Dynamique des solides indéformables

LEFI ABDELLAOUI: INGÉNIEUR DOCTEUR AGRÉGÉ EN GÉNIE MÉCANIQUE

IPEIB 2020

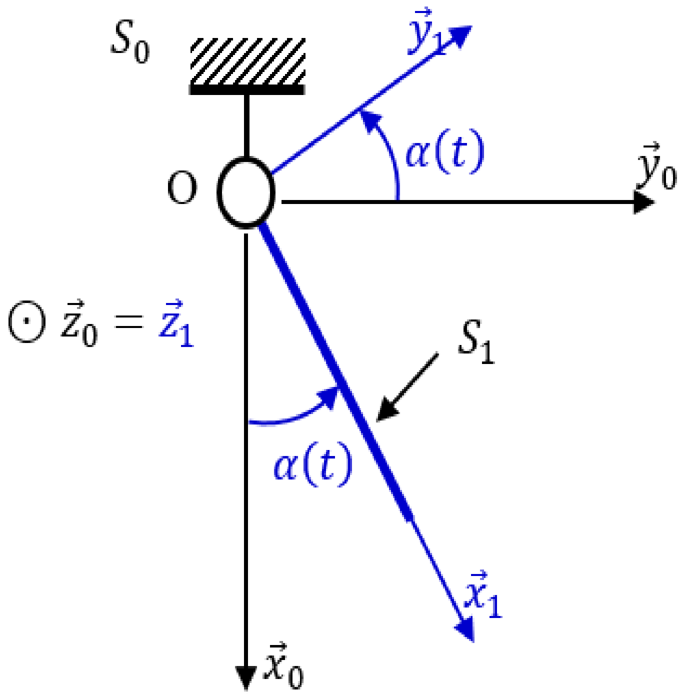
Exercice 1: Bras de robot

Données :

- Le bras S_1 est de masse m_1 et de matrice d'inertie

$$[I_0(S_1)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_1} \quad ;$$

- Le centre d'inertie G_1 de S_1 est donné par $\overrightarrow{OG_1} = a\vec{x}_1$;
- La liaison pivot $(O, \vec{z}_0)$ est parfaite ;
- Le champ de la pesanteur est modélisé par $\vec{g} = g\vec{x}_0$
- Un servomoteur exerce un couple moteur $\vec{C}_m = C_m\vec{z}_0$ sur le bras S_1
- Le repère R_0 est supposé galiléen.



Déterminer, dans la base du repère R_0, le torseur des actions mécaniques extérieures à S_1.

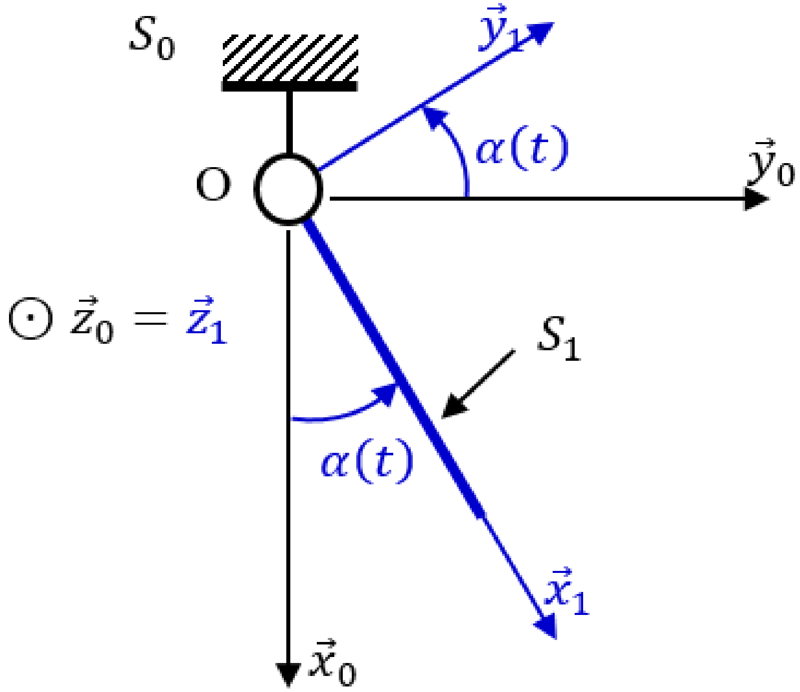
(1) $\bar{S}_1 = \{ S_0, \vec{g}, \text{moteur} \}$

$$\{F(S_0 \to S_1)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{matrix} \right\}_{O,\,R_0}$$

$$\{F(\vec{g} \to S_1)\} = \left\{ \begin{matrix} m_1 g \vec{x}_0 \\ \vec{OG}_1 \wedge m_1 g \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_{O}$$

$$\vec{OG}_1 \wedge m_1 g \vec{x}_0 = a \vec{x}_1 \wedge m_1 g \vec{x}_0$$

$$= m_1 g a \, \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0$$



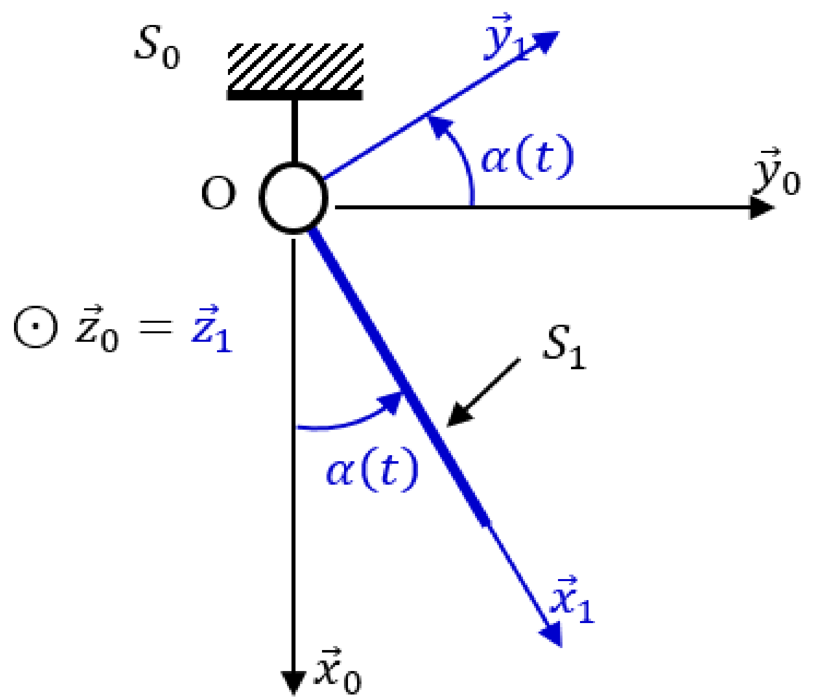
Déterminer, dans la base du repère R_0, le torseur des actions mécaniques extérieures à S_1.

$$= -\,m a g \sin\alpha\, \vec{z}_0$$

$$\Rightarrow \{F(\vec{g} \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} m_1 g & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -m a g \sin\alpha \end{array} \right\}_{O,\,R_0}$$

$$\{F(mot \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_m \end{array} \right\}_{O,\,R_0}$$

$$\Rightarrow \{F(\bar{S}_1 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01} + m_1 g & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & C_m - m a g \sin\alpha \end{array} \right\}_{O,\,R_0}$$



Déterminer, dans la base du repère R_0, le torseur dynamique de S_1 dans son mouvement par rapport à R_0.

②

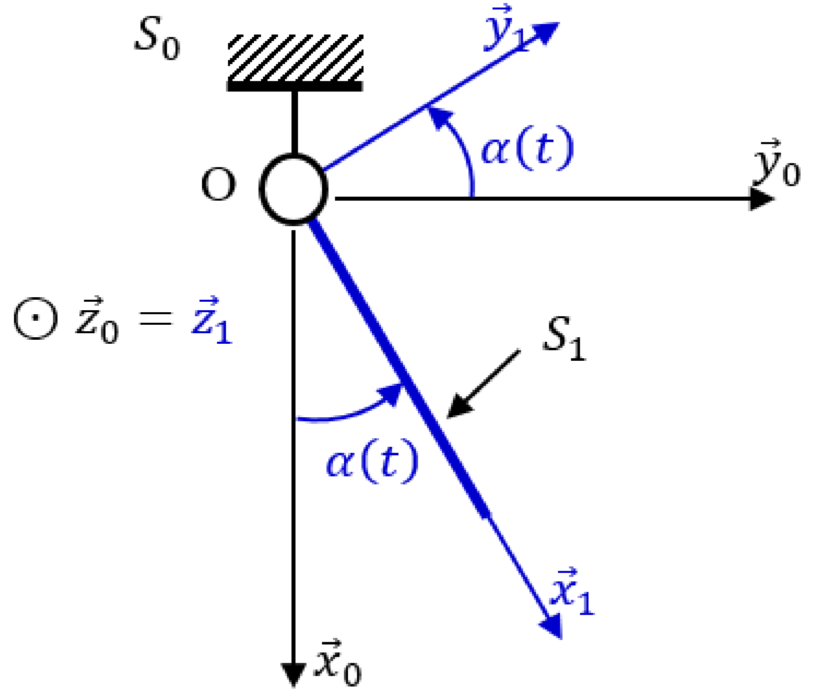
$$\{D(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \vec{\Gamma}(G_1 \in S_1/R_0) \\ \vec{\delta}_O(S_1/R_0) \end{array} \right\}_O$$

$$m_1 \vec{\Gamma}(G_1 \in S_1/R_0) = m_1 \left.\frac{d\vec{V}(G_1 \in S_1/R_0)}{dt}\right]_{R_0}$$

$$= m_1 \left.\frac{d}{dt}\, a\dot{\alpha}\,\vec{y}_1\right]_{R_0} = m_1 a\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 - m_1 a\dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1$$

$$= m_1 a \left[\ddot{\alpha} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \dot{\alpha}^2 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= m_1 a \begin{pmatrix} -\ddot{\alpha}\sin\alpha - \dot{\alpha}^2\cos\alpha \\ \ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$



Déterminer, dans la base du repère R_0, le torseur dynamique de S_1 dans son mouvement par rapport à R_0.

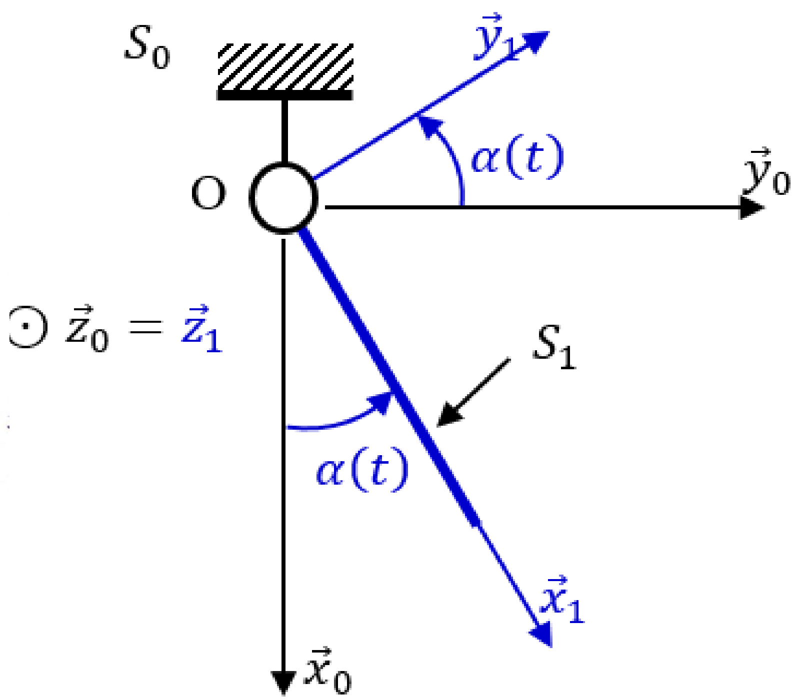
$$\cdot\ \vec{\delta}_0(S_1/R_0) = \frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_0(S_1/R_0)\right]_{R_0}$$

$$\vec{\sigma}_0(S_1/R_0) = \left[I_0(S_1)\right]\vec{\Omega}(S_1/R_0)$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{R_1} = C\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}_0(S_1/R_0) = C\ddot{\alpha}\,\vec{z}_0$$

$$\{D(S_1/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l|l} -m_1 a(\ddot{\alpha}\sin\alpha + \dot{\alpha}^2\cos\alpha) & 0 \\ m_1 a(\ddot{\alpha}\cos\alpha - \dot{\alpha}^2\sin\alpha) & 0 \\ 0 & C\ddot{\alpha} \end{array} \right\}_{O,\,R_0}$$

