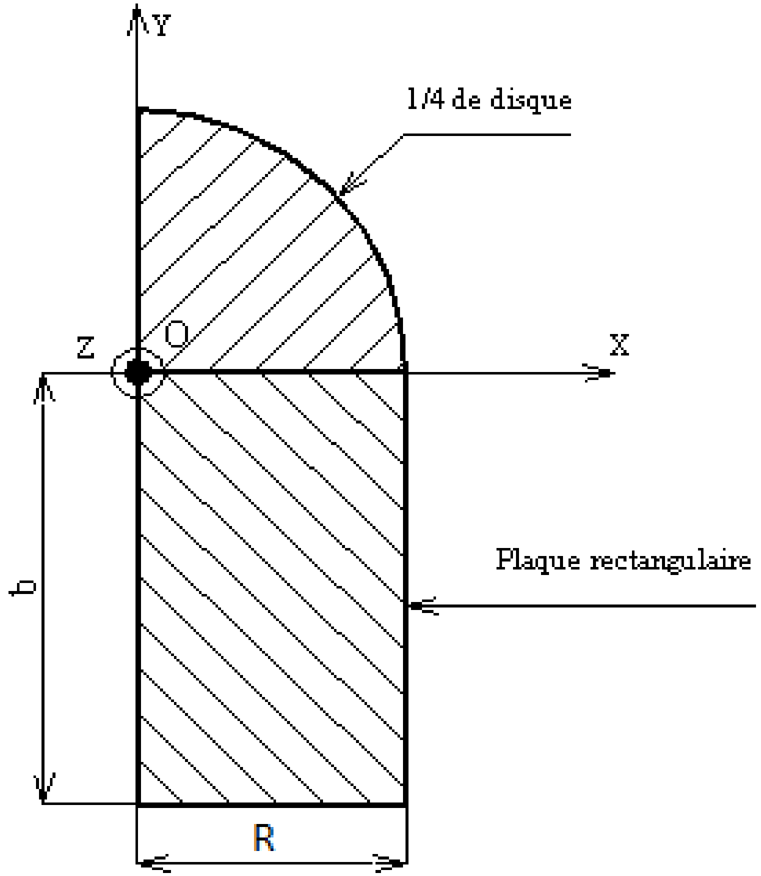
Géométrie des masses

LEFI ABDELLAOUI: INGÉNIEUR DOCTEUR AGRÉGÉ EN GÉNIE MÉCANIQUE

IPEIB 2020

Exercice 1:

Le solide donné par la figure suivante est formé d'1/4 de disque et d'une plaque rectangulaire. Il est supposé homogène et d'épaisseur négligeable. Le ¼ de disque est de masse m et de rayon R. La plaque rectangulaire est de masse M, de largeur R et de longueur b



1. Déterminer le centre d'inertie de l'1/4 de disque

1°/ $\vec{OG_D} = \frac{1}{S}\int \vec{OP}\, ds$ avec $\quad \vec{OP} = r\vec{e_r} = r\cos\theta\,\vec{x} + r\sin\theta\,\vec{y}$

$ds = r\,dr\,d\theta$

$S = \frac{\pi R^2}{4}$

$0 \le r \le R$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\vec{OG_D} = X_{G_D}\,\vec{x} + Y_{G_D}\,\vec{y}$

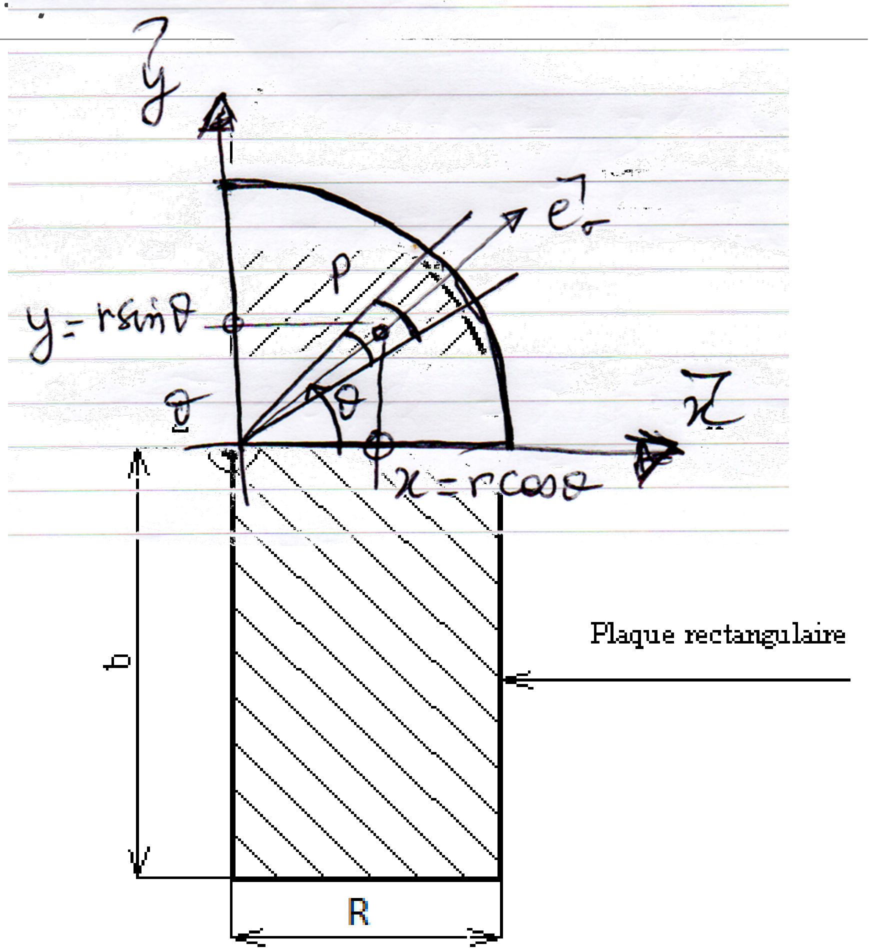
or $\Delta : y = x$ est un axe de symétrie $\Rightarrow G_D \in \Delta$

$\Rightarrow X_{G_D} = Y_{G_D}$.

$$X_{G_D} = \frac{4}{\pi R^2}\int r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi R^2}\times\frac{R^3}{3}\times 1 = \frac{4R}{3\pi}$$

$$\boxed{\vec{OG_D} = \frac{4R}{3\pi}(\vec{x}+\vec{y})}$$



2. Déduire le centre d'inertie de l'ensemble formé par la plaque rectangulaire et l'1/4 de disque,

2°/ soit G_{PR} : Centre d'inertie de la plaque rectangulaire

$$\overrightarrow{OG_{PR}} = \frac{a}{2}\vec{x} - \frac{b}{2}\vec{y}$$

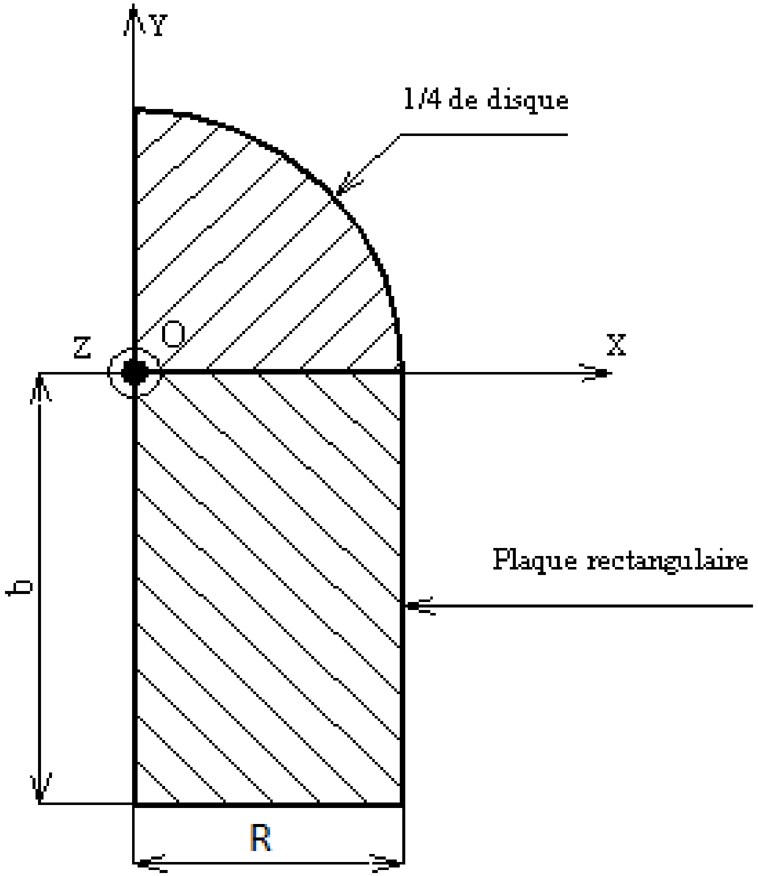
soit G : centre d'inertie de l'ensemble $\frac{1}{4}$ disque + plaque rectangulaire.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S_1+S_2}\left[S_1\overrightarrow{OG_D} + S_2\overrightarrow{OG_{PR}}\right] \text{ avec } \begin{cases} S_1 = \frac{\pi R^2}{4} \\ S_2 = ab \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\frac{\pi R^2}{4} + ab}\left[\frac{\pi R^2}{4}\,\frac{4R}{3\pi}(\vec{x}+\vec{y}) + ab\left(\frac{a}{2}\vec{x} - \frac{b}{2}\vec{y}\right)\right]$$

$$= X_G\,\vec{x} + Y_G\,\vec{y} \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} X_G = \dfrac{4R^3 + 6a^2b}{3(\pi R^2 + 4ab)} \\[2ex] Y_G = \dfrac{4R^3 - 6ab^2}{3(\pi R^2 + 4ab)} \end{cases}$$



ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

3. Déterminer la matrice d'inertie de l'1/4 de disque au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,

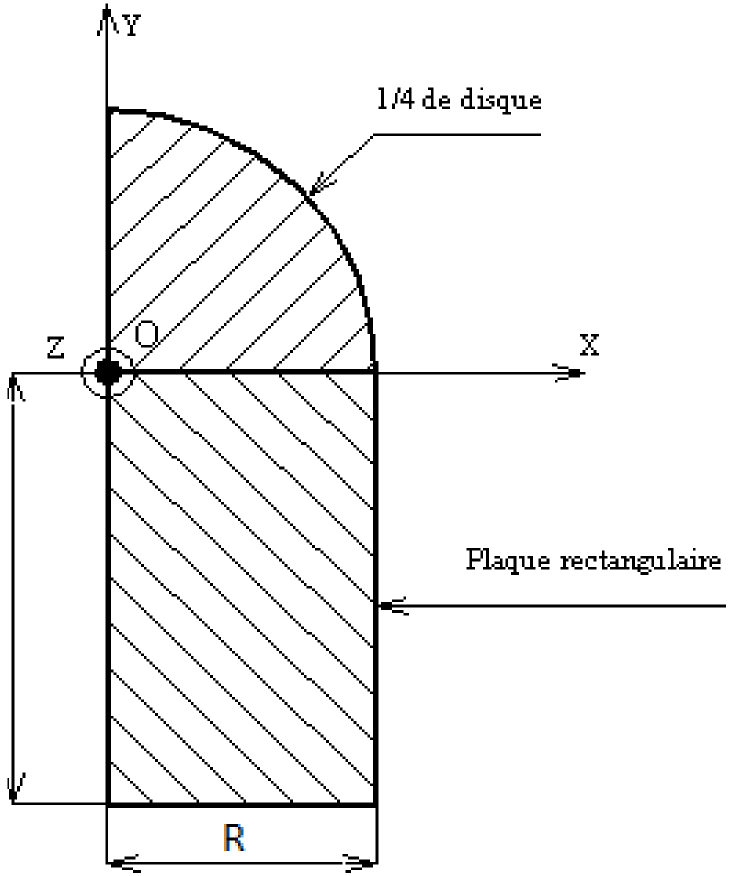
On a : * $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$ jouent le même rôle $\Rightarrow A = B$

* le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie

$\Rightarrow D = E = 0$

D'ou la forme de la matrice d'inertie :

$$[I_O(\tfrac{1}{4}D)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

3. Déterminer la matrice d’inertie de l’1/4 de disque au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,

7

- $A = \int (y^2+z^2)\,dm = \int y^2 dm \quad (z=0)$
- $B = \int (x^2+z^2)\,dm = \int x^2 dm \quad (z=0)$
- $C = \int (x^2+y^2)\,dm = A+B = 2A = 2B$

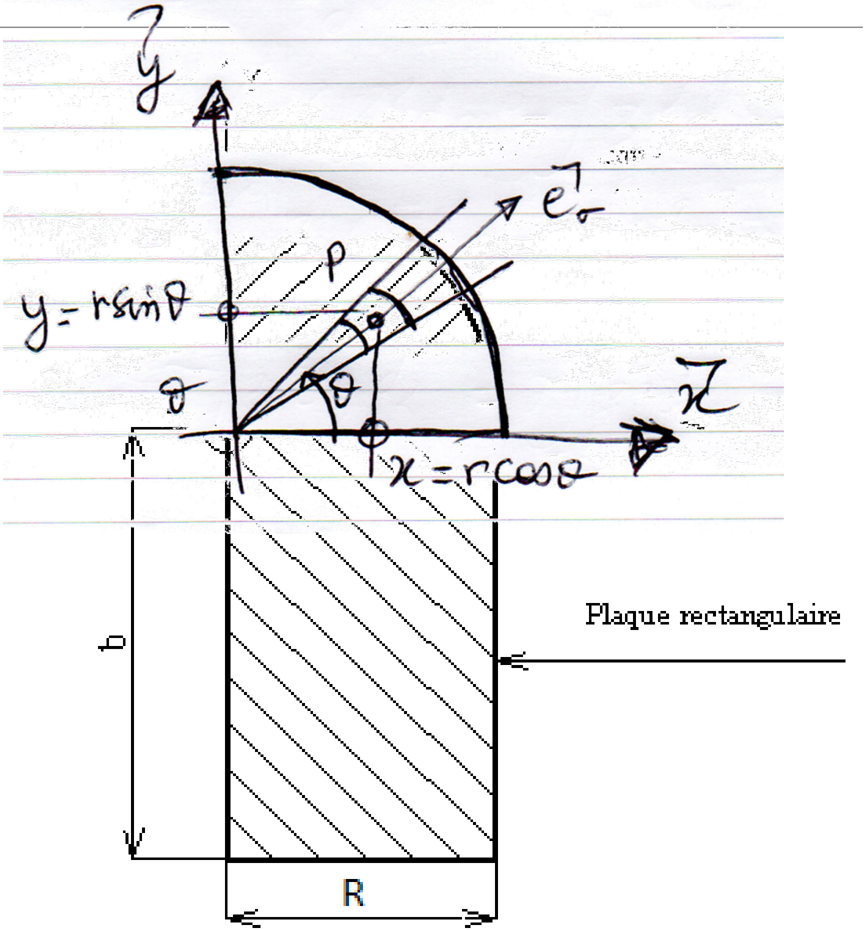
$dm = \sigma\, ds = \sigma\, r\,dr\,d\theta$ avec $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{4m}{\pi R^2}$

- $C = \int r^2 dm = \frac{4m}{\pi R^2} \int r^2\, r\,dr\,d\theta = \frac{4m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} d\theta$

$= \frac{4m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{mR^2}{2}$

- $A = B = \frac{mR^2}{4}$



3. Déterminer la matrice d'inertie de l'1/4 de disque au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,

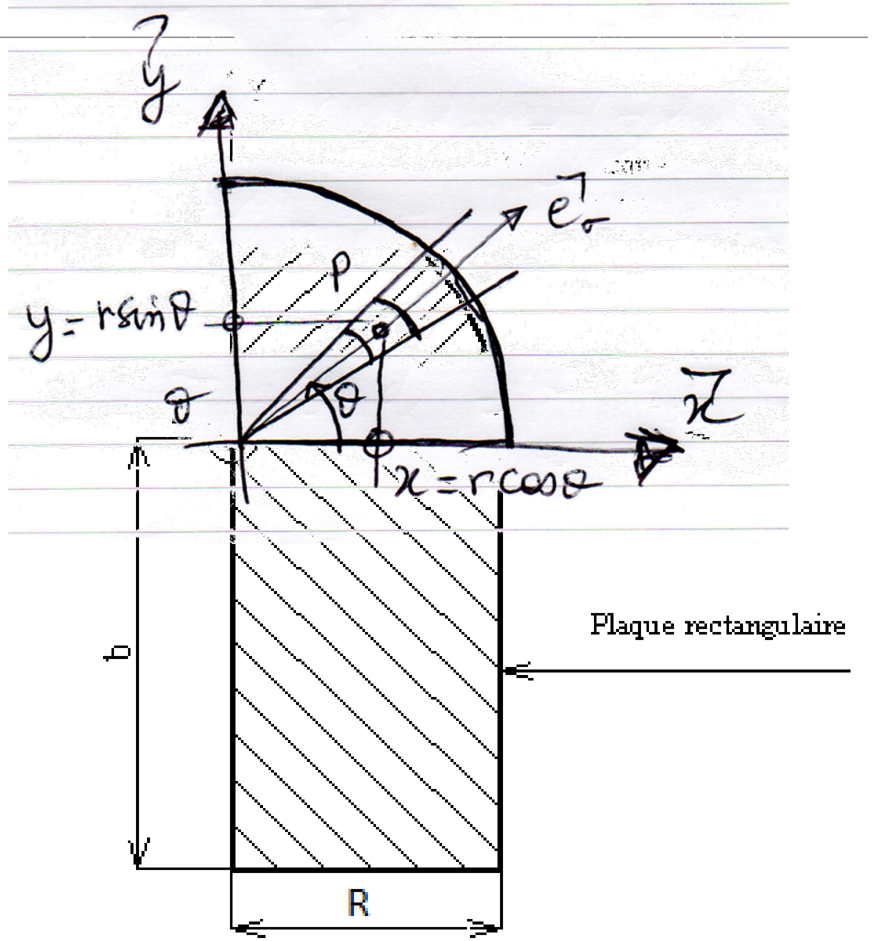
- $F = \int xy\,dm = \frac{4m}{\pi R^2} \int r^2 \sin\theta \cos\theta \, r\,dr\,d\theta$

$$= \frac{4m}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{4m}{\pi R^2} \left[\frac{R^4}{4}\right] \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} \frac{1}{2} = \frac{mR^2}{2\pi}$$

D'où

$$[I_O(D)] = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{4} & -\frac{mR^2}{2\pi} & 0 \\ -\frac{mR^2}{2\pi} & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

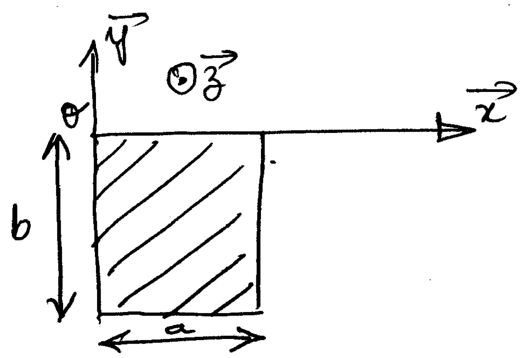


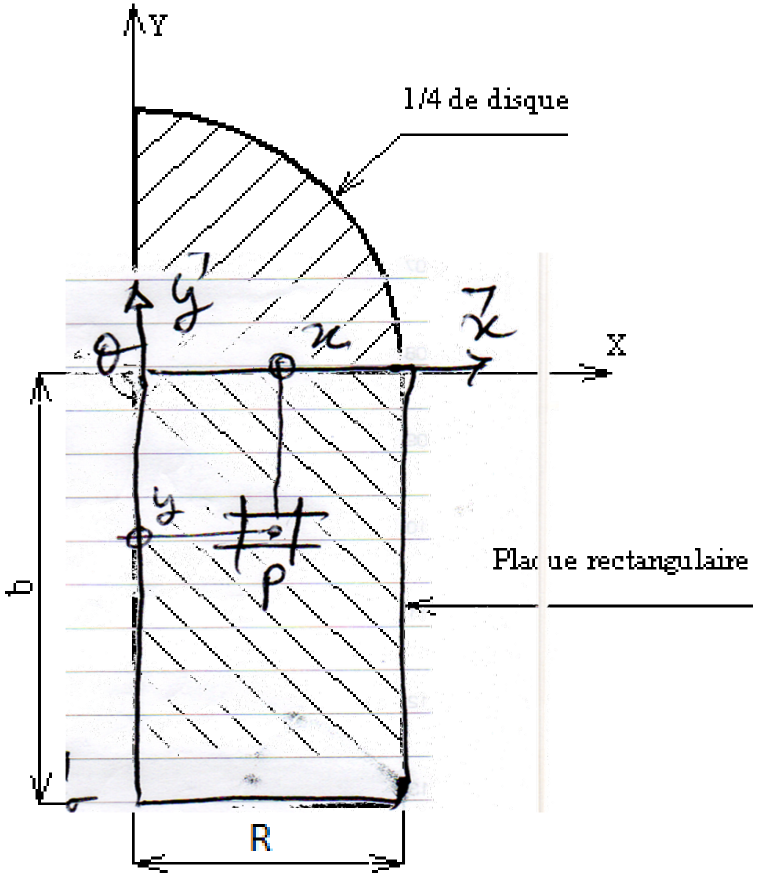
ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

