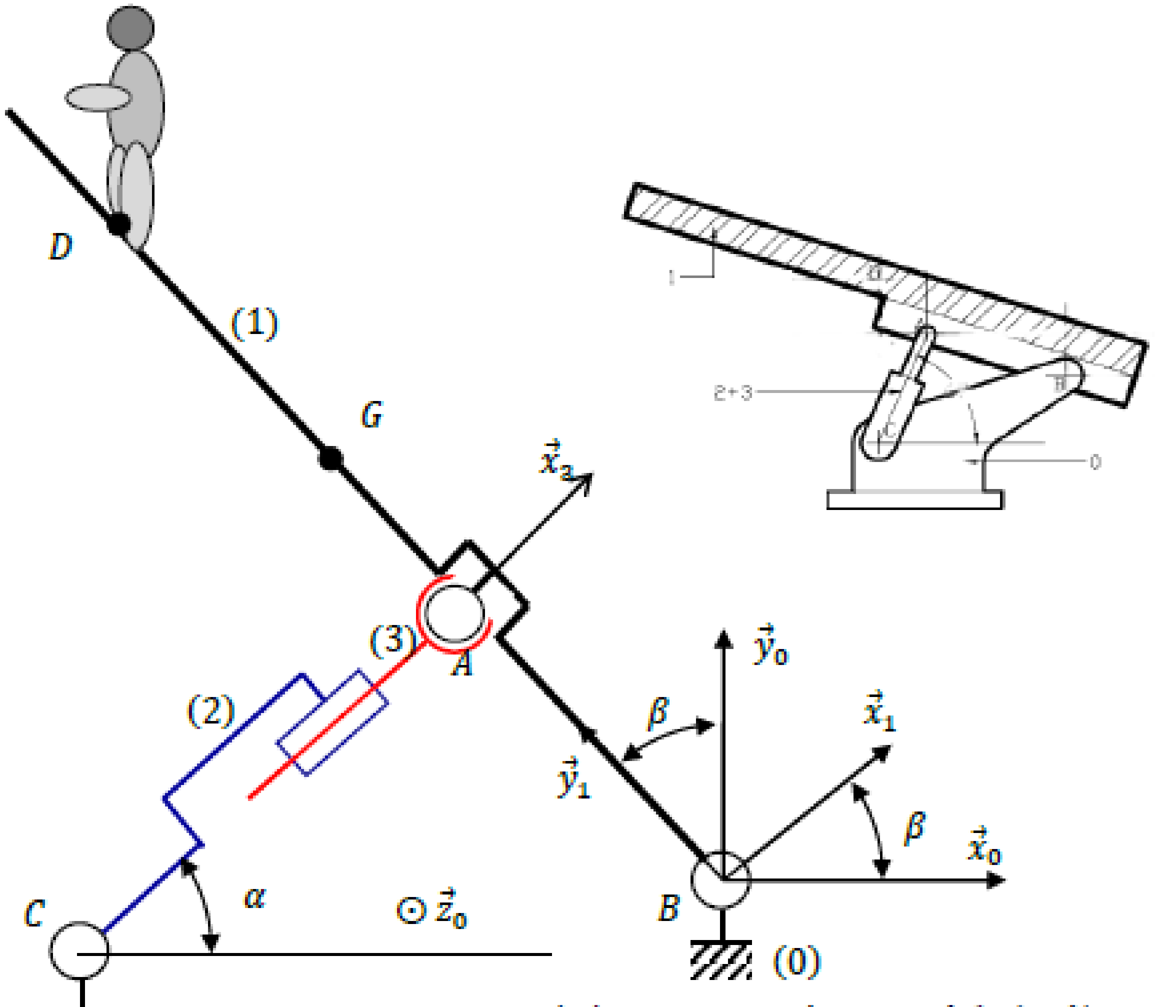
$$\{F(2\to3)\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & N_{23} \end{matrix}\right\}_{C,\ R_3 \text{ ou } R_2}$$

l_{31} : Rotule de centre A

$$\{F(3\to1)\} = \left\{\begin{matrix} X_{31} & 0 \\ Y_{31} & 0 \\ Z_{31} & 0 \end{matrix}\right\}_{A,\ R_3, R_2}$$

3°/ Hypothèse : les solides (2) et (3) sont supposés de masses négligeables

Exercice 2: Echelle mobile



$\overrightarrow{BA} = a\vec{y}_1, \overrightarrow{BG} = b\vec{y}_1$ et $\overrightarrow{BD} = c\vec{y}_1$