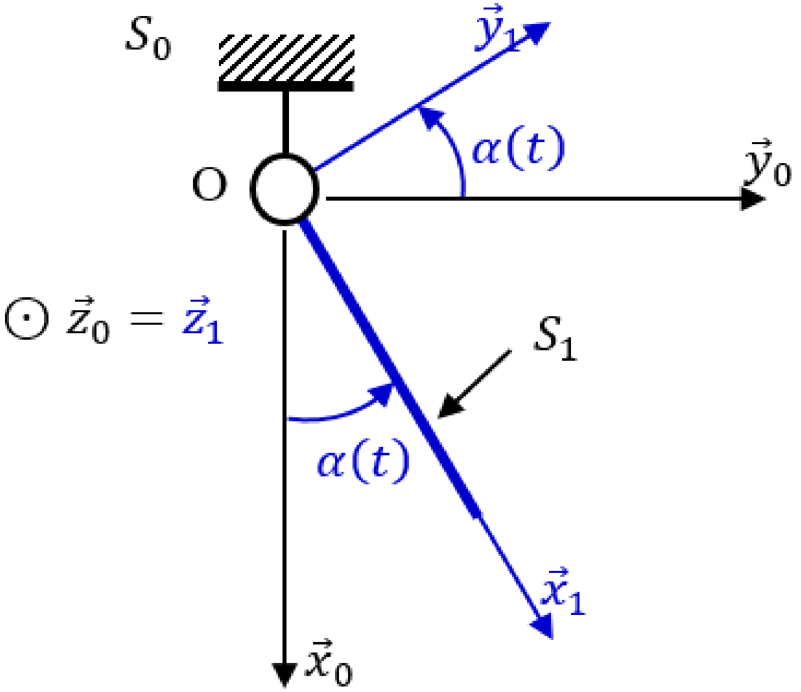


En appliquant le PFD, déduire les expressions des inconnues statiques de la liaison pivot $(O, \vec{z}_0)$;

(3)

$$PFD \Rightarrow \{F(\bar{S}_1 \rightarrow S_1)\}_O = \{D(S_1 | R_0)\}_O$$

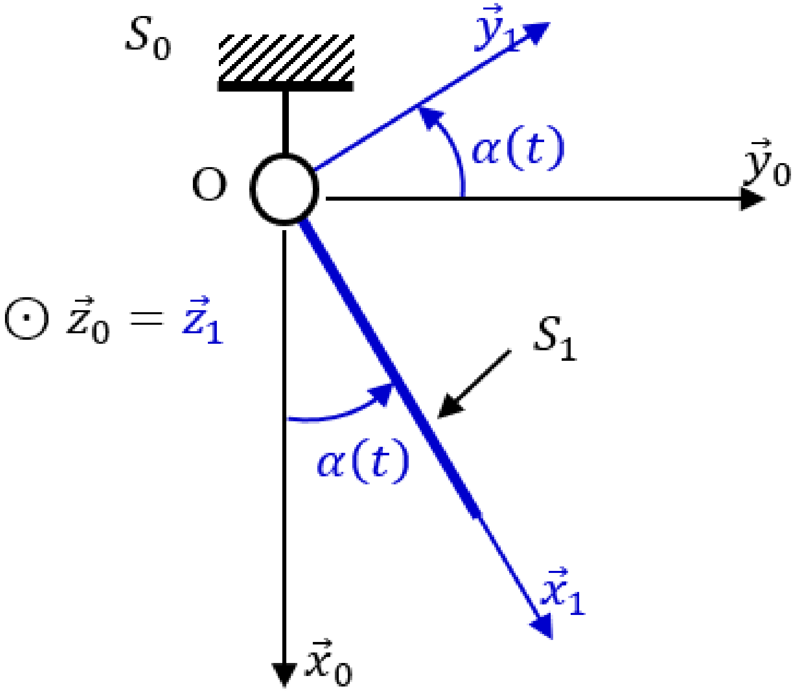
$$\Rightarrow \begin{cases} X_{01} = -m_1 g - m_1 a(\ddot{\alpha} \sin\alpha + \dot{\alpha}^2 \cos\alpha) \\ Y_{01} = m_1 a(\ddot{\alpha} \cos\alpha - \dot{\alpha}^2 \sin\alpha) \\ Z_{01} = 0 \\ L_{01} = 0 \\ M_{01} = 0 \\ C_m = m a g \sin\alpha + c\ddot{\alpha} \end{cases}$$



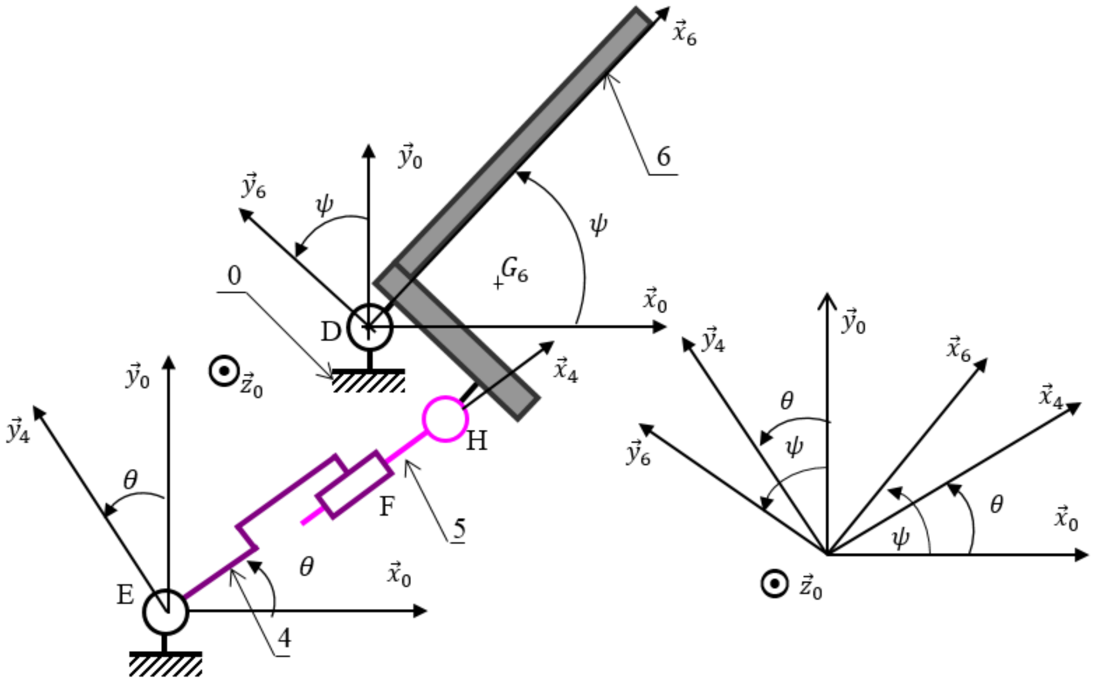
Déduire l'équation de mouvement.

(4) L'équation de mouvement est :

$$C_m = m\,a\,g\sin\alpha + C\ddot{\alpha}$$



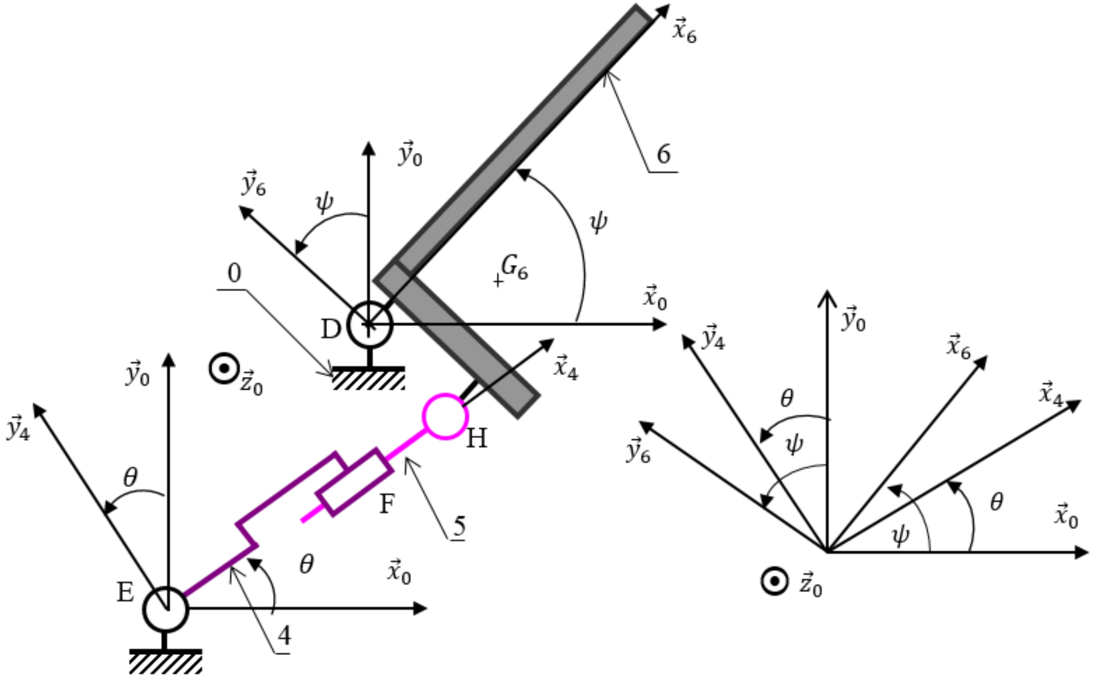
Exercice 2: hayon d’un camion



Exercice 2: hayon d'un camion

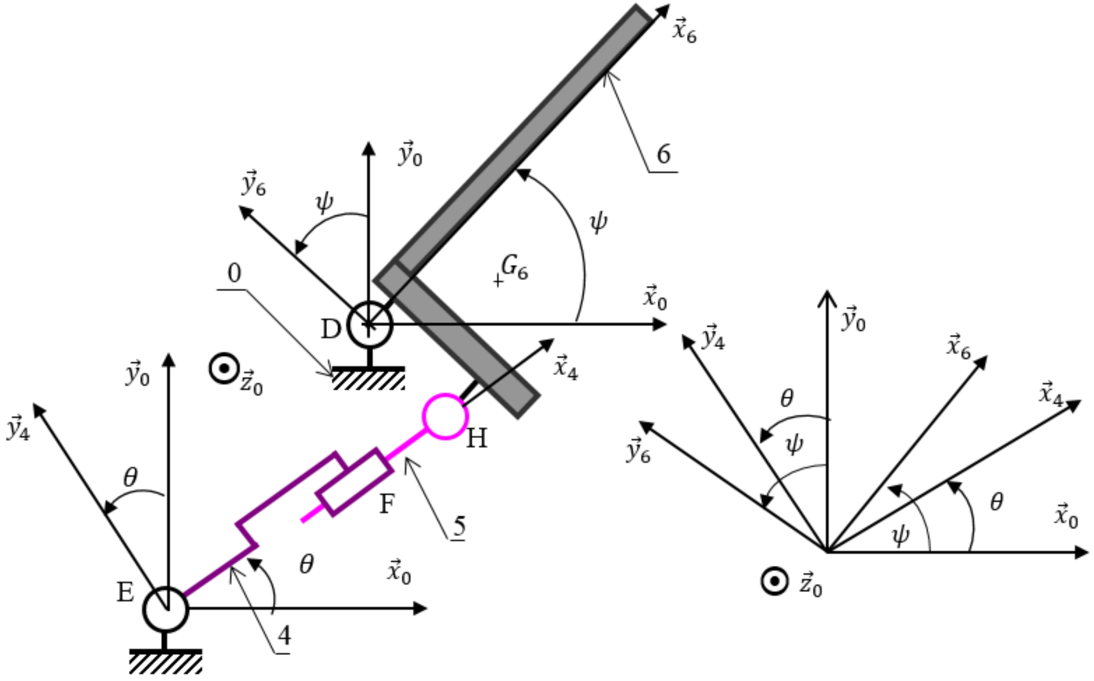
Le schéma cinématique suivant représente le système lors de l'opération d'ouverture ou de fermeture du plateau.

On donne $\overrightarrow{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0$, $\overrightarrow{HD} = h\vec{y}_6$, $\overrightarrow{FH} = \mu\vec{x}_4$, $\overrightarrow{EF} = d\vec{x}_4$ et $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_6) = (\vec{y}_0, \vec{y}_6)$ avec : $e, f, h \; et \; d$ sont des constantes positives et μ est une variable.