4. Déterminer La matrice d'inertie de la plaque rectangulaire au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,

5%

$\llcorner 8$





On a $(O, \vec{x}, \vec{y})$ est un plan de symétrie $\Rightarrow D = E = 0$

D'où la forme de la matrice d'inertie de la plaque rectangulaire est la suivante :

$$[I_O(PR)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

4. Déterminer La matrice d'inertie de la plaque rectangulaire au point O dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,

$$A = \int y^2 dm, \quad B = \int x^2 dm, \quad C = \int (x^2+y^2)\, dm, \quad F = \int xy\, dm$$

avec $\begin{cases} dm = \dfrac{M}{ab}\, dx\, dy \\ 0 \leq x \leq a \\ -b \leq y \leq 0 \end{cases}$

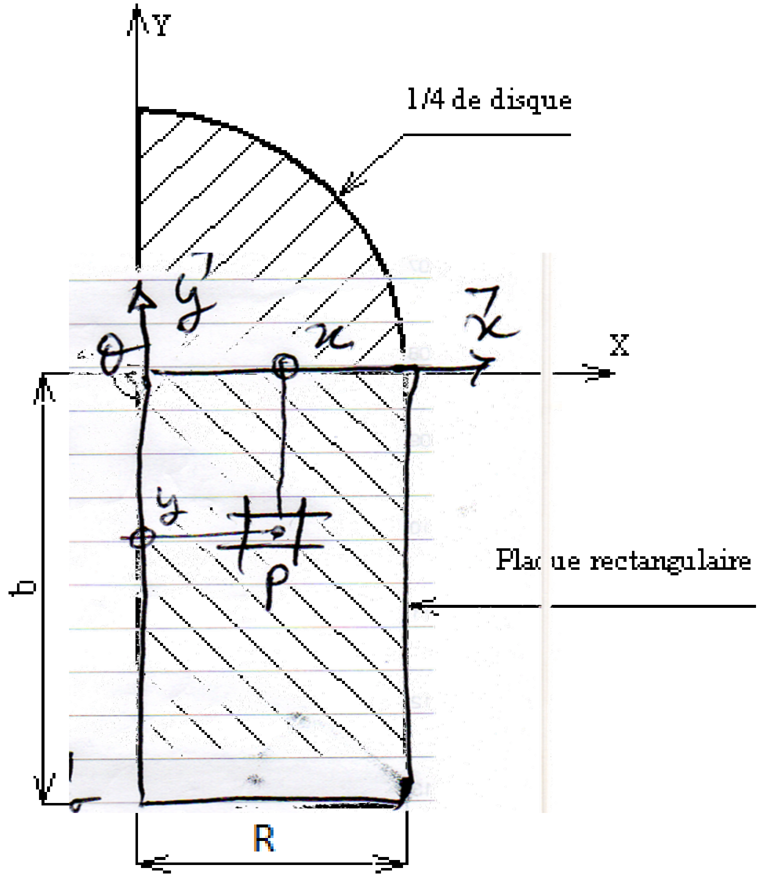
$$A = \frac{M}{ab}\int y^2 dx\, dy = \frac{Mb^2}{3}$$

$$B = \frac{Ma^2}{3}$$

$$C = A + B = \frac{M(a^2+b^2)}{3}$$

$$F = \frac{M}{ab}\int xy\, dx\, dy = \frac{Mab}{4}$$

$$\Rightarrow [I_O(PR)] = \begin{bmatrix} \frac{Mb^2}{3} & -\frac{Mab}{4} & 0 \\ -\frac{Mab}{4} & \frac{Ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M(a^2+b^2)}{3} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



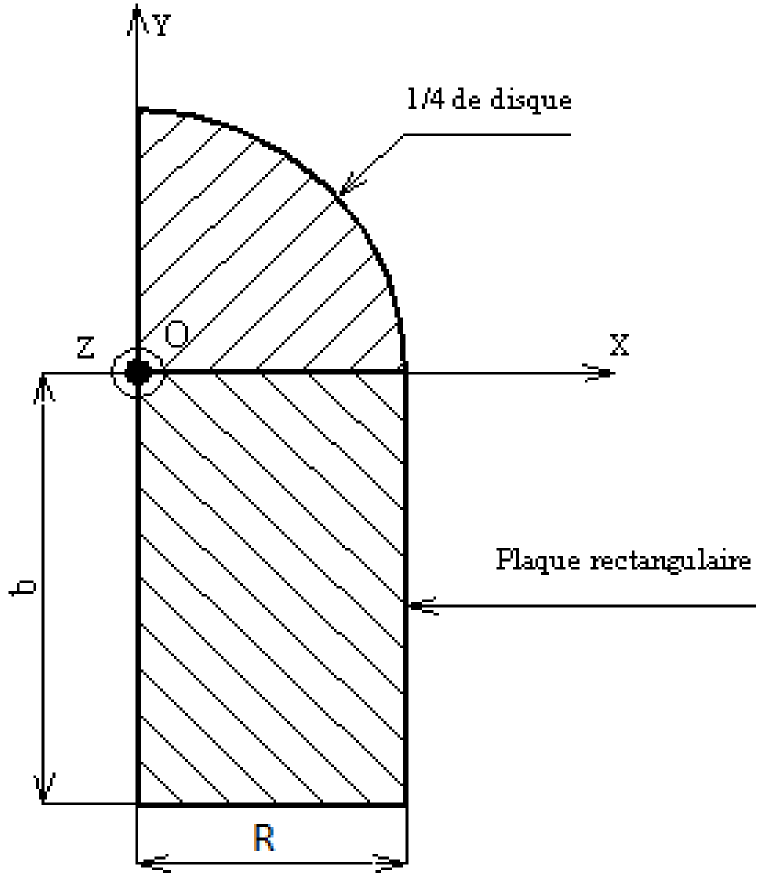
4. Déduire la matrice d'inertie de l'ensemble

9

6%

$$I_O(\Sigma) = I_O(1/4D) + I_O(PR)$$

$$I_O(\Sigma) = \begin{bmatrix} \underbrace{\frac{mR^2}{4} + \frac{Mb^2}{3}}_{A_O} & \underbrace{-\left(\frac{mR^2}{8\pi} + \frac{Mab}{4}\right)}_{-F_O} & 0 \\ -\left(\frac{mR^2}{2\pi} + \frac{Mab}{4}\right) & \underbrace{\frac{mR^2}{4} + \frac{Ma^2}{3}}_{B_O} & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{\frac{mR^2}{2} + \frac{M(a^2+b^2)}{3}}_{C_O} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

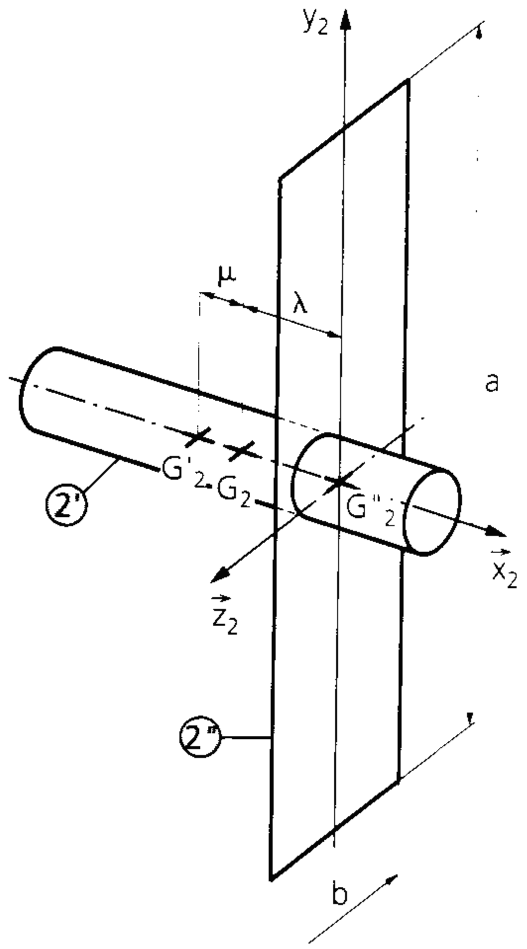


Exercice 2:

Les solides 1 et 2 de l'éolienne (figure suivante) sont modélisés par :

- Solide 1 : homogène de masse m_1 et de centre d'inertie en A. Il admet le plan $(A, x1, z1\ )$comme plan de symétrie matérielle. Sa matrice d'inertie en A est :