Soit $\Sigma = \{2, 3\}$

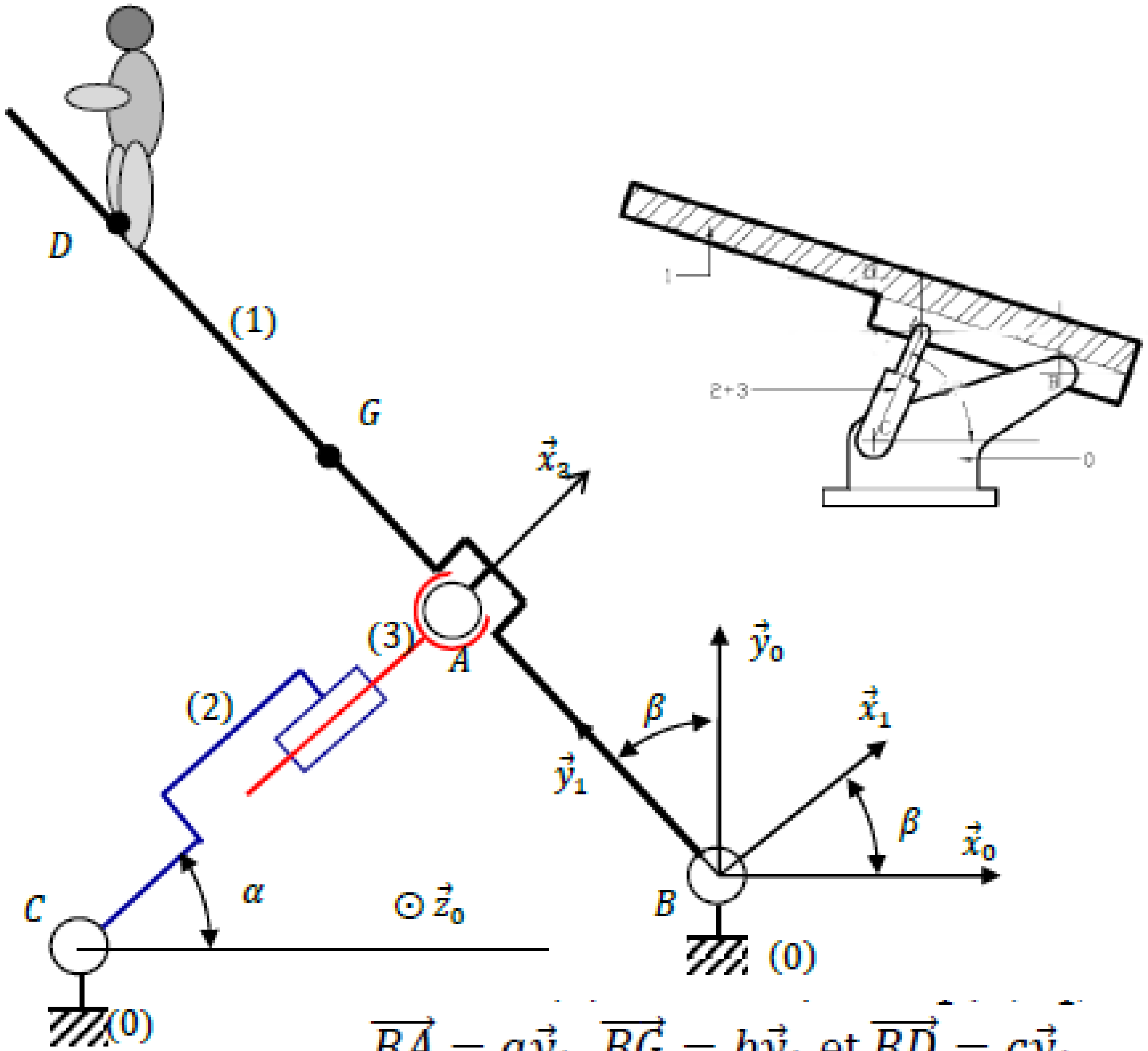
$\bar{\Sigma} = \{0, 1\}$

Le théorème de la résultante statique en projection sur l'axe $(C, \vec{x}_3)$ donne :

$\vec{x}_3 \cdot \vec{R}(0 \to 2) + \vec{x}_3 \cdot \vec{R}(1 \to 3) = \vec{0}$

$\Rightarrow \Sigma$ est soumis à deux forces donc $\vec{R}(0 \to 2)$ et $\vec{R}(1 \to 3)$ sont opposées et sont portées par le support (CA).

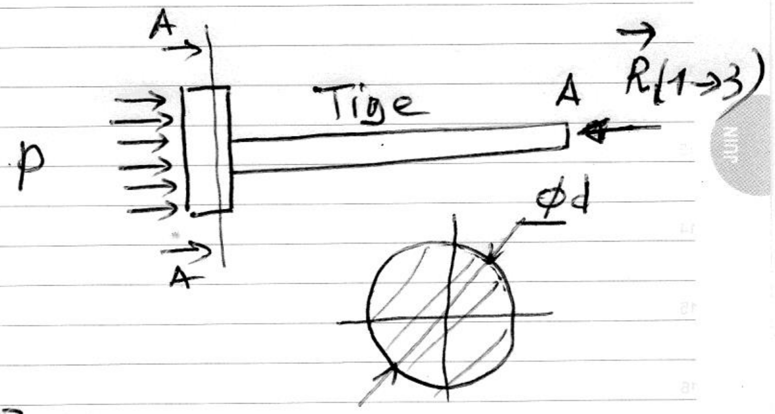
Exercice 2: Echelle mobile



$$\overrightarrow{BA} = a\vec{y}_1,\ \overrightarrow{BG} = b\vec{y}_1 \text{ et } \overrightarrow{BD} = c\vec{y}_1$$

$$\{F(3\to 1)\} = \left\{\begin{matrix} X_{31} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{A,\ R_3}$$