1. Exprimer dans la base de R_6 la vitesse du centre d'inertie G_6 du plateau 6 dans son mouvement par rapport à R_0. $\vec{V}(G_6 \in 6/R_0)$Sachant que $\overrightarrow{DG_6} = x_G\vec{x}_6 + y_G\vec{y}_6$.

$$\vec{V}(G_6 \in 6/R_0) = \left.\frac{d\overrightarrow{DG_6}}{dt}\right|_{R_0} = x_G\dot{\psi}\vec{y}_6 - y_G\dot{\psi}\vec{x}_6.$$



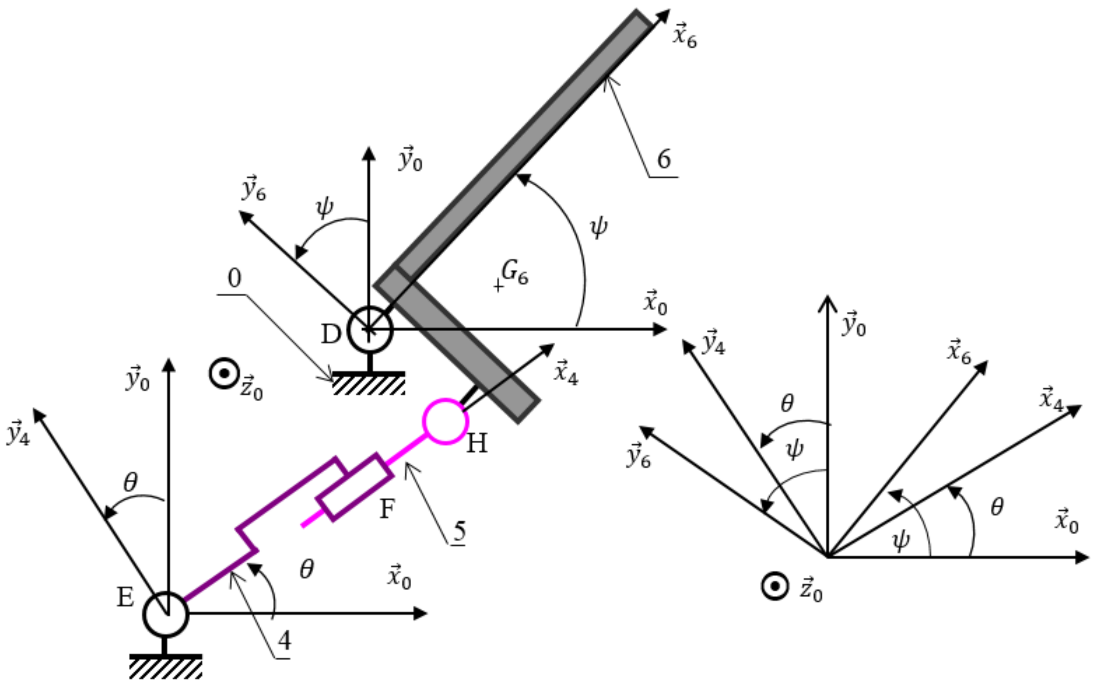
$\overrightarrow{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0, \overrightarrow{HD} = h\vec{y}_6,$
$\overrightarrow{FH} = \mu\vec{x}_4, \overrightarrow{EF} = d\vec{x}_4$

2. Exprimer dans la base de R_6 l'accélération du centre d'inertie G_6 du plateau 6 dans son mouvement par rapport à R_0. $\vec{\Gamma}(G_6 \in 6/R_0)$

$$\vec{V}(G_6 \in 6/R_0) = \left.\frac{d\,\overrightarrow{DG_6}}{dt}\right|_{R_0} = x_6\dot{\psi}\,\vec{y}_6 - y_6\dot{\psi}\,\vec{x}_6$$

$$\vec{\Gamma}(G_6 \in 6/R_0) = \left.\frac{d\,\vec{V}(G_6 \in 6/R_0)}{dt}\right|_{R_0}$$

$$= \left(x_6\ddot{\psi} - y_6\dot{\psi}^2\right)\vec{y}_6 - \left(y_6\ddot{\psi} + x_6\dot{\psi}^2\right)\vec{x}_6$$



$\overrightarrow{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0, \overrightarrow{HD} = h\vec{y}_6,$
$\overrightarrow{FH} = \mu\vec{x}_4, \overrightarrow{EF} = d\vec{x}_4$

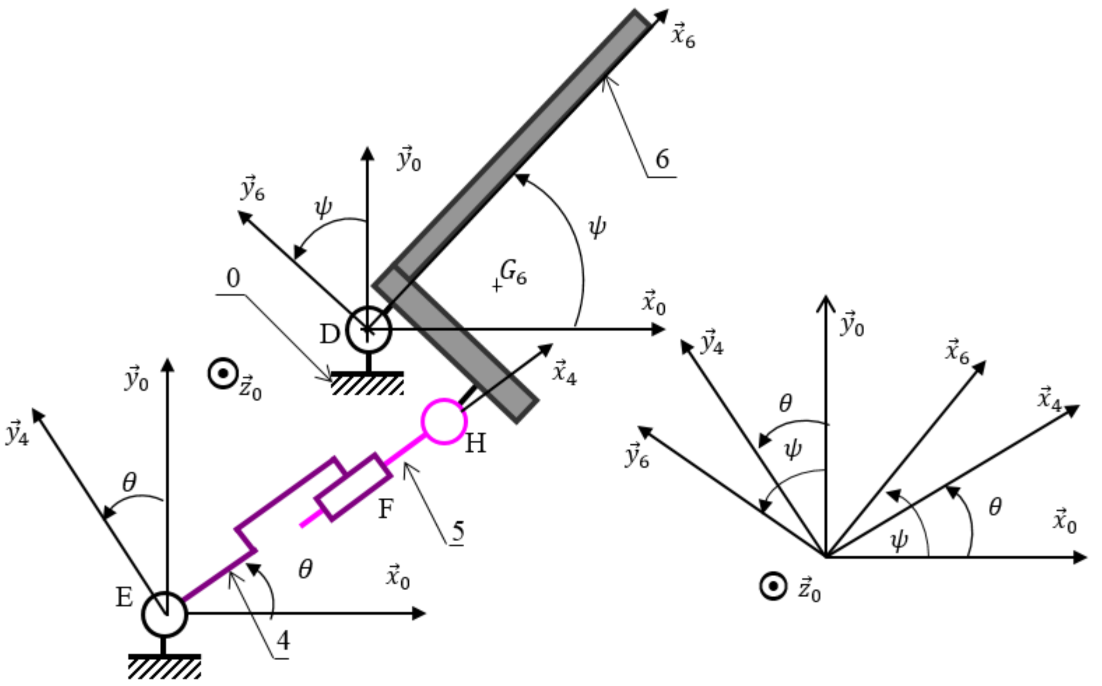
3. Exprimer dans la base du repère R_6 les éléments de réduction du torseur cinétique du plateau 6 dans son mouvement par rapport à R_0 sachant que le plateau 6 est de masse m_6 et admet une matrice d'inertie diagonale au point D et dans la base du repère R_6 avec $I_{D\vec{z}_0} = I$.

$$\{C(6/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} m_6 \vec{V}(G_6 \in 6/R_0) \\ \vec{\sigma}_D(6/R_0) \end{matrix} \right\}_D$$

$$\vec{\sigma}_D(6/R_0) = [I_D(6)]\,\vec{\Omega}(6/R_0) = I\dot{\psi}\,\vec{z}_0$$

$$m_6 \vec{V}(G_6 \in 6/R_0) = m_6 x_G \dot{\psi}\,\vec{y}_6 - m_6 y_G \dot{\psi}\,\vec{x}_6$$

$$\Rightarrow \{C(6/R_0)\} = \left\{ \begin{matrix} -m_6 y_G \dot{\psi} & 0 \\ m_6 x_G \dot{\psi} & 0 \\ 0 & I\dot{\psi} \end{matrix} \right\}_{D,\,R_6}$$



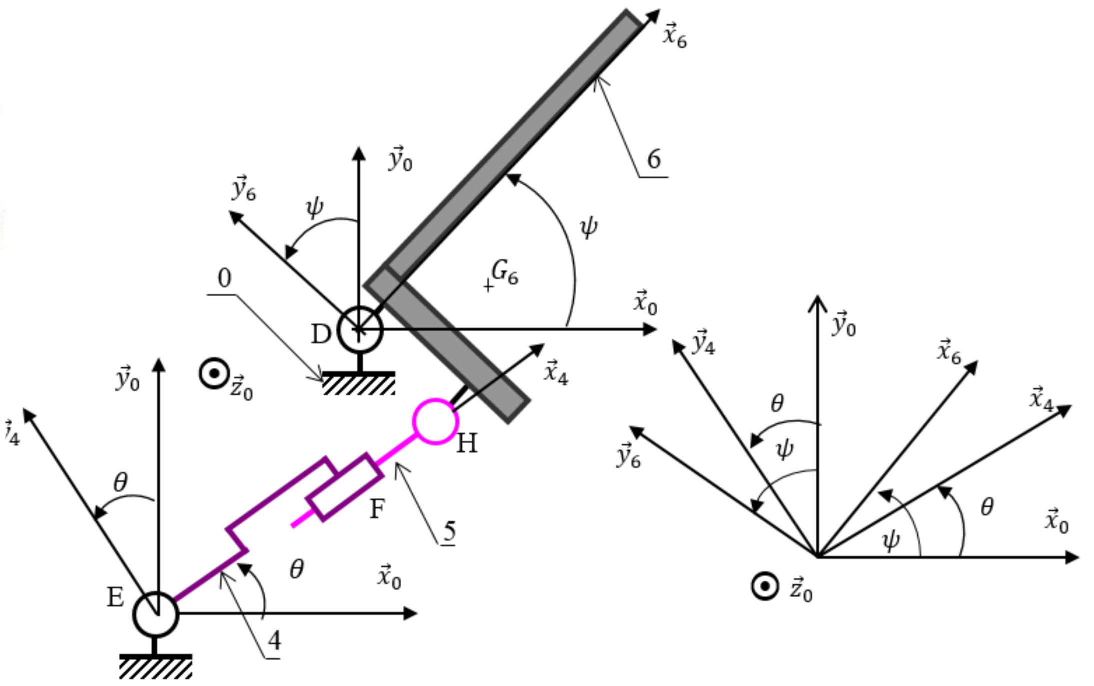
$\overrightarrow{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0$, $\overrightarrow{HD} = h\vec{y}_6$,
$\overrightarrow{FH} = \mu\vec{x}_4$, $\overrightarrow{EF} = d\vec{x}_4$

4. Exprimer dans la base du repère R_6 les éléments de réduction du torseur dynamique du plateau 6 dans son mouvement par rapport à R_0.

$$\{\mathcal{D}(6/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c} m_6 \vec{\Gamma}(G_6 \in 6/R_0) \\ \vec{\delta}_D(6/R_0) \end{array} \right\}_D$$

$$m_6 \vec{\Gamma}(G_6 \in 6/R_0) = -m_6(y_6 \ddot{\psi} + x_6 \dot{\psi}^2)\vec{x}_6 + m_6(x_6 \ddot{\psi} - y_6 \dot{\psi}^2)\vec{y}_6$$

$$\{\mathcal{D}(6/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} -m_6(y_6 \ddot{\psi} + x_6 \dot{\psi}^2) & 0 \\ m_6(x_6 \ddot{\psi} - y_6 \dot{\psi}^2) & 0 \\ 0 & I\ddot{\psi} \end{array} \right\}_{D,\,R_6}$$



$\overrightarrow{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0$, $\overrightarrow{HD} = h\vec{y}_6$,
$\overrightarrow{FH} = \mu\vec{x}_4$, $\overrightarrow{EF} = d\vec{x}_4$

5. Exprimer au point D et dans la base du repère R_6 les éléments de réduction du torseur d'actions mécaniques extérieures au plateau 6. On donne $\vec{g} = -g\vec{y}_0$, l'action mécanique de la tige du vérin 5 sur le plateau 6 est donnée par le torseur suivant $\{F(5 \longrightarrow 6)\}_H = \left\{\begin{matrix} F_0\vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$ et on suppose que toutes les liaisons sont parfaites.

5°

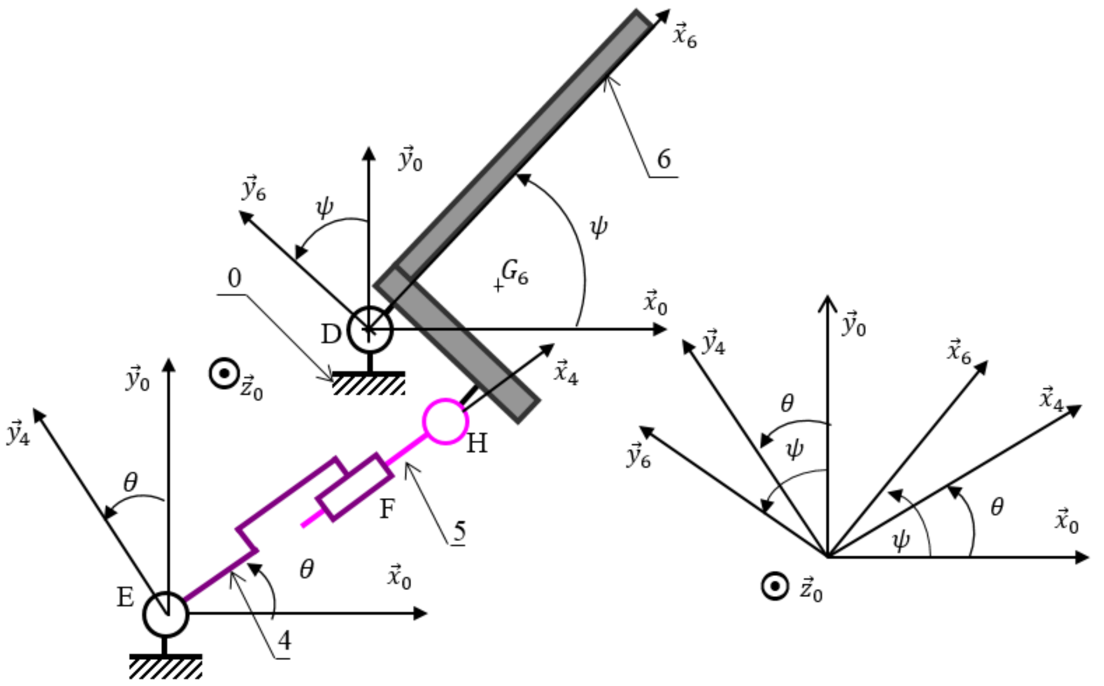
$\overline{6} = \{0, 5, \vec{g}\}$

$\{F(0 \to 6)\} = {}_O\left\{\begin{matrix} X_{06} & L_{06} \\ Y_{06} & M_{06} \\ Z_{06} & 0 \end{matrix}\right\}_{R_6}$

$\{F(5 \to 6)\} = {}_D\left\{\begin{matrix} F_0\vec{x}_4 \\ \overrightarrow{DH} \wedge F_0\vec{x}_4 \end{matrix}\right\}$

$\overrightarrow{DH} \wedge F_0\vec{x}_4 = -h\vec{y}_6 \wedge F_0\vec{x}_4 = hF_0\cos(\psi-\theta)\vec{z}_0$

$F_0\vec{x}_4 = F_0\left(\cos(\psi-\theta)\vec{x}_6 - \sin(\psi-\theta)\vec{y}_6\right)$



$\overrightarrow{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0$, $\overrightarrow{HD} = h\vec{y}_6$,
$\overrightarrow{FH} = \mu\vec{x}_4$, $\overrightarrow{EF} = d\vec{x}_4$

5. Exprimer au point D et dans la base du repère R_6 les éléments de réduction du torseur d'actions mécaniques extérieures au plateau 6. On donne $\vec{g} = -g\vec{y}_0$, l'action mécanique de la tige du vérin 5 sur le plateau 6 est donnée par le torseur suivant $\{F(5 \longrightarrow 6)\}_H = \begin{Bmatrix} F_0\vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ et on suppose que toutes les liaisons sont parfaites.