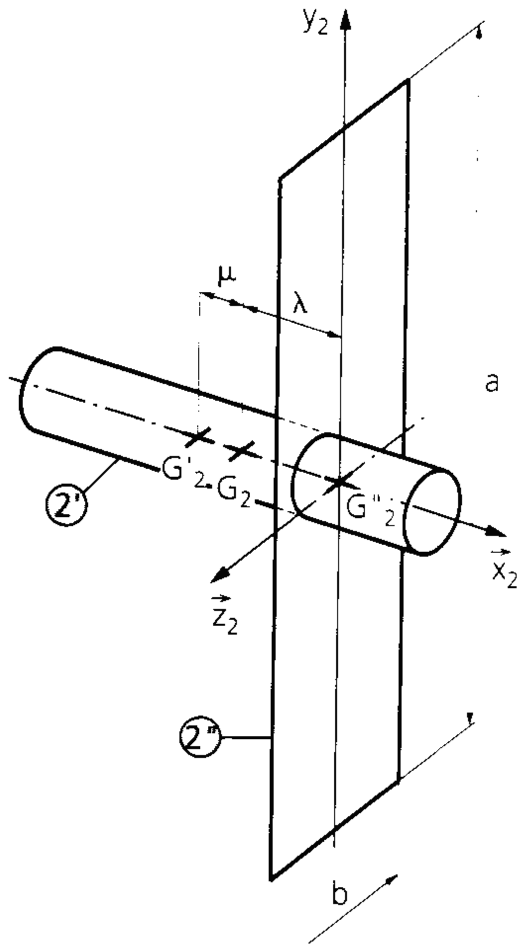
$$I_A(1) = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(x_1, y_1, z_1)}$$



Exercice 2:

Solide 2 : homogène de masse m_2 et centre d'inertie G_2. Il est composé de :

1. Un cylindre plein 2' d'axe $(A, \vec{x}_2)$, de masse m'_2, de centre d'inertie G'_2 ($\overrightarrow{G'_2G_2} = \mu\vec{x}_2$), de hauteur H et de rayon R ;
2. Une plaque rectangulaire 2'' de masse m''_2, de centre d'inertie G''_2 $\left(\overrightarrow{G_2G''_2} = \lambda\vec{x}_2\right)$, de côté a suivant $(G''_2, \vec{y}_2)$, de côté b suivant $(G''_2, \vec{z}_2)$ et d'épaisseur négligeable



ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

1. Simplifier la matrice d'inertie $I_A(1)$ connaissant le plan de symétrie

- Solide 1 : homogène de masse m_1 et de centre d'inertie en A. Il admet le plan $(A, x1, z1\ )$comme plan de symétrie matérielle. Sa matrice d'inertie en A est :

$$I_A(1) = \begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(x_1, y_1, z_1)}$$

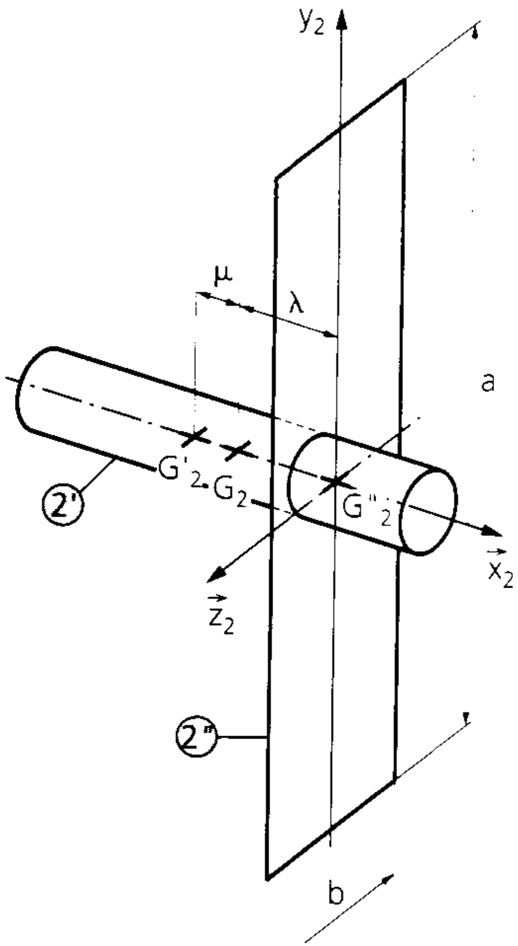
1°/ Le plan $(A, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ est un plan de symétrie $\Rightarrow$ $(A, \vec{y}_1)$ est un axe principal d'inertie $\Rightarrow$ B_1 est un moment principal d'inertie $\Rightarrow$ $D_1 = F_1 = 0$

$$\Rightarrow [I_A(1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{R_1}$$

2. Déterminer la relation entre λ et μ

1. Un cylindre plein 2' d'axe $(A, \vec{x}_2)$, de masse m'_2, de centre d'inertie G'_2 ($\overrightarrow{G'_2G_2} = \mu\vec{x}_2$), de hauteur H et de rayon R ;

2. Une plaque rectangulaire 2'' de masse m''_2, de centre d'inertie G''_2 $\left(\overrightarrow{G_2G''_2} = \lambda\vec{x}_2\right)$, de côté a suivant $(G''_2, \vec{y}_2)$, de côté b suivant $(G''_2, \vec{z}_2)$ et d'épaisseur négligeable



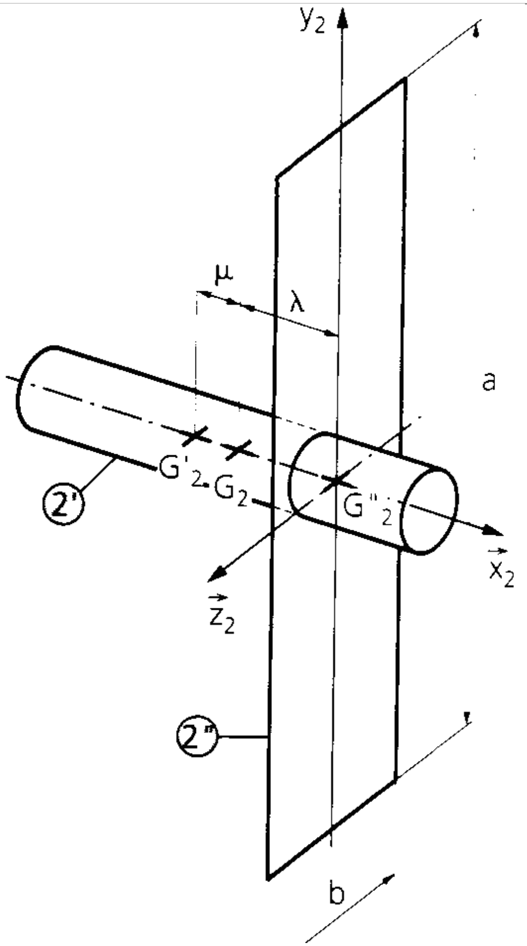
2°/ $2 = 2' + 2''$

$$\overrightarrow{G_2G_2} = \vec{0} = \frac{1}{m'_2 + m''_2}\left(m'_2\overrightarrow{G_2G'_2} + m''_2\overrightarrow{G_2G''_2}\right)$$

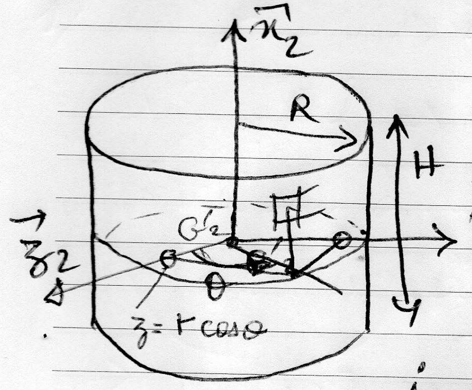
$$\Rightarrow \quad m'_2\mu = m''_2\lambda$$

2. Déterminer La matrice d'inertie en G_2' du solide 2' dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

Un cylindre plein 2' d'axe $(A, \vec{x}_2)$, de masse m_2', de centre d'inertie G_2' ($\overrightarrow{G_2'G_2} = \mu\vec{x}_2$), de hauteur H et de rayon R ;



Matrice d'inertie de 2' :



- $(G_2', \vec{x}_2)$ est un axe de symétrie $\Rightarrow D_2' = E_2' = F_2' = 0$
- $(G_2', \vec{y}_2)$ et $(G_2', \vec{z}_2)$ jouent le m̂ rôle $\Rightarrow B_2' = C_2'$

- $A_2' = \int y^2 + z^2 \, dm$
- $B_2' = \int x^2 + z^2 \, dm$
- $C_2' = \int x^2 + y^2 \, dm = B_2'$

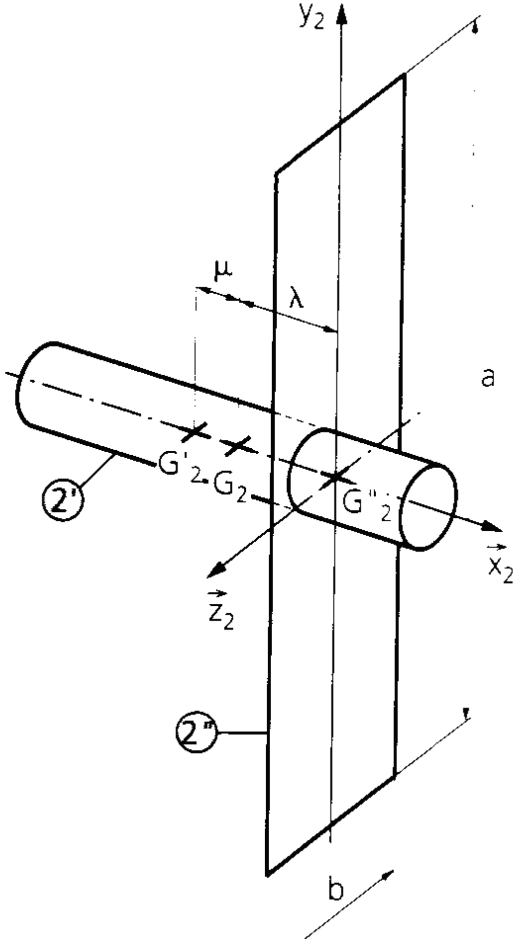
$dm = \frac{m_2'}{\pi R^2 H} r\,dr\,d\theta\,dx$

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -\frac{H}{2} \leq x \leq \frac{H}{2} \end{array}}$$

N.B : $y = r\sin\theta$ et $z = r\cos\theta$

2. Déterminer La matrice d'inertie en G_2' du solide 2' dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

Un cylindre plein 2' d'axe $(A, \vec{x}_2)$, de masse m_2', de centre d'inertie G_2' ($\overrightarrow{G_2'G_2} = \mu\vec{x}_2$), de hauteur H et de rayon R ;