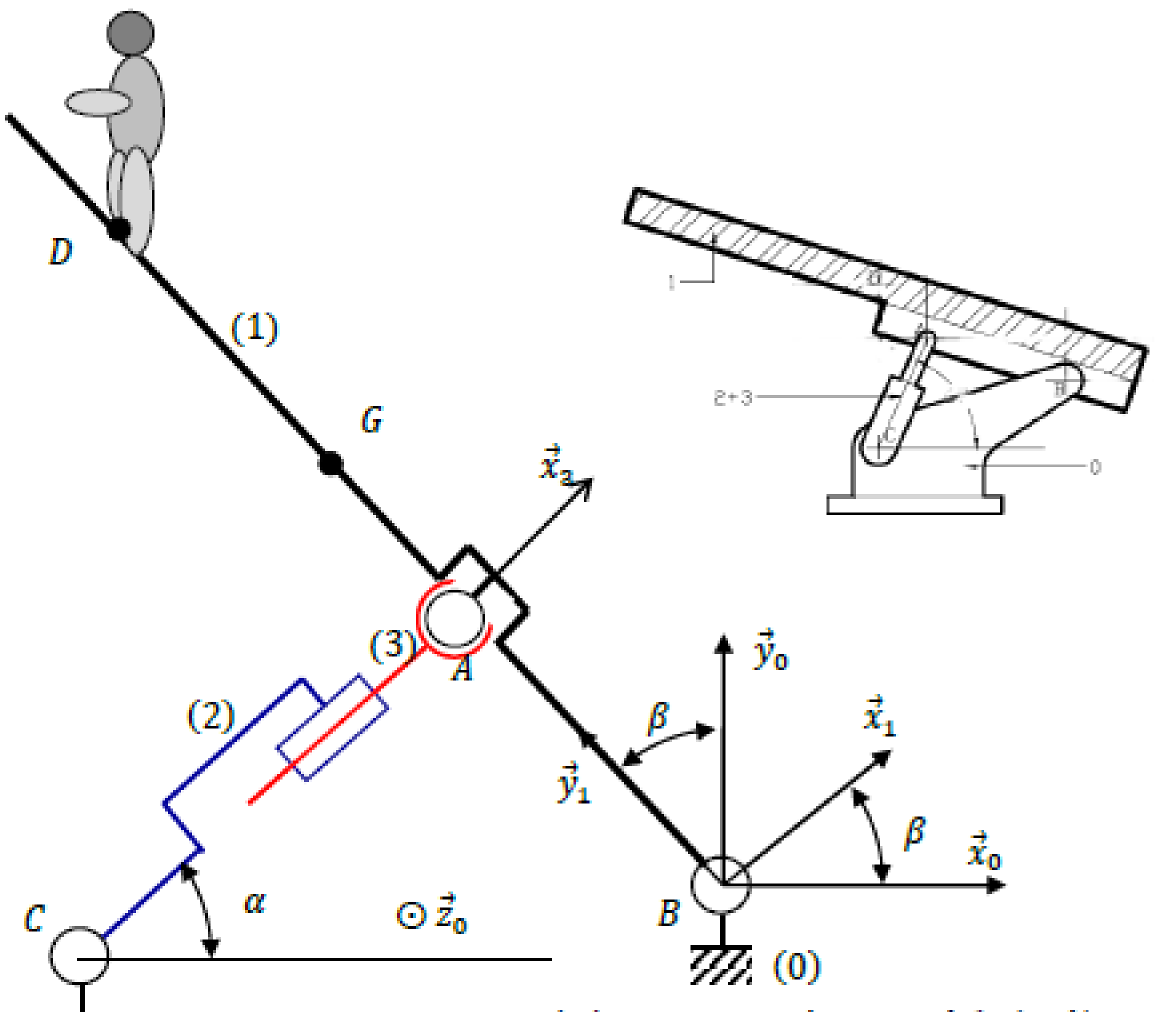
4/



$$\vec{R}(\text{tige} \to \text{tige}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \|\vec{R}(1\to 3)\| = p\,S_p$$

Exercice 2: Echelle mobile



$\overrightarrow{BA} = a\vec{y}_1$, $\overrightarrow{BG} = b\vec{y}_1$ et $\overrightarrow{BD} = c\vec{y}_1$

/ théorème du moment statique au pt B en projection sur $\vec{z}_0$:

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{M}_B(\bar{1} \to 1) = \vec{z}_0 \cdot \vec{M}_B(\vec{g} \to 1) + \vec{z}_0 \cdot \vec{M}_B(\vec{g} \to \text{operateur}) + \vec{z}_0 \cdot \vec{M}_B(3 \to 1) + \vec{z}_0 \cdot \vec{M}_B(0 \to 1)$$

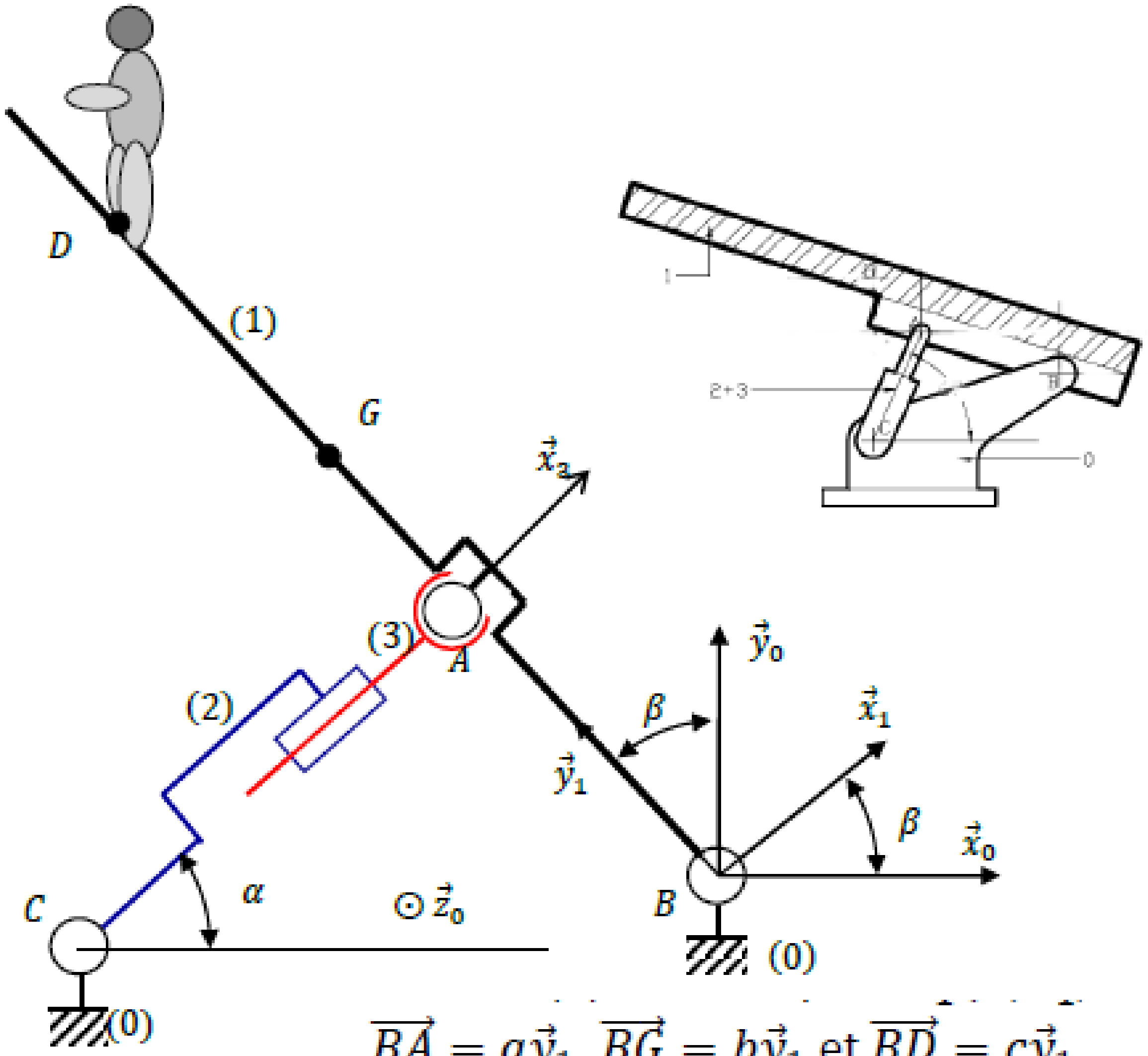
• $\vec{z}_0 \cdot \vec{M}_B(\vec{g} \to 1) = \vec{z}_0 \cdot (\vec{BG} \wedge m_e \vec{g})$