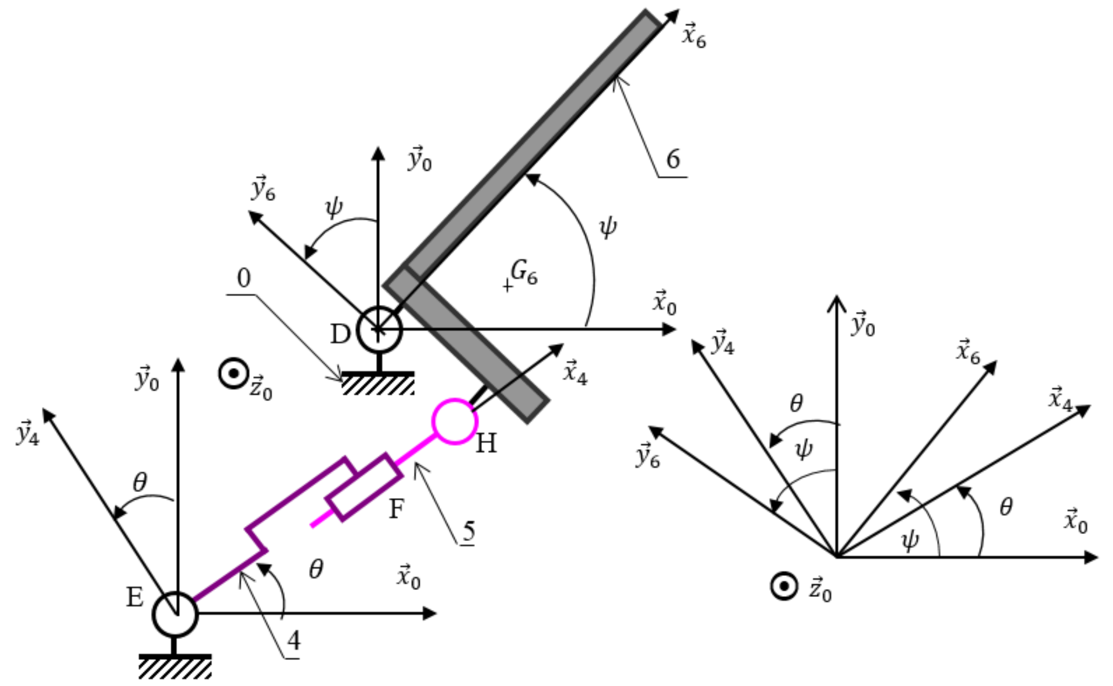
$\bar{6} = \{0, 5, \vec{g}\}$

$\{F(0 \to 6)\} = \begin{Bmatrix} X_{06} & L_{06} \\ Y_{06} & M_{06} \\ Z_{06} & 0 \end{Bmatrix}_{O, R_6}$

$\{F(5 \to 6)\} = \begin{Bmatrix} F_0\vec{x}_4 \\ \vec{DH} \wedge F_0\vec{x}_4 \end{Bmatrix}_D$

$\vec{DH} \wedge F_0\vec{x}_4 = -h\vec{y}_6 \wedge F_0\vec{x}_4 = hF_0\cos(\psi-\theta)\vec{z}_0$

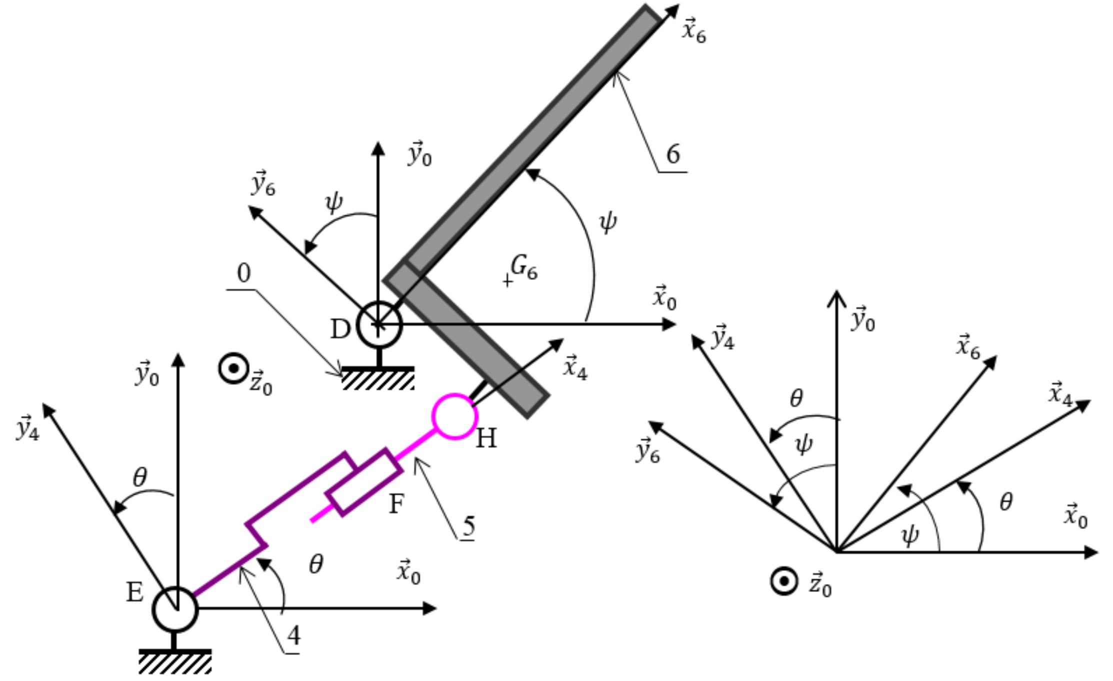
$F_0\vec{x}_4 = F_0\left(\cos(\psi-\theta)\vec{x}_6 - \sin(\psi-\theta)\vec{y}_6\right)$



$\overrightarrow{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0$, $\overrightarrow{HD} = h\vec{y}_6$,
$\overrightarrow{FH} = \mu\vec{x}_4$, $\overrightarrow{EF} = d\vec{x}_4$

5. Exprimer au point D et dans la base du repère R_6 les éléments de réduction du torseur d'actions mécaniques extérieures au plateau 6. On donne $\vec{g} = -g\vec{y}_0$, l'action mécanique de la tige du vérin 5 sur le plateau 6 est donnée par le torseur suivant $\{F(5 \longrightarrow 6)\}_H = \begin{Bmatrix} F_0\vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ et on suppose que toutes les liaisons sont parfaites.

$$\Rightarrow \{F(5\rightarrow 6)\}_D = \begin{Bmatrix} F_0\cos(\psi-\theta) & 0 \\ -F_0\sin(\psi-\theta) & 0 \\ 0 & hF_0\cos(\psi-\theta) \end{Bmatrix}_{R_6}$$



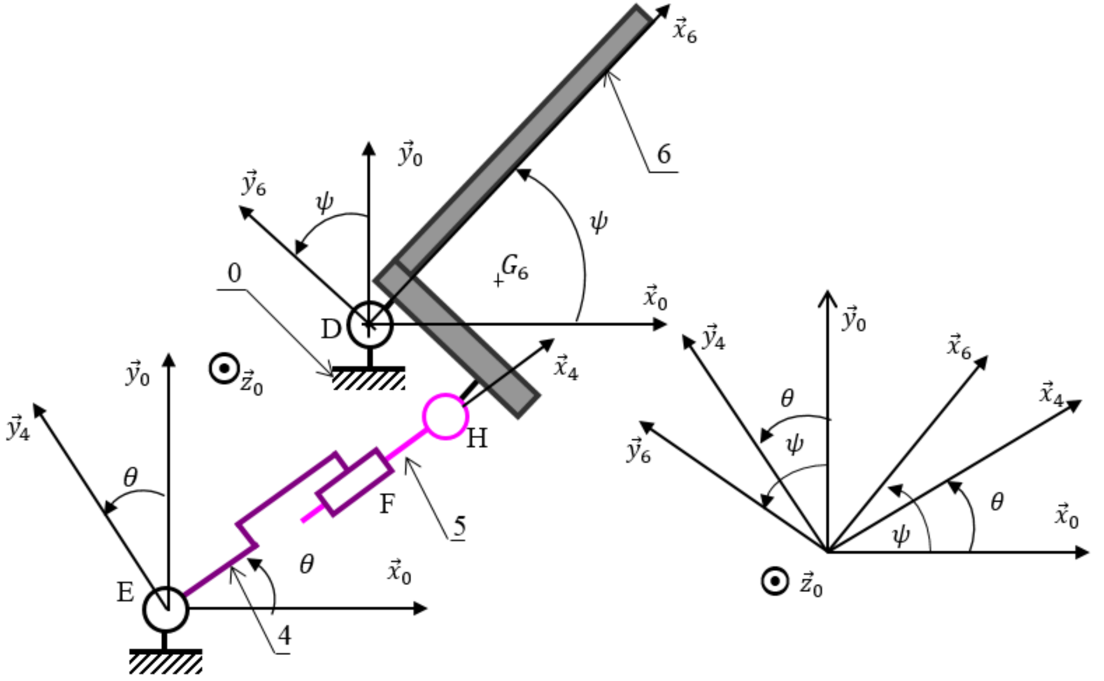
$$\overrightarrow{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0,\ \overrightarrow{HD} = h\vec{y}_6,$$
$$\overrightarrow{FH} = \mu\vec{x}_4,\ \overrightarrow{EF} = d\vec{x}_4$$

5. Exprimer au point D et dans la base du repère R_6 les éléments de réduction du torseur d'actions mécaniques extérieures au plateau 6. On donne $\vec{g} = -g\vec{y}_0$, l'action mécanique de la tige du vérin 5 sur le plateau 6 est donnée par le torseur suivant $\{F(5 \longrightarrow 6)\}_H = \begin{Bmatrix} F_0\vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ et on suppose que toutes les liaisons sont parfaites.

$$\{F(\vec{g} \rightarrow 6)\}_6 = \begin{Bmatrix} -m_6 g \vec{y}_0 = -m_6 g (\sin\psi\, \vec{x}_6 + \cos\psi\, \vec{y}_6) \\ \vec{DG_6} \wedge -m_6 g \vec{y}_0 = (x_6 \vec{x}_6 + y_6 \vec{y}_6) \wedge -m_6 g \vec{y}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{DG_6} \wedge -m_6 g \vec{y}_0 = -m_6 g x_6 \cos\psi\, \vec{z}_0 + m_6 g y_6 \sin\psi\, \vec{z}_0$$

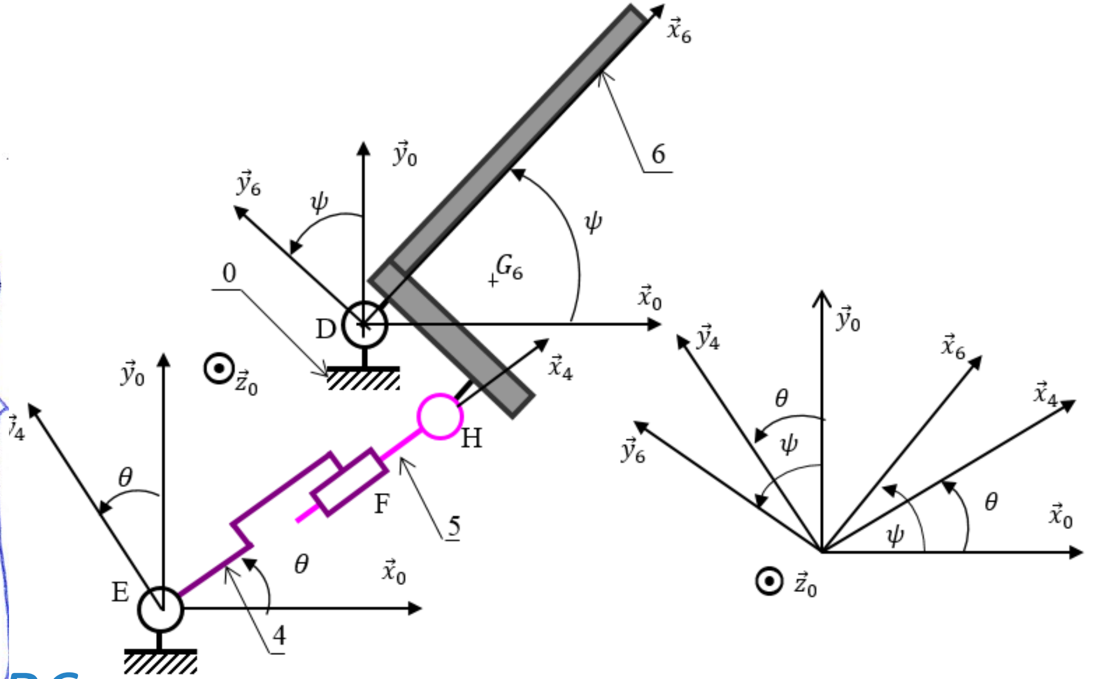
$$= m_6 g (y_6 \sin\psi - x_6 \cos\psi)\, \vec{z}_0$$