NOTES

$$A_2' = \int r^2\,dm = \frac{m_2'}{\pi R^2 H}\int r^2 \underbrace{r\,dr\,d\theta\,dx}_{dv}$$

$$= \frac{m_2'}{\pi R^2 H}\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dx = \frac{m_2' R^2}{2}.$$

$$B_2' + C_2' = 2B_2' = 2C_2' = A_2' + 2\int x^2\,dm$$

$$B_2' = C_2' = \frac{m_2' R^2}{4} + \int x^2\,dm$$

$$\int x^2\,dm = \frac{m_2'}{\pi R^2 H}\int x^2\, r\,dr\,d\theta\,dx$$

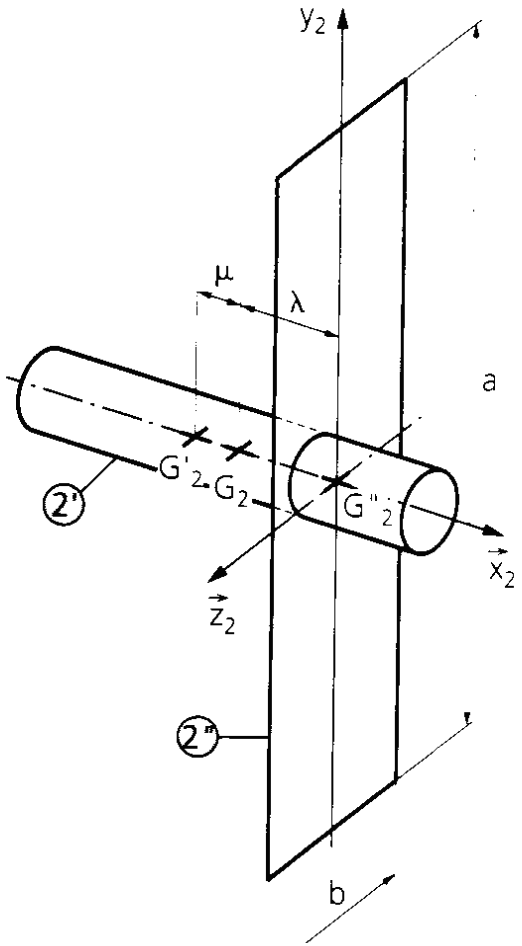
$$= \frac{m_2'}{\pi R^2 H}\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} x^2 dx \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{m_2'}{\pi R^2 H}\;\frac{H^3}{12}\;\frac{R^2}{2}\;2\pi$$

$$= \frac{m_2' H^2}{12}$$

2. Déterminer La matrice d'inertie en G_2' du solide 2' dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

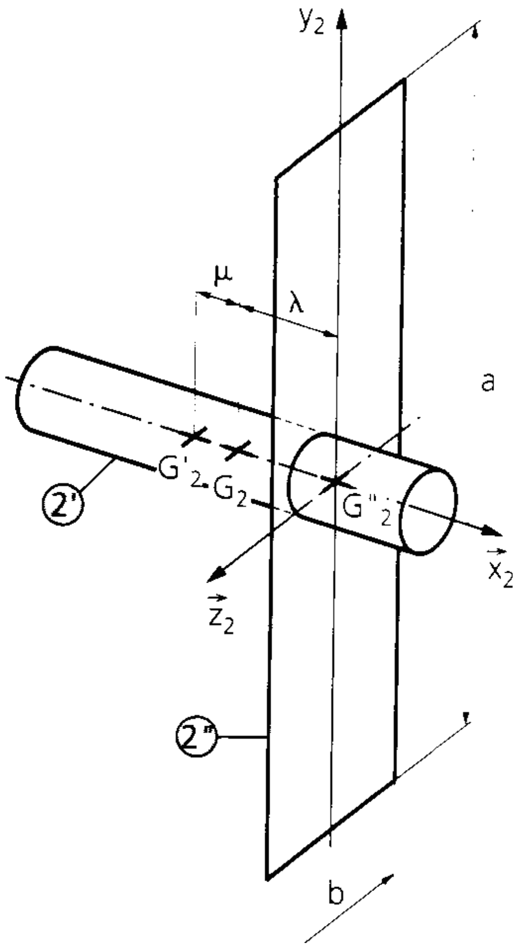
Un cylindre plein 2' d'axe $(A, \vec{x}_2)$, de masse m_2', de centre d'inertie G_2' ($\overrightarrow{G_2'G_2} = \mu \vec{x}_2$), de hauteur H et de rayon R ;



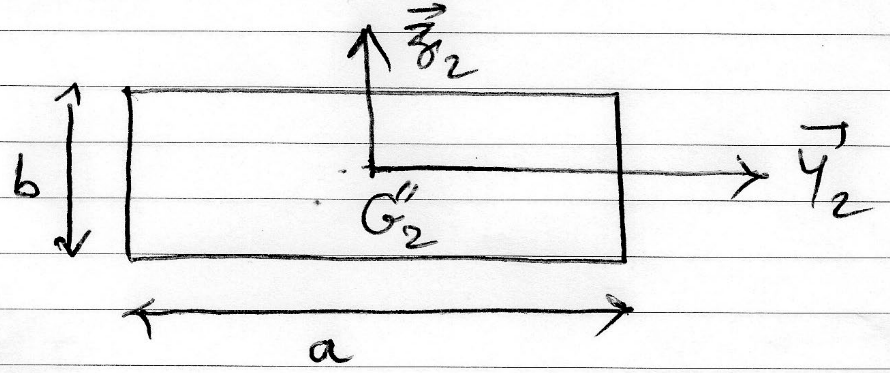
$$[I_{G_2'}(2')] = \begin{bmatrix} \frac{m_2' R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2' R^2}{4} + \frac{m_2' H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2' R^2}{4} + \frac{m_2' H^2}{12} \end{bmatrix}_{R_2}$$

2. La matrice d'inertie en G''_2 du solide 2'' dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

Une plaque rectangulaire 2'' de masse m''_2, de centre d'inertie G''_2 $\left(\overrightarrow{G_2 G''_2} = \lambda \vec{x}_2\right)$, de côté a suivant $(G''_2, \vec{y}_2)$, de côté b suivant $(G''_2, \vec{z}_2)$ et d'épaisseur négligeable



• Matrice d'inertie de 2''



• $(G''_2, \vec{Y}_2)$ est un axe de symétrie

$\Rightarrow D''_2 = E''_2 = F''_2 = 0$

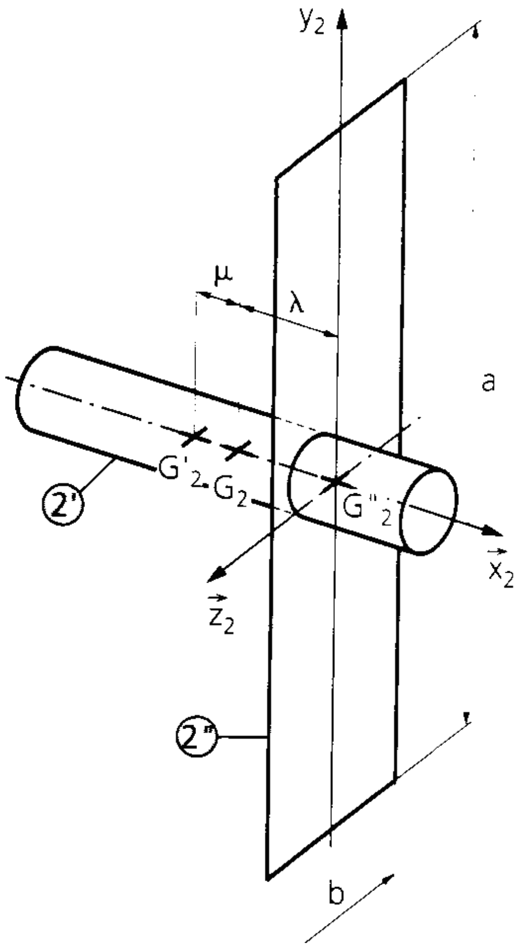
$A''_2 = \int (y^2 + z^2)\, dm$ $\qquad dm = \dfrac{m''_2}{ab}\, dy\, dz$

$B''_2 = \int z^2\, dm$ $\qquad -\dfrac{a}{2} \le y \le \dfrac{a}{2}$

$C''_2 = \int y^2\, dm$ $\qquad -\dfrac{b}{2} \le z \le \dfrac{b}{2}$

2. La matrice d'inertie en G''_2 du solide 2'' dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$;

2. Une plaque rectangulaire 2'' de masse m''_2, de centre d'inertie G''_2 $\left(\overrightarrow{G_2G''_2} = \lambda\vec{x}_2\right)$, de côté a suivant $(G''_2, \vec{y}_2)$, de côté b suivant $(G''_2, \vec{z}_2)$ et d'épaisseur négligeable



$$B''_2 = \int z^2 dm = \frac{m''_2}{ab}\int z^2 dy\, dz$$

$$= \frac{m''_2}{ab}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dz \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy = \frac{m''_2 b^2}{12}$$

$$C''_2 = \frac{m''_2 a^2}{12}$$

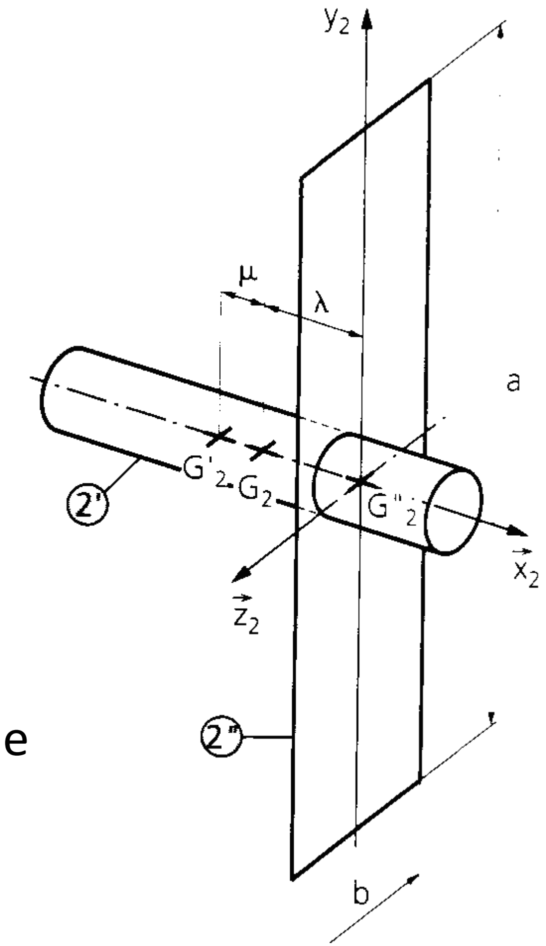
$$A''_2 = B''_2 + C''_2 = \frac{m''_2(a^2+b^2)}{12}$$

$$\Rightarrow \left[I_{G''_2}(2'')\right] = \begin{bmatrix} \frac{m''_2(a^2+b^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m''_2 b^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m''_2 a^2}{12} \end{bmatrix}_{R_2}$$