$= \vec{z}_0 \cdot (b\vec{y}_1 \wedge -m_e g \vec{y}_0)$

$= + m_e b g \sin\beta$

• $\vec{z}_0 \cdot \vec{M}_B(\vec{g} \to Op) = m_p c g \sin\beta$

Exercice 2: Echelle mobile



$\vec{BA} = a\vec{y}_1$, $\vec{BG} = b\vec{y}_1$ et $\vec{BD} = c\vec{y}_1$

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\mathcal{M}}_B(3\to 1) = \vec{z}_0 \cdot \left(\vec{BA} \wedge \vec{R}(3\to 1)\right)$$

$$= \vec{z}_0 \cdot \left(a\vec{y}_1 \wedge \|\vec{R}(3\to 1)\| \vec{x}_3\right)$$

$$= \vec{z}_0 \cdot a\|\vec{R}(3\to 1)\| \; \vec{y}_1 \wedge \vec{x}_3$$

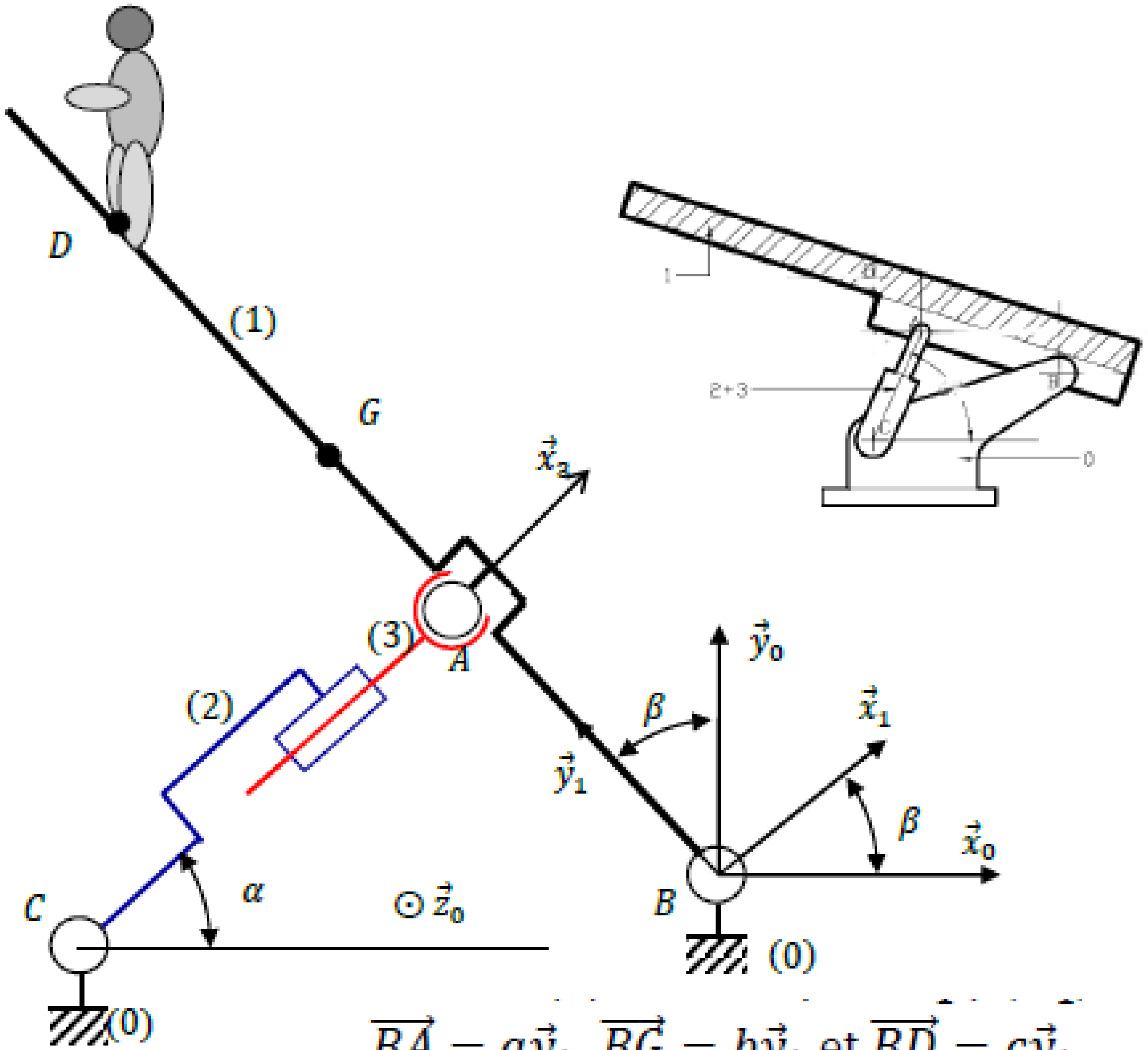
$$= -a\|\vec{R}(3\to 1)\| \cos(\beta-\alpha)$$