$\vec{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0$, $\vec{HD} = h\vec{y}_6$,
$\vec{FH} = \mu\vec{x}_4$, $\vec{EF} = d\vec{x}_4$

6. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur le plateau 6 dans son mouvement par rapport à R_0 supposé galiléen, déterminer les inconnues d'actions mécaniques de la liaison pivot d'axe $(D, \vec{z}_0)$ et exprimer l'effort F_0 qu'exerce la tige de vérin 5 sur le plateau 6 en fonction de $m_6, h, x_G, y_G, g, I, \psi, \ddot{\psi}$ et θ..

$$\{F(\bar{6} \to 6)\} = \left\{ \begin{array}{l|l} X_{06} + F_0 \cos(\psi - \theta) - m_6 g \sin\psi & L_{06} \\ Y_{06} - F_0 \sin(\psi - \theta) - m_6 g \cos\psi & M_{06} \\ Z_{06} & h F_0 \cos(\psi - \theta) + m_6 g (y_G \sin\psi - x_G \cos\psi) \end{array} \right\}_{D,\ R6}$$



$$\overrightarrow{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0, \overrightarrow{HD} = h\vec{y}_6,$$
$$\overrightarrow{FH} = \mu\vec{x}_4, \overrightarrow{EF} = d\vec{x}_4$$

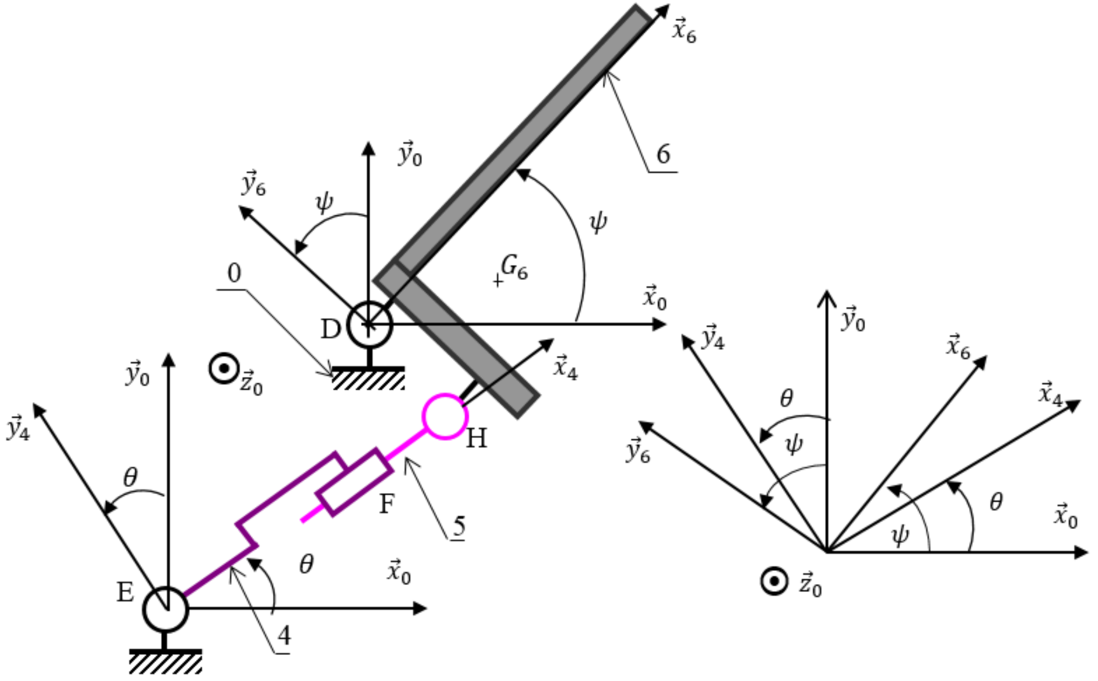
5. Exprimer au point D et dans la base du repère R_6 les éléments de réduction du torseur d'actions mécaniques extérieures au plateau 6. On donne $\vec{g} = -g\vec{y}_0$, l'action mécanique de la tige du vérin 5 sur le plateau 6 est donnée par le torseur suivant $\{F(5 \longrightarrow 6)\}_H = \begin{Bmatrix} F_0\vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ et on suppose que toutes les liaisons sont parfaites.

---

(6)

$$\{F(\bar{6} \to 6)\}_D = \{D(6/R_0)\}_D$$

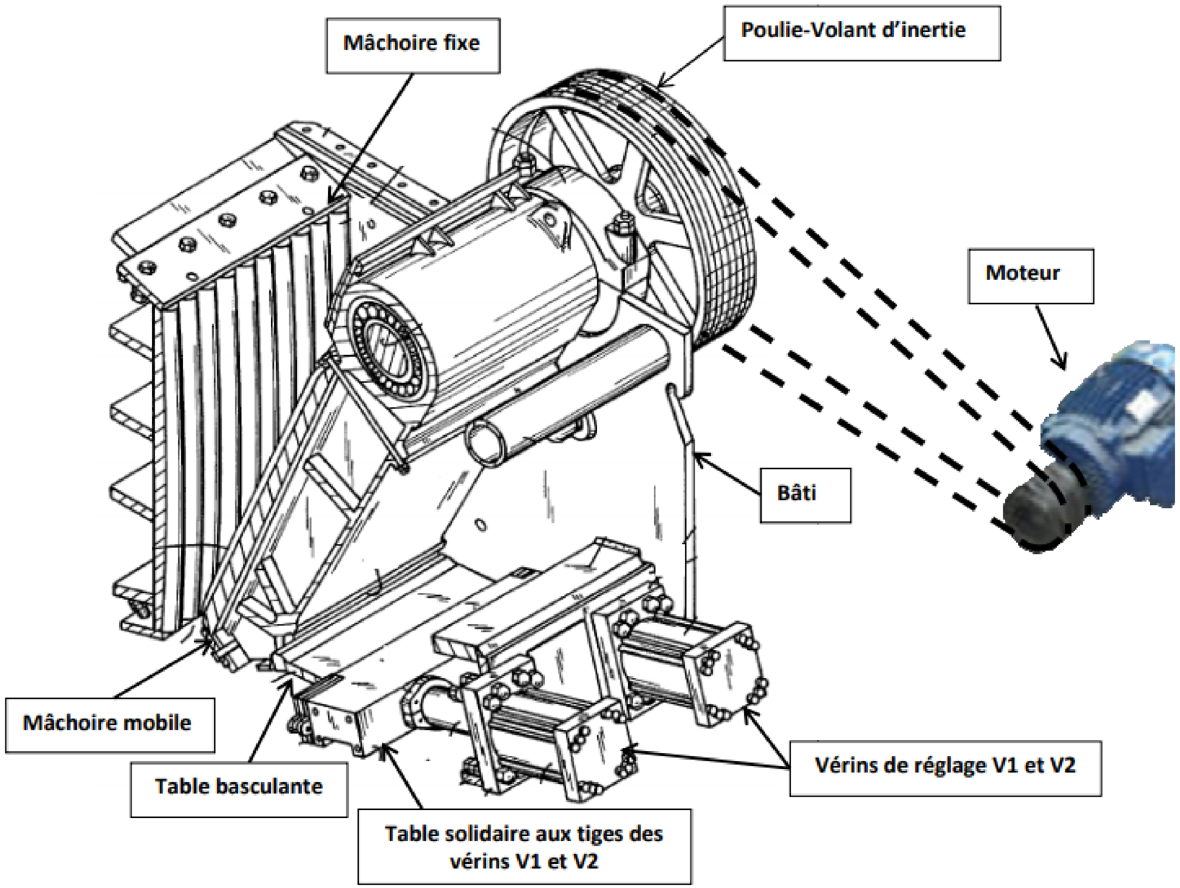
$$\begin{cases} X_{06} = m_6 g \sin\psi - F_0 \cos(\psi - \theta) - m_6(y_6\ddot{\psi} + x_6\dot{\psi}^2) \\ Y_{06} = m_6 g \cos\psi + F_0 \sin(\psi - \theta) + m_6(x_6\ddot{\psi} - y_6\dot{\psi}^2) \\ Z_{06} = 0 \\ L_{06} = 0 \\ M_{06} = 0 \\ F_0 = \dfrac{I\ddot{\psi} - m_6 g(y_6\sin\psi - x_6\cos\psi)}{h\cos(\psi - \theta)} \end{cases}$$

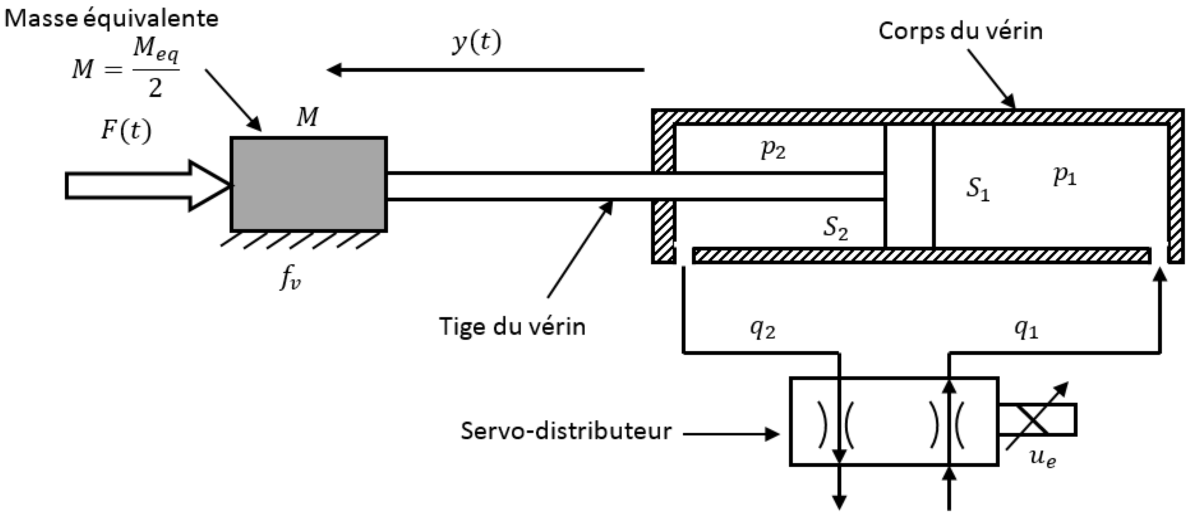


$\overrightarrow{ED} = e\vec{x}_0 + f\vec{y}_0$, $\overrightarrow{HD} = h\vec{y}_6$,
$\overrightarrow{FH} = \mu\vec{x}_4$, $\overrightarrow{EF} = d\vec{x}_4$

Exercice 3: concasseur à machoire

(CNIM 2018 https ://lefiabdellaoui.files.wordpress.com/2018/05/cnim_si_2018_e.pdf)

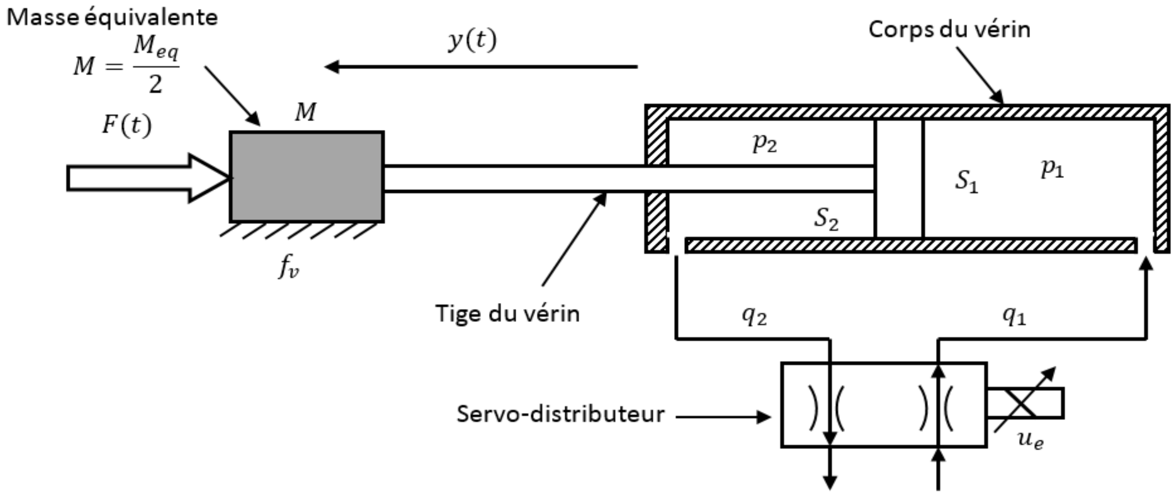


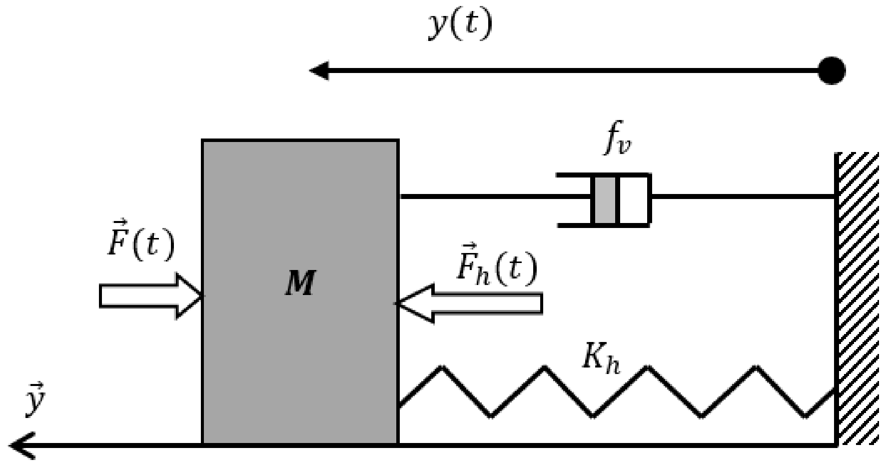


Application 2: concasseur à machoire

(CNIM 2018 https ://lefiabdellaoui.files.wordpress.com/2018/05/cnim_si_2018_e.pdf)