2. La matrice d'inertie en G_2 du solide 2 dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$;

Un cylindre plein 2' d'axe $(A, \vec{x}_2)$, de masse m_2', de centre d'inertie G_2' ($\overrightarrow{G_2'G_2} = \mu\vec{x}_2$), de hauteur H et de rayon R ;

Une plaque rectangulaire 2'' de masse m_2'', de centre d'inertie G_2'' $\left(\overrightarrow{G_2G_2''} = \lambda\vec{x}_2\right)$, de côté a suivant $(G_2'', \vec{y}_2)$, de côté b suivant $(G_2'', \vec{z}_2)$ et d'épaisseur négligeable



Matrice d'inertie de 2 :

$$[I_{G_2}(2)] = [I_{G_2}(2')] + [I_{G_2}(2'')]$$

? ?

$$\overrightarrow{G_2G_2'} = -\mu\vec{x}_2 \Rightarrow x_{G_2'} = -\mu$$

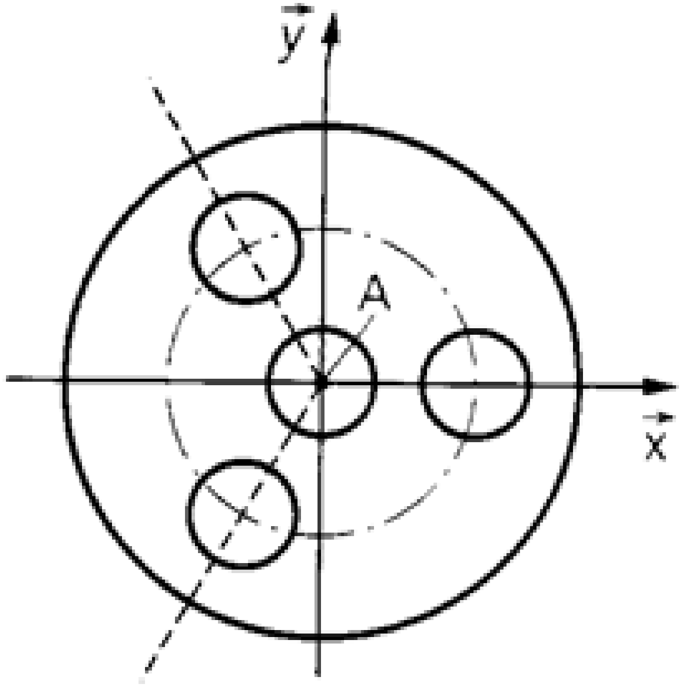
$$[I_{G_2}(2')] = \begin{bmatrix} \frac{m_2'R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2'R^2}{4} + \frac{m_2'H^2}{12} + m_2'\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2'R^2}{4} + \frac{m_2'H^2}{12} + m_2'\mu^2 \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$\overrightarrow{G_2G_2''} = \lambda\vec{x}_2 \Rightarrow x_{G_2''} = \lambda$$

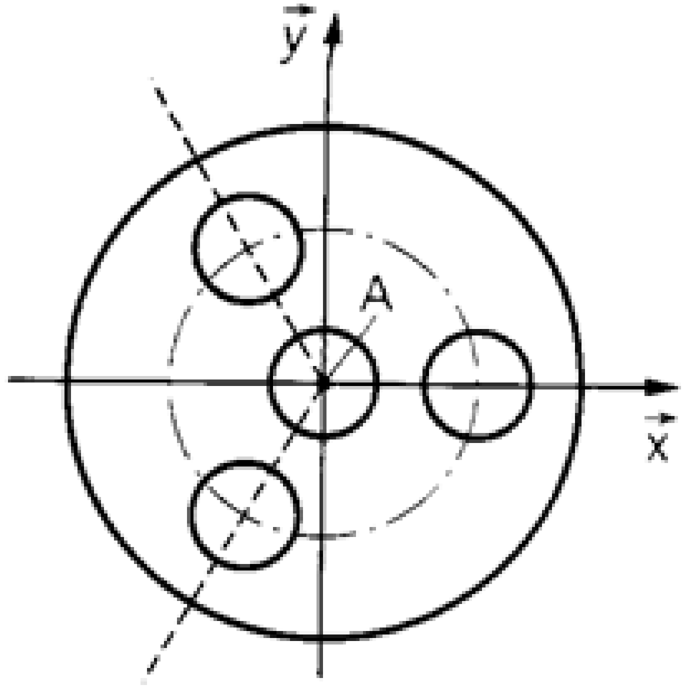
$$[I_{G_2}(2'')] = \begin{bmatrix} \frac{m_2''(a^2+b^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2''b^2}{12} + m_2''\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2''a^2}{12} + m_2''\lambda^2 \end{bmatrix}_{R_2}$$

Exercice 3:

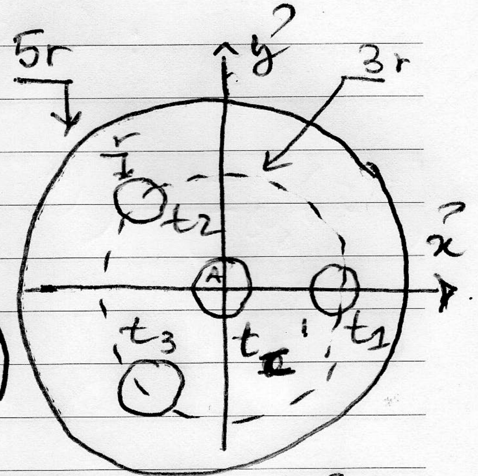
Une roulette (figure suivante) est assimilée à un disque homogène de rayon $5r$ percé de quatre trous de rayon r, l'un centré en A et les trois autres également répartis sur un cercle de rayon $3r$. La masse de la roulette est m. Déterminer son moment d'inertie I_{Az} par rapport à l'axe $(A, \vec{z})$ en fonction de m et r. (Montrer que $I_{Az}(roulette) = 13.5mr^2$)



Montrer que $I_{Az}(roulette) = 13.5mr^2$



EX3



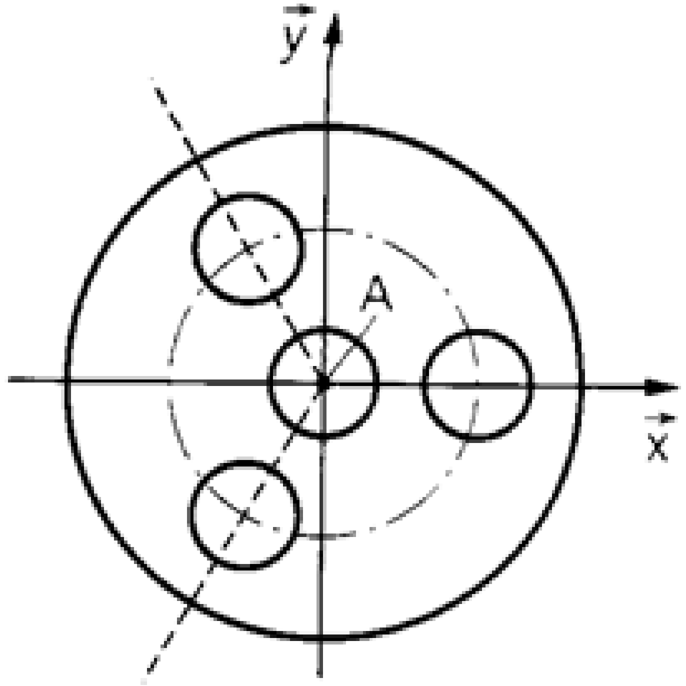
$$I_{Az}(roulette) = I_{Az}(Disque) - I_{Az}(t_c) - 3 I_{Az}(t_1)$$

- $I_{Az}(Disque) = \dfrac{\sigma \pi (5r)^2 \times (5r)^2}{2} = \dfrac{625 \sigma \pi r^4}{2}$

- $I_{Az}(t_c) = \dfrac{\sigma \pi r^2 \times r^2}{2} = \dfrac{\sigma \pi r^4}{2}$

- $I_{Az}(t_1) = \dfrac{\sigma \pi r^4}{2} + \sigma \pi r^2 (3r)^2$
  $= \dfrac{\sigma \pi r^4}{2} + 9 \sigma \pi r^4$

Montrer que $I_{Az}(roulette) = 13.5mr^2$



$$\sigma = \frac{m}{\pi(25r^2 - 4r^2)} = \frac{m}{21\pi r^2}$$

$$I_{Az}(roulette) = \sigma\pi r^4\left[\frac{625}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 27\right]$$

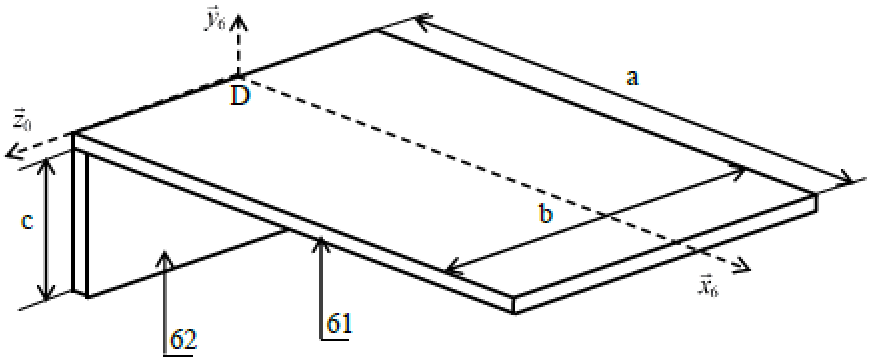
$$= \frac{567\,\sigma\pi r^4}{2}$$

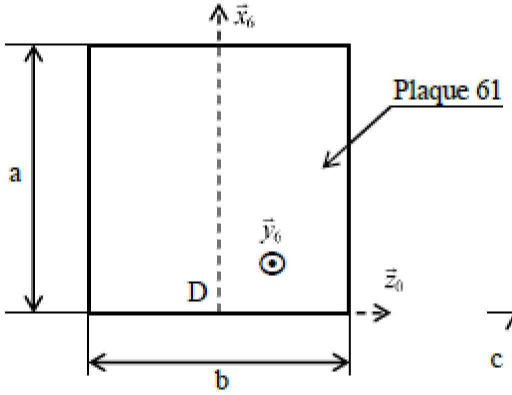
$$= \frac{567\pi r^4}{2}\;\frac{m}{21\pi r^2}$$