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\mathcal{M}}_B(0\to 1) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{z}_0 \cdot \vec{\mathcal{M}}_B(\bar{1}\to 1) = (m_e b + m_p c) g \sin\beta - a\|\vec{R}(3\to 1)\| \cos(\beta-\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{R}(3\to 1)\| = \frac{(m_e b + m_p c) g \sin\beta}{a\cos(\beta-\alpha)}$$

Exercice 2: Echelle mobile



$\overrightarrow{BA} = a\vec{y}_1$, $\overrightarrow{BG} = b\vec{y}_1$ et $\overrightarrow{BD} = c\vec{y}_1$

6°/ A.N

$$\|\vec{R}(3\to1)\| = \frac{(m_e b + m_p c)\, g \sin\beta}{a \cos(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{(50\times2 + 80\times3{,}5)\,10 \sin 40}{0{,}9 \cos(20)}$$

$$= 2888\ \text{N}$$

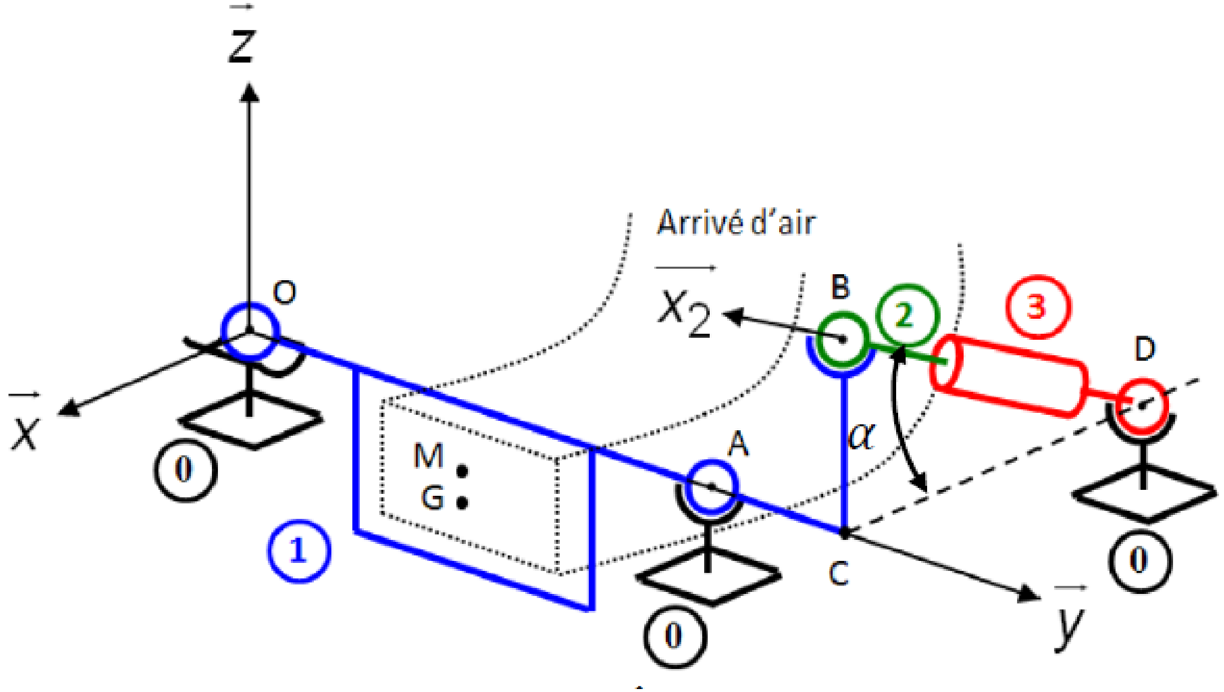
$$p = \frac{\|\vec{R}(2\to3)\|}{S_p} = \frac{2888}{3010^{+3}} = 0{,}096272\ \text{N/mm}^2$$

$$= 0{,}096272\ \text{MPa} = 0{,}96272\ \text{bar}$$

$p \simeq 1$ bar < 12 bar.

cahier des charges vérifié.

Exercice 3: Bouche de climatisation



Hypothèses :

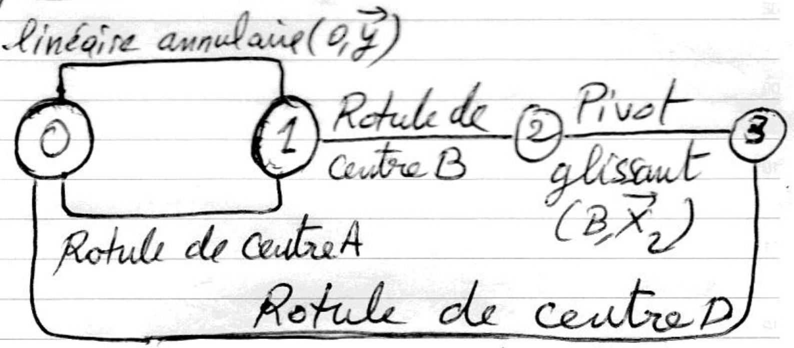
- Les liaisons sont supposées comme parfaites ;
- L'action de la pesanteur sur les différents solides sera négligée sauf pour le clapet (1) de masse M et de centre de gravité G tel que $\overrightarrow{OG} = a\vec{y} - h\vec{z}$, $\vec{g} = g\vec{X}$

Données :

- $\overrightarrow{OA} = 2a\vec{y}$ et $\overrightarrow{OM} = a\vec{y} - f\vec{z}$ $\overrightarrow{AB} = c\vec{y} + d\vec{z}$
- Action de la tige du vérin (2) sur le clapet (1) : $\{\mathcal{F}(2 \to 1)\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} X_{21}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$;
- Action de l'air sur le clapet (1) : $\{\mathcal{F}(air \to 1)\}_M = {}_M\begin{Bmatrix} F_a\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