- Le ressort exerce une force de rappel $\vec{T}_h(t) = -K_h y(t)\vec{y}$;
- Le servo-distributeur exerce une force hydraulique $\vec{F}_h(t) = K_h \left(\int_0^t \frac{q_1(\tau)}{S_1} d\tau\right)\vec{y}$;
- La force due aux frottements visqueux est modélisée par $\vec{F}_f = -f_v \frac{dy(t)}{dt}\vec{y}$;
- L'effort engendré par le concassage des roches est donné par $\vec{F}(t) = -F(t)\vec{y}$;





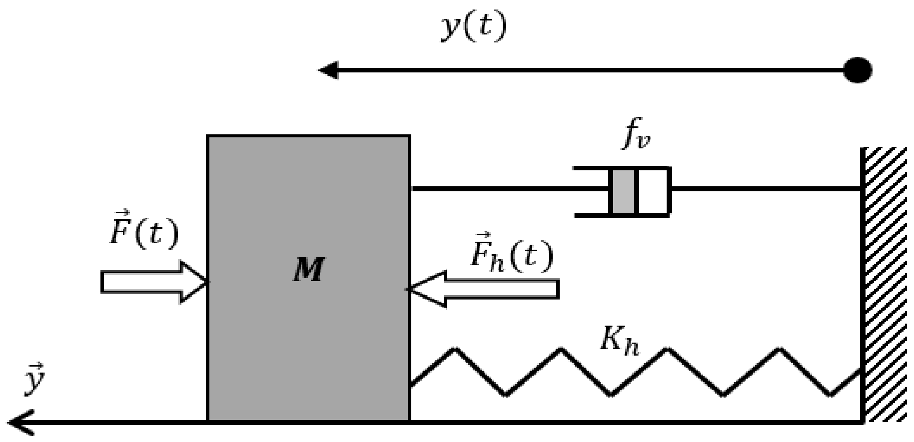
1. En appliquant le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe $\vec{y}$, déterminer l'équation de mouvement de la masse équivalente.

Théorème de la résultante dynamique donne : $\vec{R}(\bar{M} \to M).\vec{y} = M\ddot{y}(t).\vec{y}$

Avec $\vec{R}(\bar{M} \to M) = \left(-K_h y(t) + K_h \int_0^t \frac{q_1(\tau)}{S_1} d\tau - f_v \frac{dy(t)}{dt} - F(t)\right)\vec{y}$

Le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe $\vec{y}$ donne :

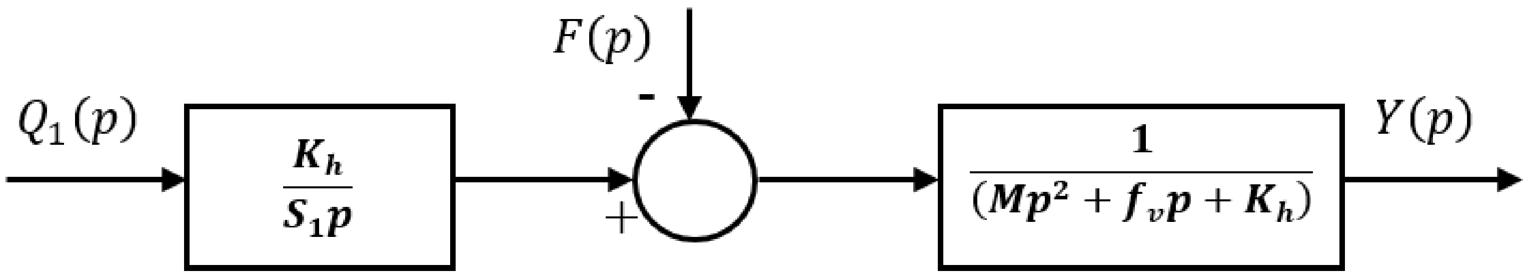
$$\boldsymbol{M\ddot{y}(t) = -K_h y(t) + K_h \int_0^t \frac{q_1(\tau)}{S_1} d\tau - f_v \frac{dy(t)}{dt} - F(t)}$$



Traduire l'équation de mouvement dans le domaine de Laplace sachant que les conditions initiales sont supposées nulles. Compléter le schéma bloc suivant :

$$Y(p)(Mp^2 + f_v p + K_h) = \frac{K_h Q_1(p)}{S_1 p} - F(p)$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{(Mp^2 + f_v p + K_h)}\left(\frac{K_h Q_1(p)}{S_1 p} - F(p)\right)$$

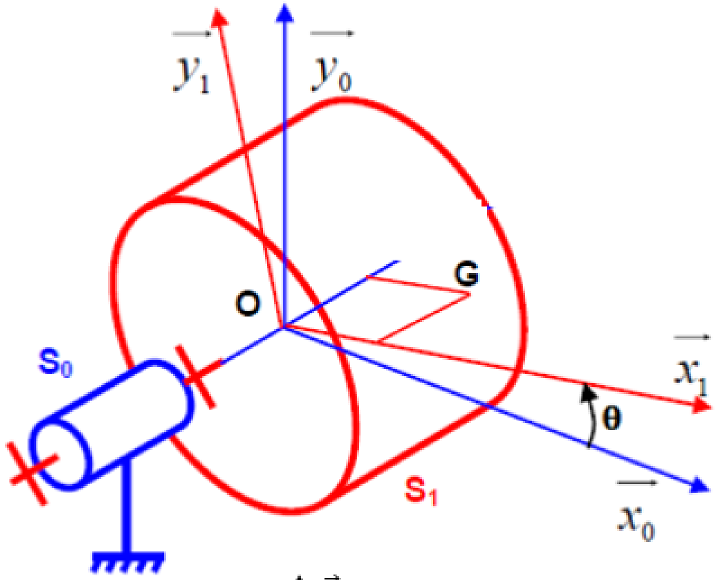


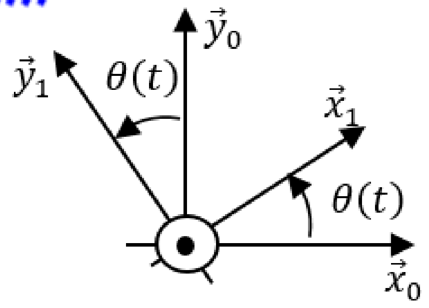
Exercice 4 : Equilibrage d'un solide en rotation

- Le repère $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \overrightarrow{z_0})$ est lié à S_0, supposé galiléen.
- Le repère $R_1(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \overrightarrow{z_0})$ est lié à S_1.
- $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- $\overrightarrow{OG} = a\vec{x}_1 - c\vec{z}_0$
- Le solide S_1 est de masse m
- La matrice d'inertie de S_1 est donnée par la matrice suivante :

$$[I_0(S_1)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_1}$$

- L'accélération de la pesanteur est donnée par : $\vec{g} = -g\vec{y}_0$





1. Déterminer l'accélération $\vec{\Gamma}(G \in S_1/R_0)$

Partie 1 : Equilibrage d'un solide en rotation

1°/

$$\vec{V}(G\in S_1/R_0) = \frac{d\vec{OG}}{dt}\Big]_{R_0} = a\,\frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big]_{R_0}$$

$$= a\left\{\frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{x}_1\right\}$$

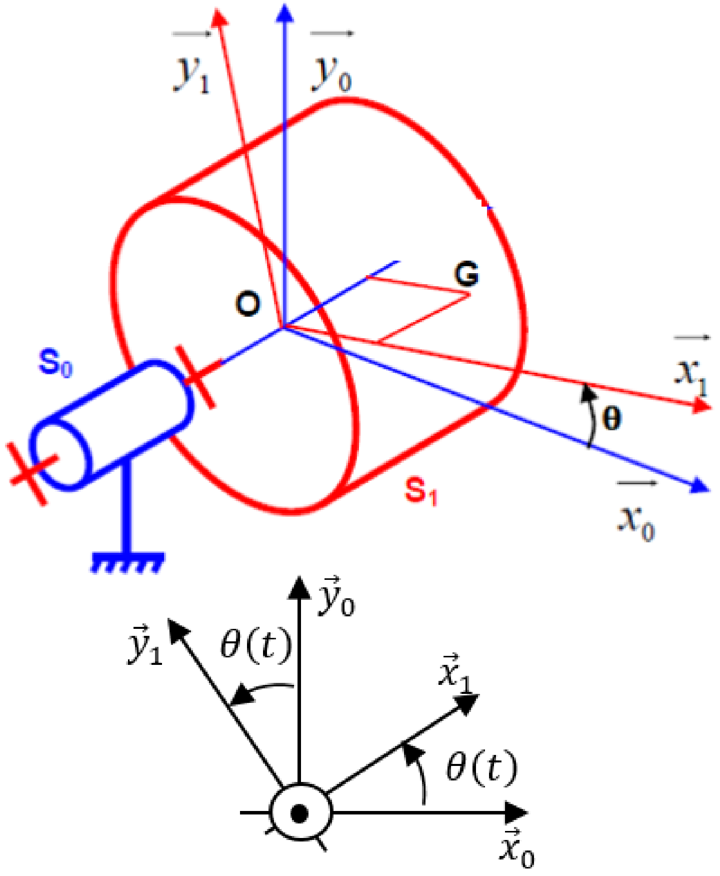
$$= a\,\dot\theta\,\vec{z}_0\wedge\vec{x}_1 = a\dot\theta\,\vec{y}_1$$

$$\vec\Gamma(G\in S_1/R_0) = \frac{d}{dt}\vec V(G\in S_1/R_0)\Big]_{R_0}$$

$$= a\ddot\theta\,\vec y_1 - a\dot\theta^2\,\vec x_1$$

$$= a\ddot\theta\left(-\sin\theta\,\vec x_0+\cos\theta\,\vec y_0\right) - a\dot\theta^2\left(\cos\theta\,\vec x_0+\sin\theta\,\vec y_0\right)$$

$$= \begin{pmatrix} -a(\ddot\theta\sin\theta+\dot\theta^2\cos\theta)\\ a(\ddot\theta\cos\theta-\dot\theta^2\sin\theta)\\ 0\end{pmatrix}_{R_0}$$



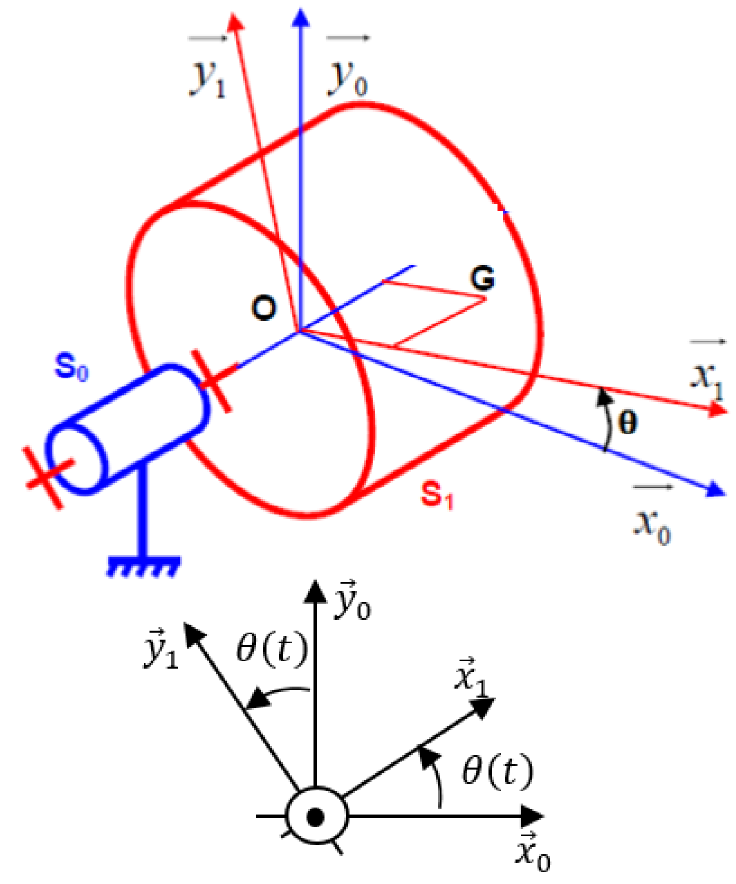
2. Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_O(S_1/R_0)$.

2°/ $\vec{\delta}_O(S_1/R_0) = \dfrac{d}{dt}\vec{\sigma}_O(S_1/R_0)\Big]_{R_0}$

$\vec{\sigma}_O(S_1/R_0) = [I_O(S_1)]\,\vec{\Omega}(S_1/R_0)$

$$\vec{\sigma}_O(S_1/R_0) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$= -E\dot{\theta}\,\vec{x}_1 - D\dot{\theta}\,\vec{y}_1 + C\dot{\theta}\,\vec{z}_0$$



2. Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_O(S_1/R_0)$.