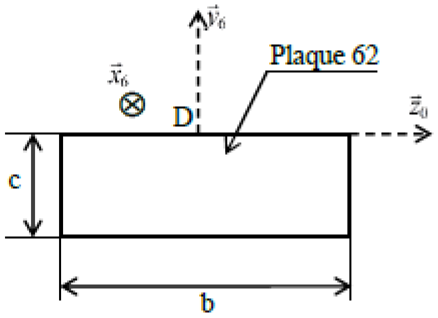
$$= 13{,}5\, m r^2$$

Exercice 4

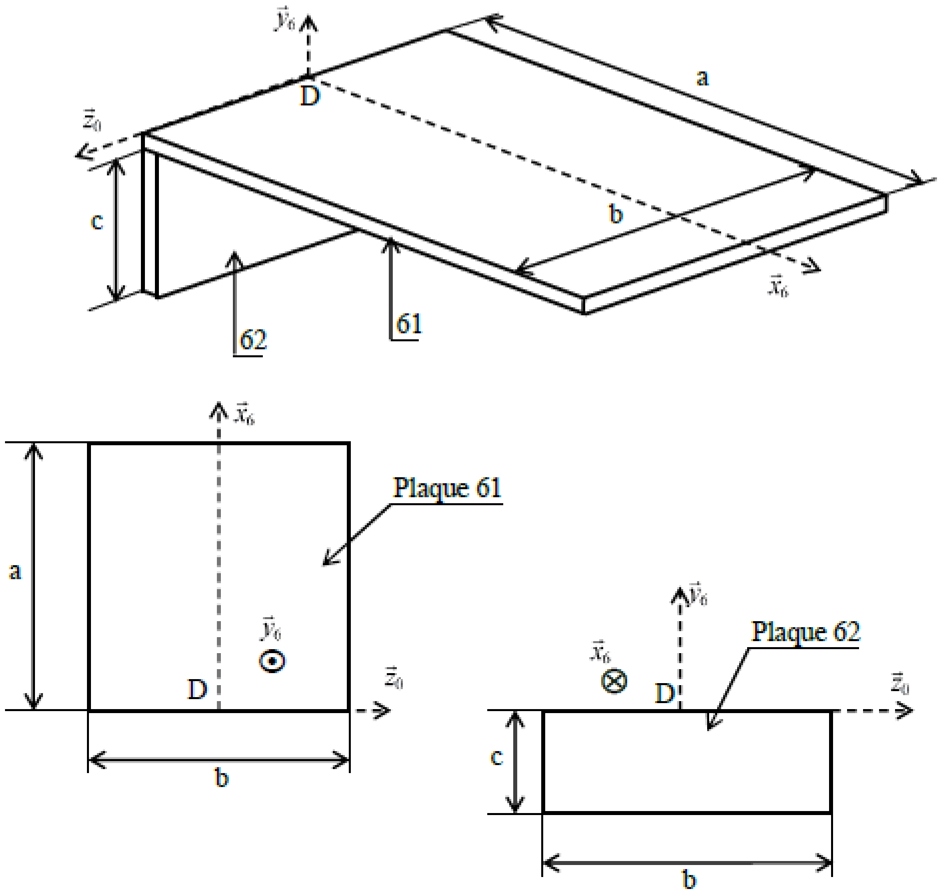
Le plateau 6 est modélisé par deux plaques (61 et 62) homogènes et d'épaisseurs négligeables. Les deux plaques 61 et 62 présentent la **même masse surfacique σ.**







1, Déterminer la position du centre d'inertie du plateau 6 ; $\overrightarrow{DG_6}$

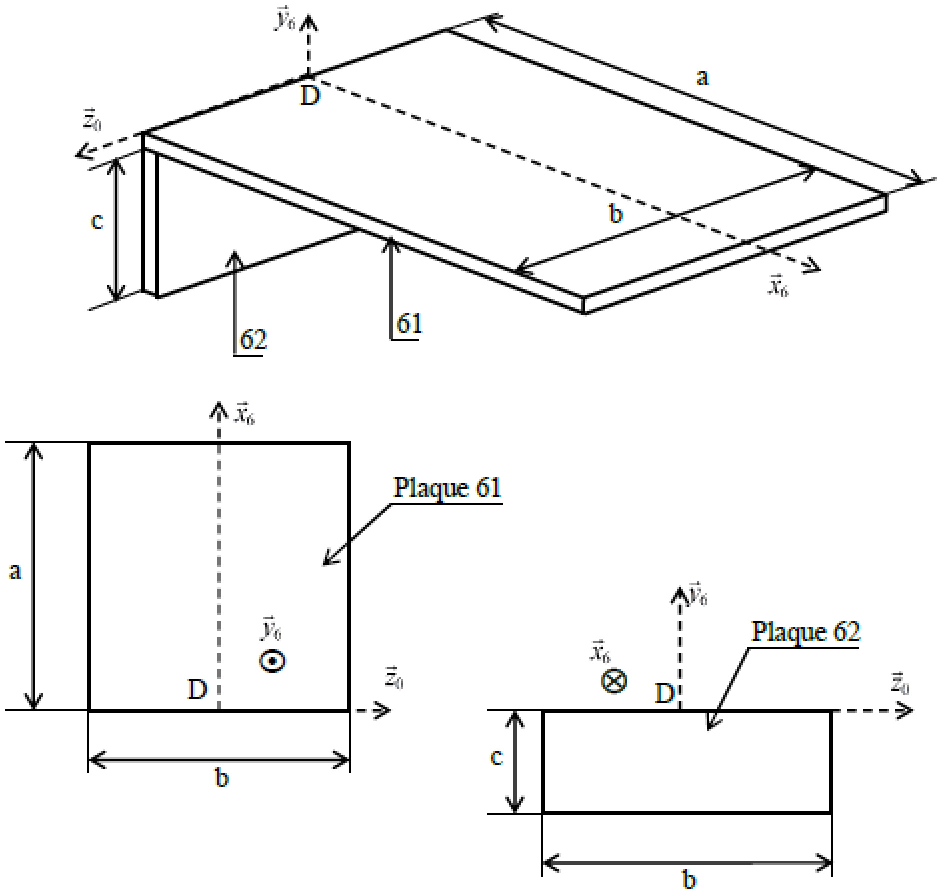


$$\overrightarrow{DG_6} = \frac{1}{\sum S_i} \sum_i S_i \cdot \overrightarrow{DG_i}$$

$$= \frac{1}{ab+bc}\left(ab\frac{a}{2}\vec{x}_6 - bc\frac{c}{2}\vec{y}_6\right)$$