EX3 : Bouche de climatisation

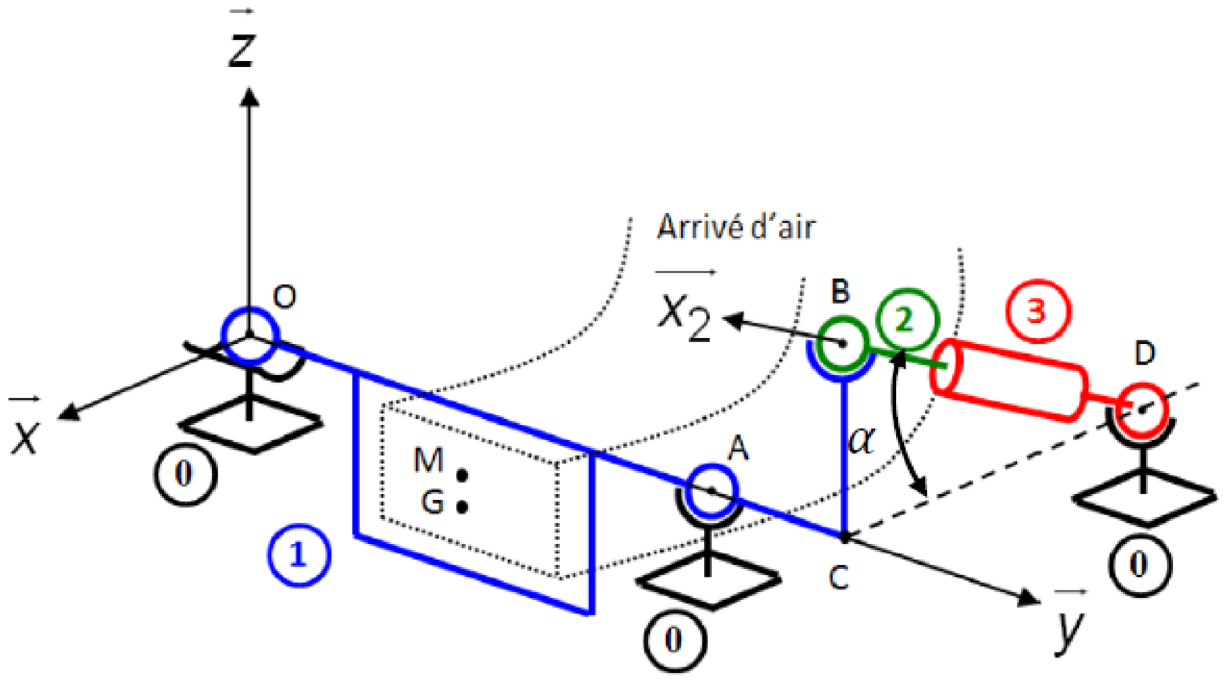
1°/



2°/ $E = \{2,3\} \Rightarrow \bar{E} = \{0,1\}$

E est soumis sous l'action de deux forces. Donc ces deux forces sont directement opposées. $R(2 \to 1)$ est portée par $\vec{x}_2$. D'où la justification.

Exercice 3: Bouche de climatisation



Hypothèses :

- Les liaisons sont supposées comme parfaites ;
- L'action de la pesanteur sur les différents solides sera négligée sauf pour le clapet (1) de masse M et de centre de gravité G tel que $\overrightarrow{OG} = a\vec{y} - h\vec{z}$, $\vec{g} = g\vec{X}$

Données :

- $\overrightarrow{OA} = 2a\vec{y}$ et $\overrightarrow{OM} = a\vec{y} - f\vec{z}$ $\quad \overrightarrow{AB} = c\vec{y} + d\vec{z}$
- Action de la tige du vérin (2) sur le clapet (1) : $\{\mathcal{F}(2 \to 1)\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} X_{21}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$;
- Action de l'air sur le clapet (1) : $\{\mathcal{F}(air \to 1)\}_M = {}_M\begin{Bmatrix} F_a\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

3°/ $\bar{1} = \{0, 2, \vec{g}, air\}$ ①

$\{F(0\to1)\}^{Rotule} = {}_A\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_R$

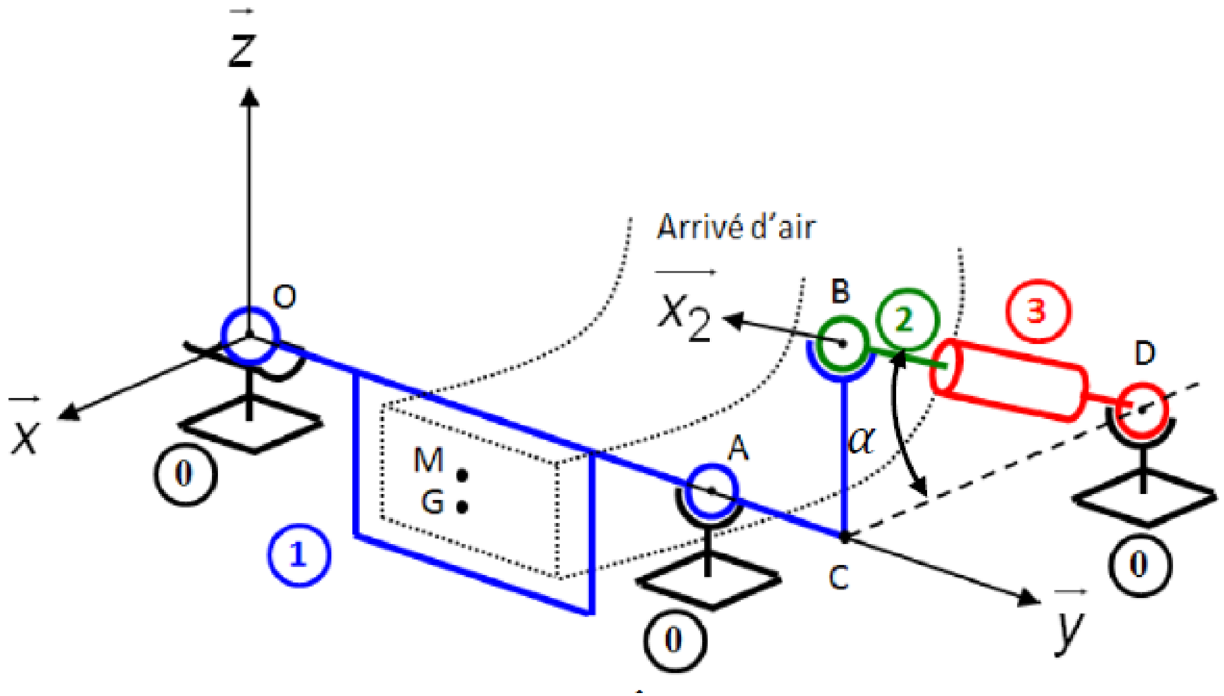
$\{F(0\to1)\}^{l.annulaire} = {}_O\begin{Bmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_0 & 0 \end{Bmatrix}_R$