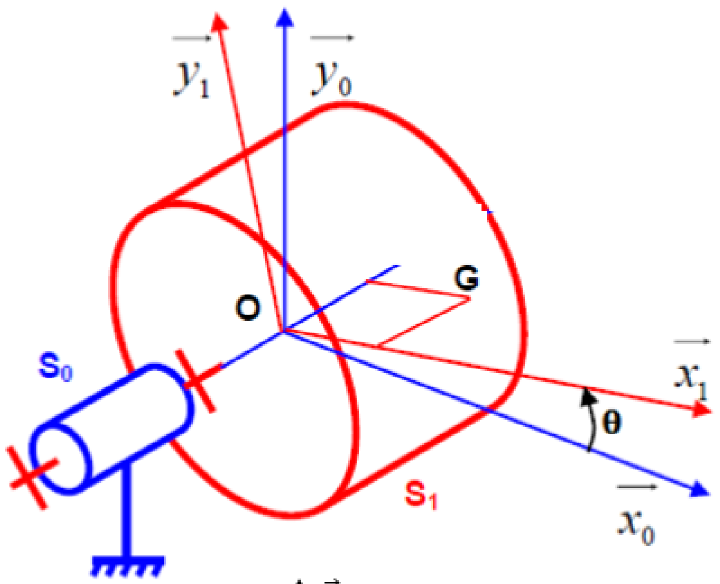
$$\vec{\delta}_0(S_1/R_0) = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}_0(S_1/R_0)\Big|_{R_0}$$

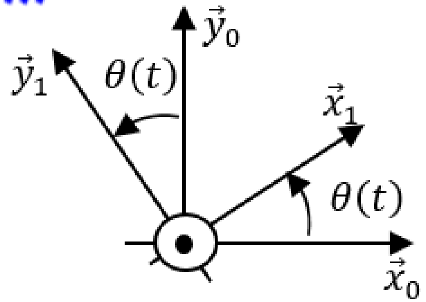
$$= -E\ddot{\theta}\,\vec{x}_1 - E\dot{\theta}\,\frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big|_{R_0} - D\ddot{\theta}\,\vec{y}_1 - D\dot{\theta}\,\frac{d\vec{y}_1}{dt}\Big|_{R_0} + C\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$$

$$\frac{d\vec{x}_1}{dt}\Big|_{R_0} = \dot{\theta}\,\vec{y}_1 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{y}_1}{dt}\Big|_{R_0} = -\dot{\theta}\,\vec{x}_1$$

$$\vec{\delta}_0(S_1/R_0) = +(-E\ddot{\theta} + D\dot{\theta}^2)\,\vec{x}_1 - (E\dot{\theta}^2 + D\ddot{\theta})\,\vec{y}_1 + C\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$$

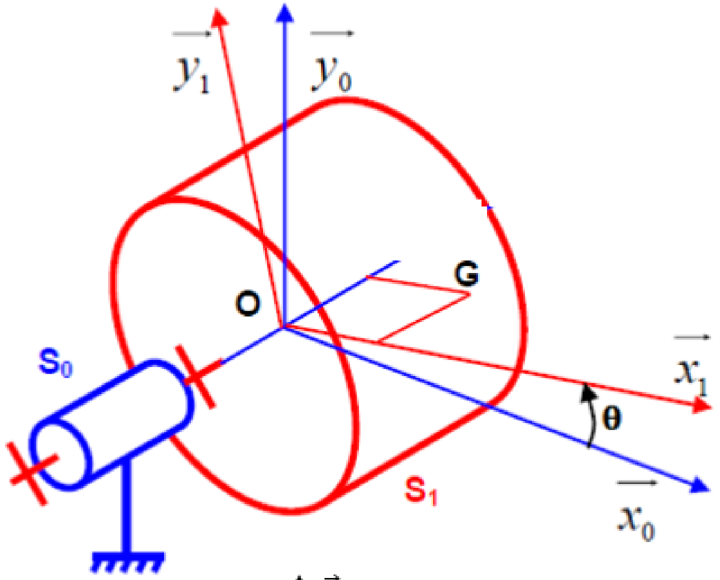
$$= (-E\ddot{\theta} + D\dot{\theta}^2)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}_{R_0} - (E\dot{\theta}^2 + D\ddot{\theta})\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}_{R_0} + C\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$$

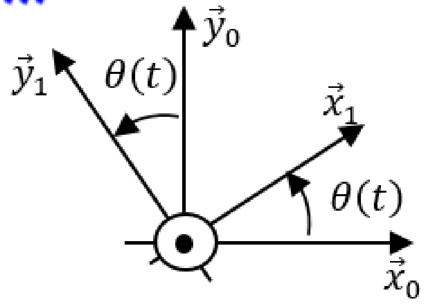




2. Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_O(S_1/R_0)$.

$$\vec{\delta}_0(S_1/R_0) = \begin{pmatrix} (D\dot{\theta}^2 - E\ddot{\theta})\cos\theta + (E\dot{\theta}^2 + D\ddot{\theta})\sin\theta \\ (D\dot{\theta}^2 - E\ddot{\theta})\sin\theta - (E\dot{\theta}^2 + D\ddot{\theta})\cos\theta \\ -C\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{R_0}$$



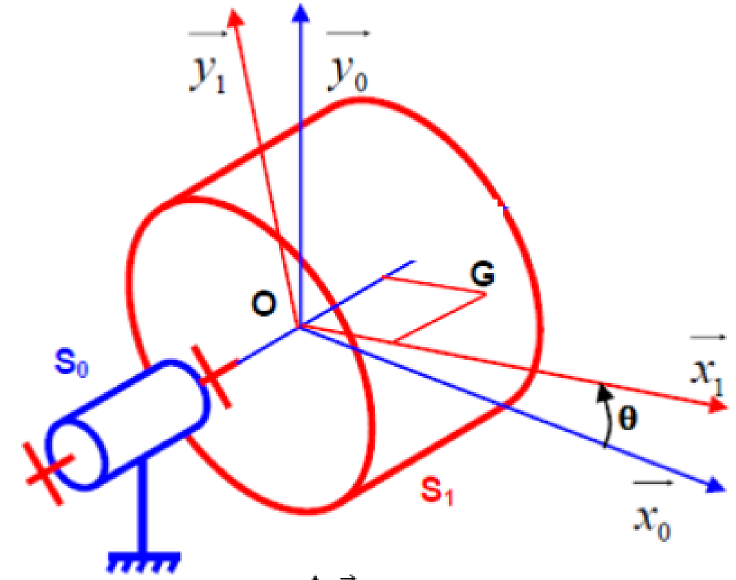


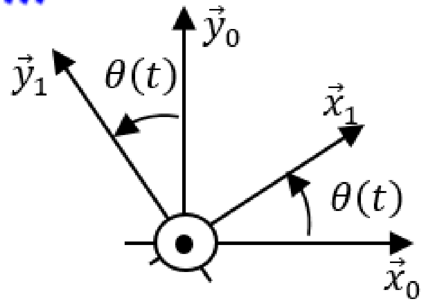
3. Exprimer dans R_0 le torseur dynamique $\{D(S_1/R_0)\}_O$

3°/

$$\{D(S_1/R_0)\}_O = \left\{ \begin{matrix} m\vec{\Gamma}(G\in S_1/R_0) \\ \vec{\delta}_O(S_1/R_0) \end{matrix} \right\}_O$$

$$= \left\{ \begin{matrix} -ma(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta) & \Big| & (D\dot{\theta}^2-E\ddot{\theta})\cos\theta+(E\dot{\theta}^2+D\ddot{\theta})\sin\theta \\ ma(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta) & \Big| & (D\dot{\theta}^2-E\ddot{\theta})\sin\theta-(E\dot{\theta}^2+D\ddot{\theta})\cos\theta \\ 0 & \Big| & +C\ddot{\theta} \end{matrix} \right\}_{O,R_0}$$



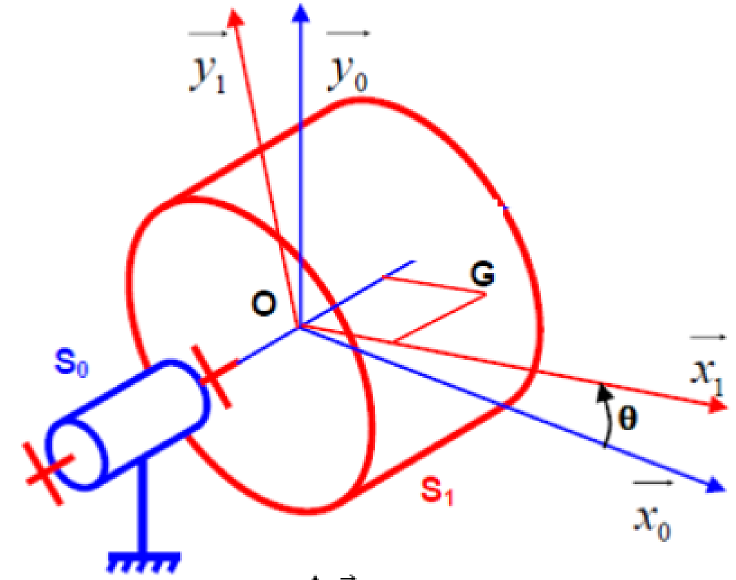


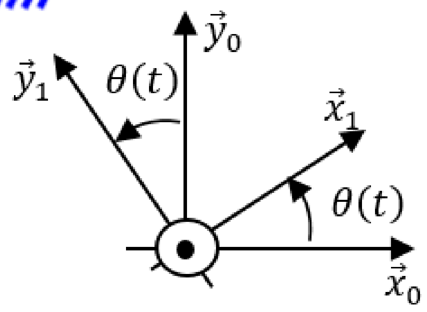
ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

4. Isoler S_1 et Exprimer dans R_0 le torseur des efforts extérieurs appliqués sur S_1 au point O.

4°/ $\bar{S}_1 = \{ S_0, \vec{g}, \text{moteur} \}$

$$\{F(S_0 \to S_1)\} = {}_{O}\left\{ \begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{matrix} \right\}_{R_0}$$





4. Isoler S_1 et Exprimer dans R_0 le torseur des efforts extérieurs appliqués sur S_1 au point O.

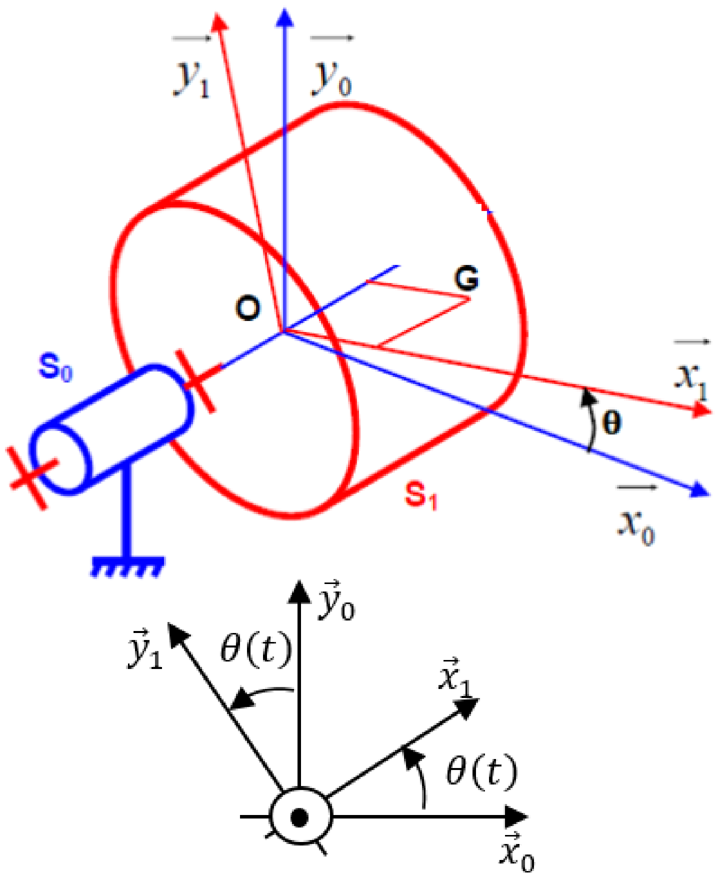
$$\{F(\vec{g} \to S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} m\vec{g} = -mg\,\vec{y}_0 \\ \vec{OG} \wedge -mg\,\vec{y}_0 \end{array} \right\}_O$$

$$\vec{OG} \wedge -mg\,\vec{y}_0 = (a\vec{x}_1 - c\vec{z}_0) \wedge -mg\,\vec{y}_0$$

$$= -mag\,\vec{x}_1 \wedge \vec{y}_0 + mcg\,\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_0$$

$$= -mag\cos\theta\,\vec{z}_0 - mcg\,\vec{x}_0$$

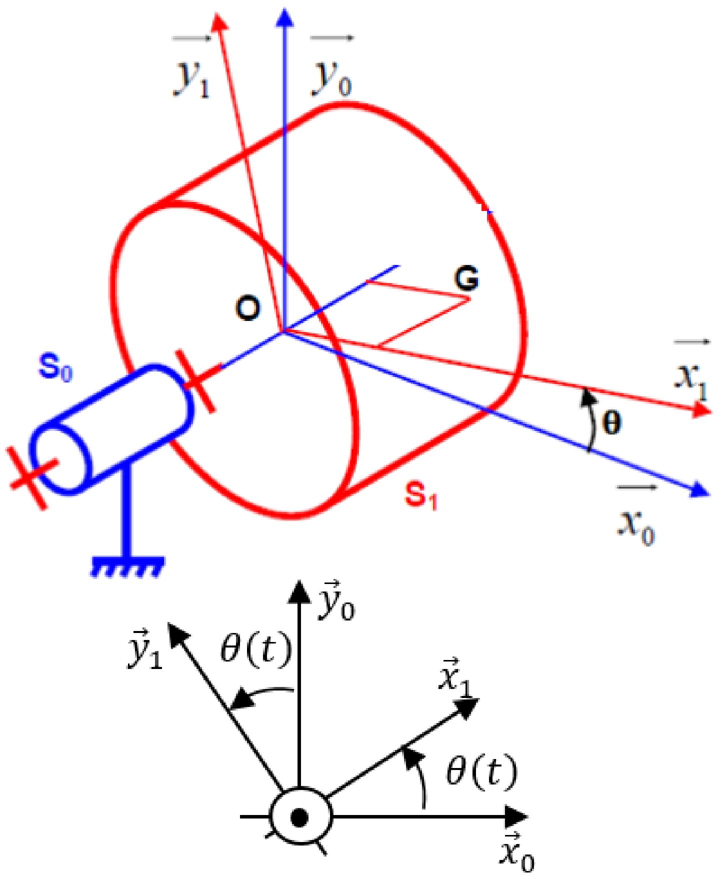
$$\Rightarrow \{F(\vec{g} \to S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & -mcg \\ -mg & 0 \\ 0 & -mag\cos\theta \end{array} \right\}_{O,\,R_0}$$