$$= \frac{a^2}{2(a+c)}\vec{x}_6 - \frac{c^2}{2(a+c)}\vec{y}_6$$

2. Justifier cette forme.



$[I_D(6)]_{R_6} = [I_D(61)]_{R_6} + [I_D(62)]_{R_6}$

$(D, \vec{x}_6)$ est un axe de symétrie

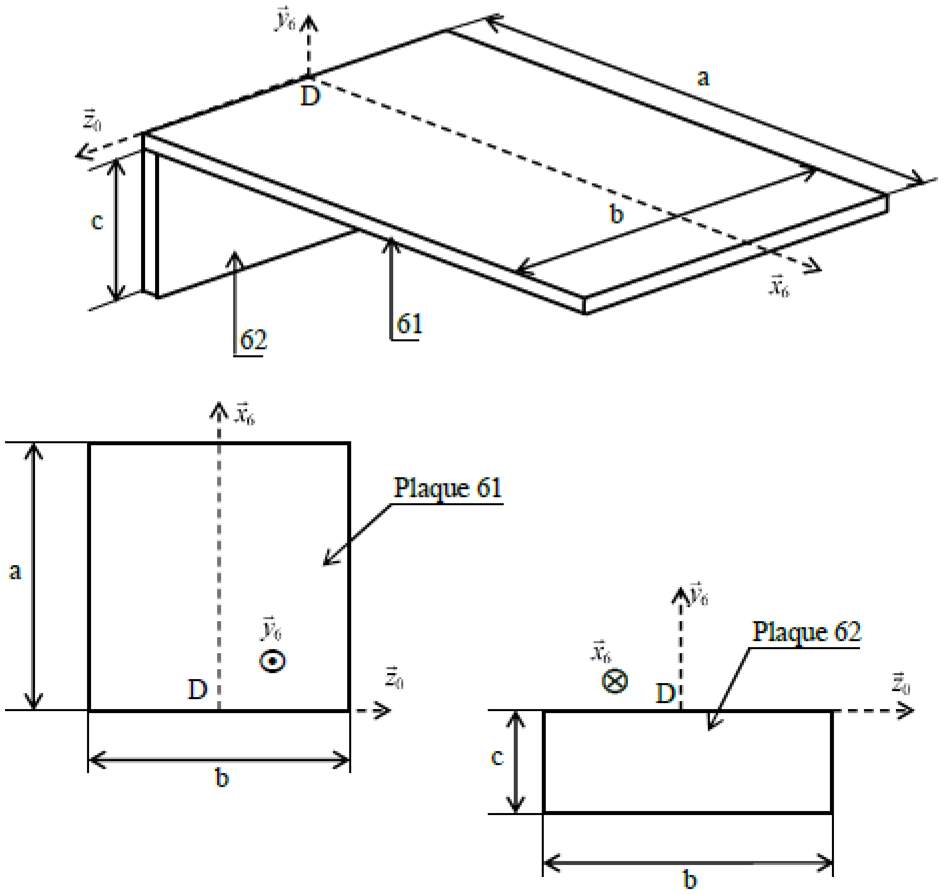
$\Rightarrow [I_D(61)]$ est diagonale

$(D, \vec{y}_6)$ est un axe de symétrie

$\Rightarrow [I_D(62)]$ est diagonale

D'où $[I_D(6)]$ est diagonale

3. Déterminer la matrice d'inertie de la plaque 61 au point D et dans la base du repère R_6.



$$[I_D(61)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{R_6}$$

$$A_1 = \int (y^2+z^2)\, dm = \int z^2 dm$$

$$B_1 = \int x^2+z^2 dm = A_1 + C_1$$

$$C_1 = \int x^2 dm$$

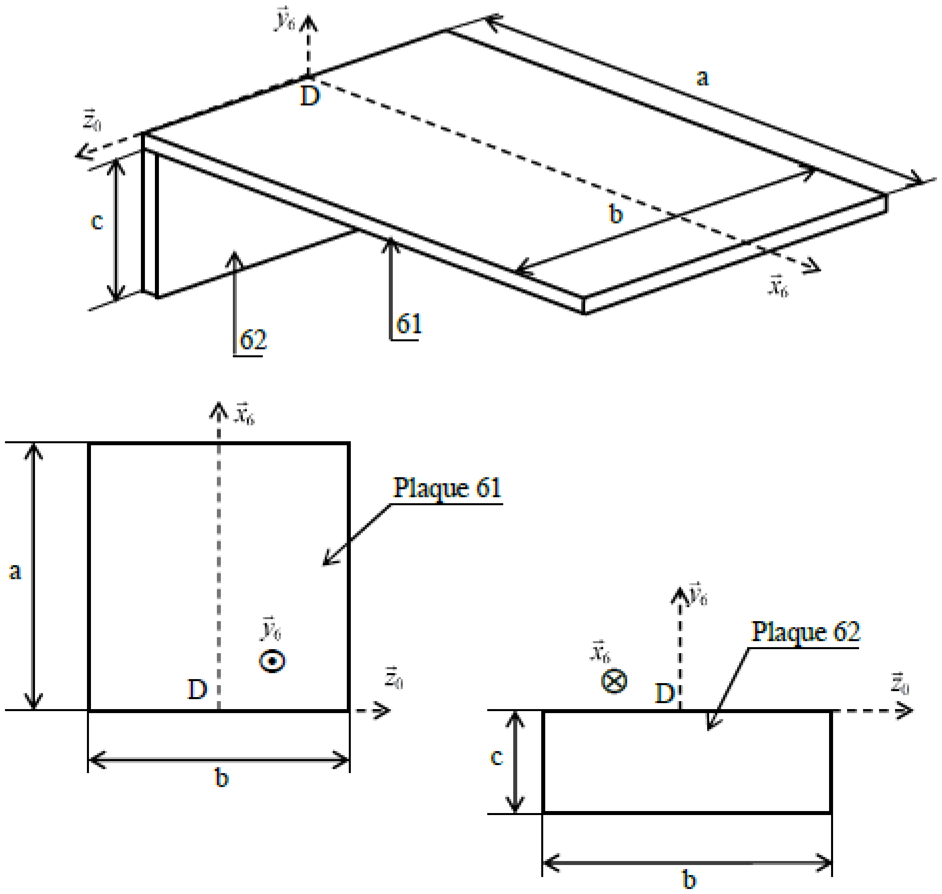
$dm = \sigma\, dx\, dz$ avec

$$0 \leq x \leq a$$

$$-\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2}$$

ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

3. Déterminer la matrice d'inertie de la plaque 61 au point D et dans la base du repère R_6.



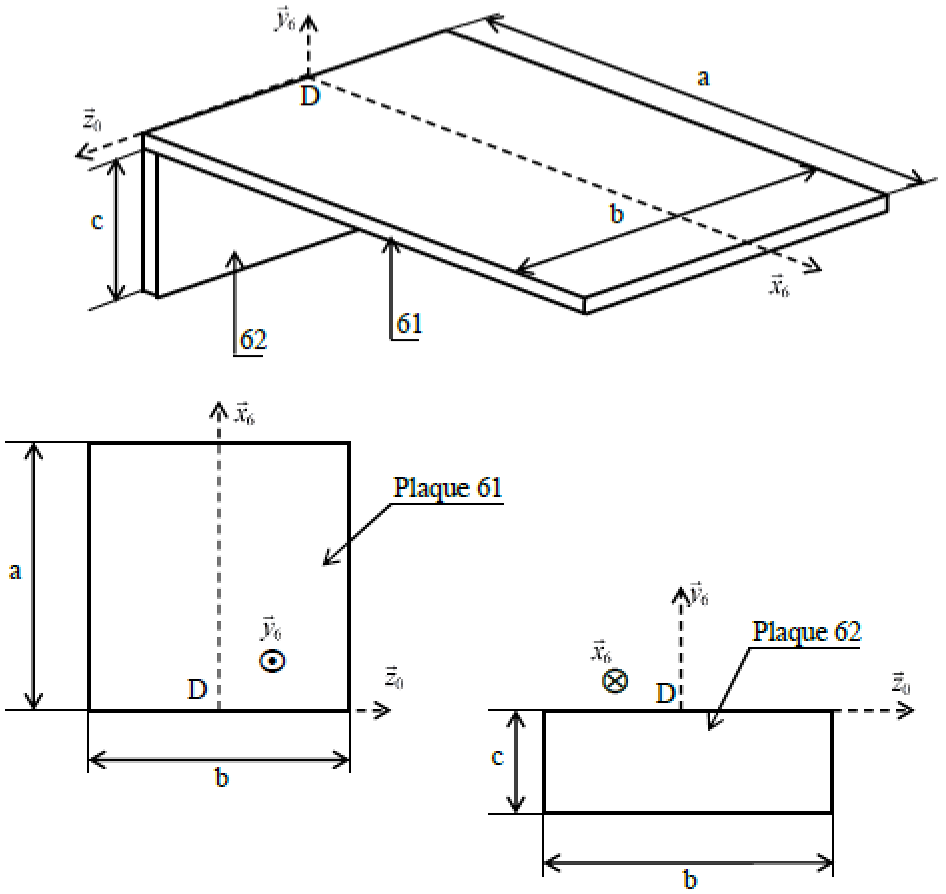
$$A_1 = \int z^2 dm = \sigma \int z^2 dx\,dz = \sigma \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dz \int_0^a dx$$

$$= \frac{\sigma a b^3}{12}$$

$$C_1 = \int x^2 dm = \sigma \int_0^a x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz = \frac{\sigma a^3 b}{3}$$

$$B_1 = A_1 + C_1 = \sigma ab\left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12}\right)$$

4. Déterminer la matrice d’inertie de la plaque 62 au point D et dans la base du repère R_6.



$$[I_D(62)] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R_6}$$

$$\begin{cases} A_2 = \int (y^2+z^2)\,dm = B_2 + C_2 \\ B_2 = \int (x^2+z^2)\,dm = \int z^2\,dm \\ C_2 = \int (x^2+y^2)\,dm = \int y^2\,dm \end{cases}$$

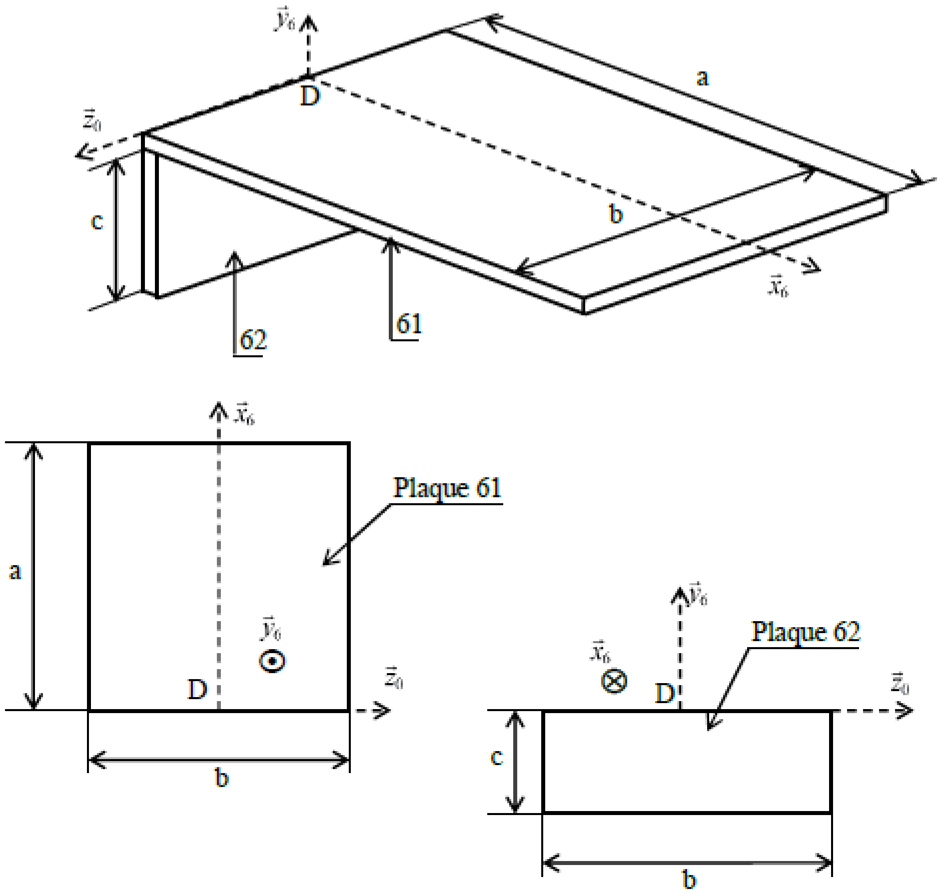
$$B_2 = \sigma \int z^2\,dy\,dz = \sigma \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2\,dz \int_{-c}^{0} dy$$

$$= \frac{\sigma c b^3}{12}$$

$$C_2 = \sigma \int_{-c}^{0} y^2\,dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz = \frac{\sigma b c^3}{3}$$

$$A_2 = B_2 + C_2 = \sigma b c \left(\frac{c^2}{3} + \frac{b^2}{12}\right)$$

5. Déduire le moment d'inertie du plateau 6 par rapport à l'axe $(D, \vec{z}_0)$.



$$C_6 = C_2 + C_1$$

$$= \frac{\sigma b}{3}\left(a^3 + b^3\right)$$

Merci pour votre attention