$\vec{\mathcal{M}}_A(0\to1) = \vec{\mathcal{M}}_O(0\to1) + \vec{AO} \wedge \vec{R}(0\to1)$

$= \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ -2a \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_0 \\ 0 \\ Z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2aZ_0 \\ 0 \\ 2aX_0 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \{F(0\to1)\}^{l.annulaire} = {}_A\begin{Bmatrix} X_0 & -2aZ_0 \\ 0 & 0 \\ Z_0 & 2aX_0 \end{Bmatrix}_R$

Exercice 3: Bouche de climatisation



Hypothèses :

- Les liaisons sont supposées comme parfaites ;
- L'action de la pesanteur sur les différents solides sera négligée sauf pour le clapet (1) de masse M et de centre de gravité G tel que $\overrightarrow{OG} = a\vec{y} - h\vec{z}$, $\vec{g} = g\vec{X}$

Données :

- $\overrightarrow{OA} = 2a\vec{y}$ et $\overrightarrow{OM} = a\vec{y} - f\vec{z}$ $\quad \overrightarrow{AB} = c\vec{y} + d\vec{z}$
- Action de la tige du vérin (2) sur le clapet (1) : $\{\mathcal{F}(2 \to 1)\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} X_{21}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$;
- Action de l'air sur le clapet (1) : $\{\mathcal{F}(air \to 1)\}_M = {}_M\begin{Bmatrix} F_a\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

$$\{F(2\to1)\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} X_{21}\vec{X}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{21}\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ X_{21}\sin\alpha & 0 \end{Bmatrix}_R$$

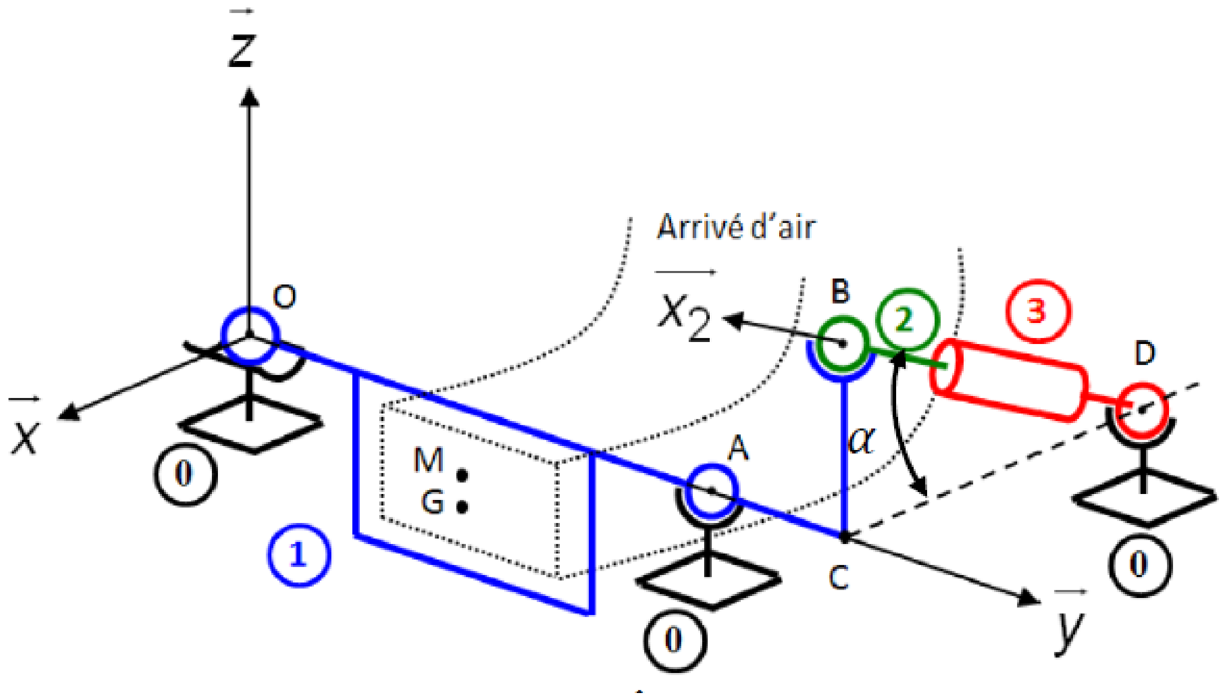
$$\vec{M}_A(2\to1) = \vec{M}_B(2\to1) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}(2\to1)$$

$$= \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ c \\ d \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_{21}\cos\alpha \\ 0 \\ X_{21}\sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} cX_{21}\sin\alpha \\ dX_{21}\cos\alpha \\ -cX_{21}\sin\alpha \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \{F(2\to1)\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} X_{21}\cos\alpha & cX_{21}\sin\alpha \\ 0 & dX_{21}\cos\alpha \\ X_{21}\sin\alpha & -cX_{21}\sin\alpha \end{Bmatrix}_R$$

Exercice 3: Bouche de climatisation



Hypothèses :

- Les liaisons sont supposées comme parfaites ;
- L'action de la pesanteur sur les différents solides sera négligée sauf pour le clapet (1) de masse M et de centre de gravité G tel que $\overrightarrow{OG} = a\vec{y} - h\vec{z}$, $\vec{g} = g\vec{X}$

Données :

- $\overrightarrow{OA} = 2a\vec{y}$ et $\overrightarrow{OM} = a\vec{y} - f\vec{z}$ $\quad \overrightarrow{AB} = c\vec{y} + d\vec{z}$
- Action de la tige du vérin (2) sur le clapet (1) : $\{\mathcal{F}(2 \to 1)\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} X_{21}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$;
- Action de l'air sur le clapet (1) : $\{\mathcal{F}(air \to 1)\}_M = {}_M\begin{Bmatrix} F_a\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

(3

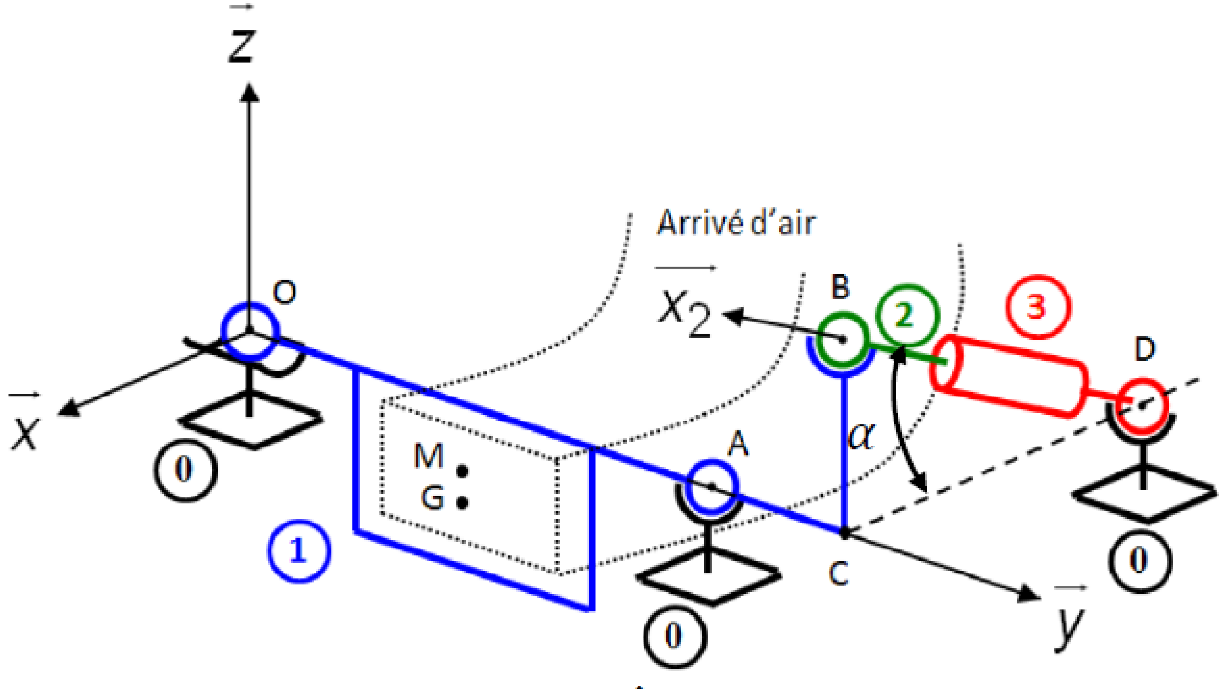
$$\{F(air \to 1)\} = {}_M\begin{Bmatrix} F_a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_M(air \to 1) + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{R}(air \to 1)$$

$$= \vec{0} + \begin{vmatrix} 0 \\ -a \\ -f \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F_a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -fF_a \\ aF_a \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \{F(air \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} F_a & 0 \\ 0 & -fF_a \\ 0 & aF_a \end{Bmatrix}_R$$

Exercice 3: Bouche de climatisation



Hypothèses :

- Les liaisons sont supposées comme parfaites ;
- L'action de la pesanteur sur les différents solides sera négligée sauf pour le clapet (1) de masse M et de centre de gravité G tel que $\overrightarrow{OG} = a\vec{y} - h\vec{z}$, $\vec{g} = g\vec{X}$

Données :

- $\overrightarrow{OA} = 2a\vec{y}$ et $\overrightarrow{OM} = a\vec{y} - f\vec{z}$ $\quad \overrightarrow{AB} = c\vec{y} + d\vec{z}$
- Action de la tige du vérin (2) sur le clapet (1) : $\{\mathcal{F}(2 \to 1)\}_B = {}_B\begin{Bmatrix} X_{21}\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$;
- Action de l'air sur le clapet (1) : $\{\mathcal{F}(air \to 1)\}_M = {}_M\begin{Bmatrix} F_a\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

$$\{F(\vec{g} \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} M\vec{g} \\ \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{g} \end{Bmatrix}$$

$$M\vec{g} = Mg\vec{x}$$

$$\overrightarrow{AG} \wedge M\vec{g} = \begin{vmatrix} 0 \\ -a \\ -h \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} Mg \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -mhg \\ mag \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \{F(\vec{g} \to 1)\} = {}_A\begin{Bmatrix} Mg & 0 \\ 0 & -mhg \\ 0 & mag \end{Bmatrix}_R$$

Exercice 3: Bouche de climatisation

$$\{F(\bar{1} \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} X_A + X_O + X_{21}\cos\alpha + F_a + Mg & -2aZ_O + cX_{21}\sin\alpha \\ Y_A & dX_{21}\cos\alpha - fF_a - Mhg \\ Z_A + Z_O + X_{21}\sin\alpha & 2aX_O - cX_{21}\sin\alpha + aF_a + Mag \end{Bmatrix}$$

$$X_{21} = \frac{fF_a + Mhg}{d\cos\alpha}$$

Merci pour votre attention