4. Isoler S_1 et Exprimer dans R_0 le torseur des efforts extérieurs appliqués sur S_1 au point O.

$$\{F(moteur \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_m \end{array} \right\}_{R_0}^{O}$$

$$\Rightarrow \{F(\bar{S}_1 \rightarrow S_1)\} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01} & L_{01} - mcg \\ Y_{01} - mg & M_{01} \\ Z_{01} & C_m - mag\cos\theta \end{array} \right\}_{R_0}^{O}$$

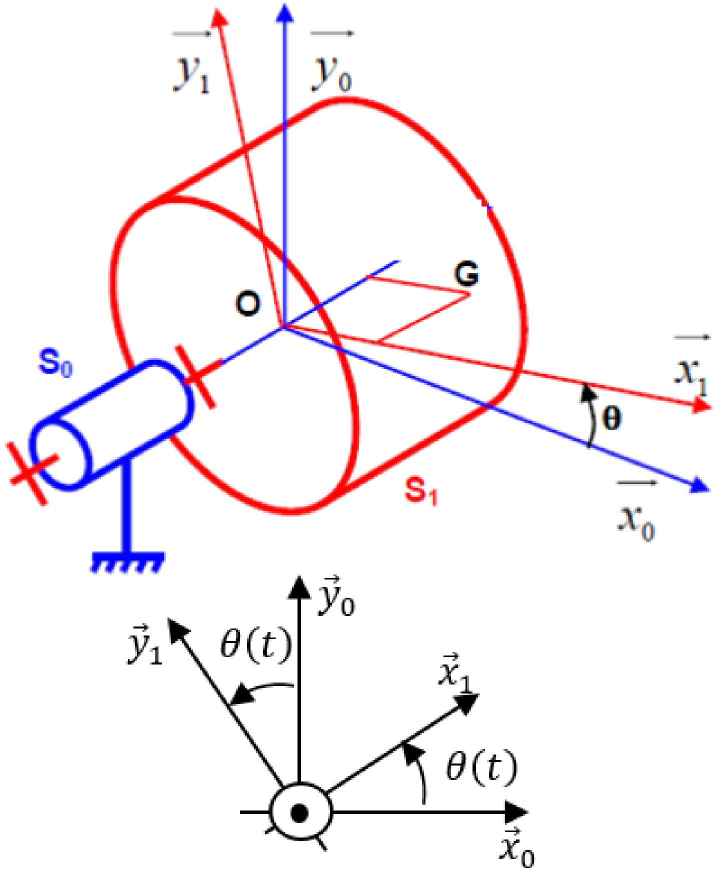


5. Déterminer les 6 équations scalaires qui découlent du PFD appliqué à S_1.
6. En déduire les 5 composantes du torseur statique de la liaison pivot entre S_1 et S_0.

5°/et 6°/

PFD $\Rightarrow \{F(\bar{S}_1 \to S_1)\} = \{D(S_1/R_0)\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{01} = -ma(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) & (1) \\ Y_{01} = ma(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) & (2) \\ Z_{01} = 0 & (3) \\ L_{01} = mcg + (D\dot{\theta}^2 - E\ddot{\theta})\cos\theta + (E\dot{\theta}^2 + D\ddot{\theta})\sin\theta & (4) \\ M_{01} = (D\dot{\theta}^2 - E\ddot{\theta})\sin\theta - (E\dot{\theta}^2 + D\ddot{\theta})\cos\theta & (5) \\ C_m = C\ddot{\theta} + mag\cos\theta & (6) \end{cases}$$

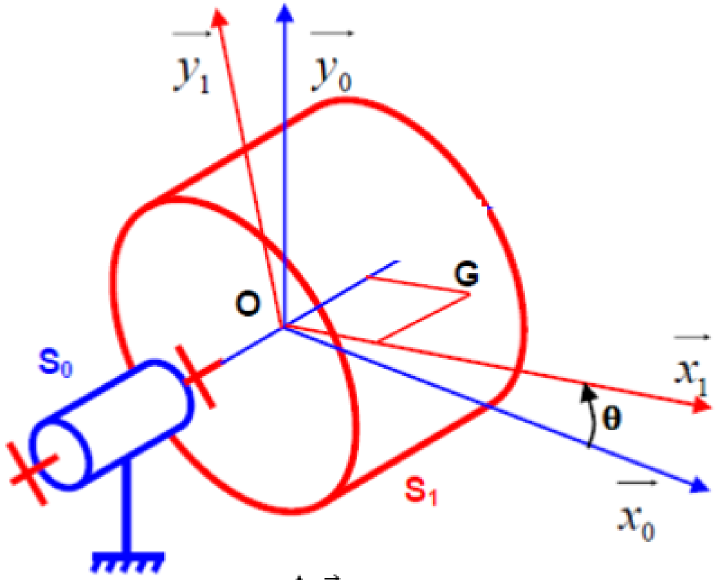


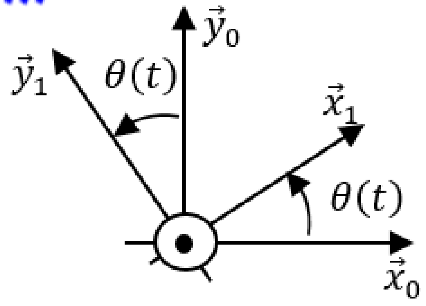
7. Pour qu'il y ait équilibrage, il faut que ces 5 composantes soient constantes. En déduire les valeurs de $a, E\ et\ D$

7°/ Pour qu'il y'ait équilibrage, il faut que ces 5 composantes soient constantes

- X_{01} et Y_{01} sont ctes. $\Rightarrow$ $\boxed{a = 0}$

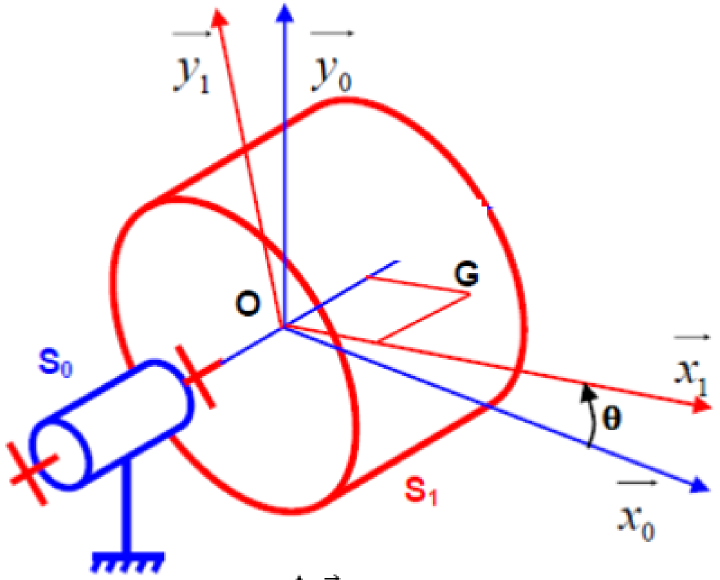
$\Rightarrow$ Ramener le centre d'inertie sur l'axe de rotation. $\Rightarrow$ Equilibrage statique

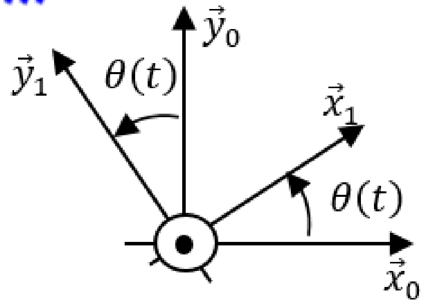




7. Pour qu'il y ait équilibrage, il faut que ces 5 composantes soient constantes. En déduire les valeurs de $a, E\ et\ D$

• L_{O_1} et M_{O_1} sont ctes si $E = D = 0$ $\Rightarrow$ Rendre l'axe ~~(O, z)~~ de rotation $(O, \vec{z})$ un axe principal d'inertie $\Rightarrow$ Equilibrage dynamique.





Partie2 : équilibrage d’une roue

Partie2 : équilibrage d'une roue

- Le solide S_3 est de masse m_3 et de centre d'inertie G_3 avec $\overrightarrow{O_3G_3} = a\vec{x}_3 + b\vec{y}_3 + c\vec{z}_3$.
- La matrice d'inertie de S_3 est donnée par :

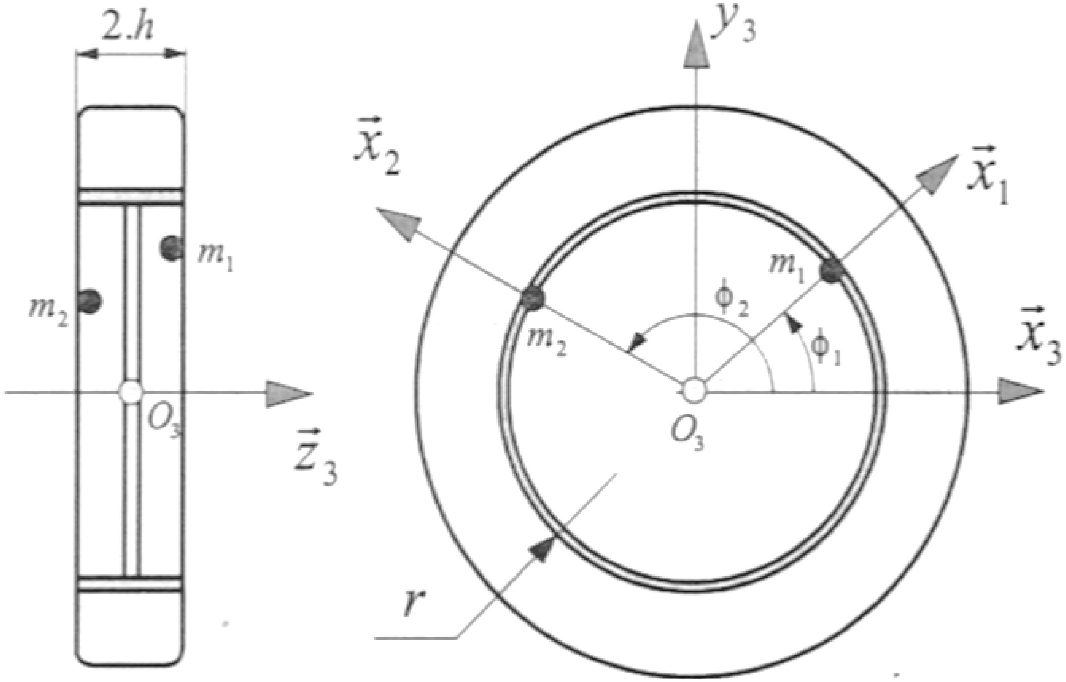
$$\left[I_{0_3}(S_3)\right] = \begin{bmatrix} A_3 & -F_3 & -E_3 \\ -F_3 & B_3 & -D_3 \\ -E_3 & -D_3 & C_3 \end{bmatrix}_{R_3}$$

ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

Partie2 : équilibrage d'une roue

Afin d'équilibrer la roue, on rajoute deux masselottes (masses ponctuelles), S_1 de masse m_1 et de centre G_1 et S_2 de masse m_2 et de centre G_2. Ces deux masselottes sont fixées sur la jante, à un rayon r, de part et d'autre de la roue, à une distance h du plan de symétrie de la roue.

La position des deux masselottes est identifiée par deux repères $\mathrm{R}_1(O_3, \vec{\mathrm{x}}_1, \vec{\mathrm{y}}_1, \overrightarrow{\mathrm{z}_3})$ et $\mathrm{R}_2(O_3, \vec{\mathrm{x}}_2, \vec{\mathrm{y}}_2, \overrightarrow{\mathrm{z}_3})$, repérés par les angles ϕ_1 et ϕ_2 tels que $\phi_1 = (\vec{x}_3, \vec{x}_1)$ et $\phi_2 = (\vec{x}_3, \vec{x}_2)$. ϕ_1 et ϕ_2 sont des constantes.

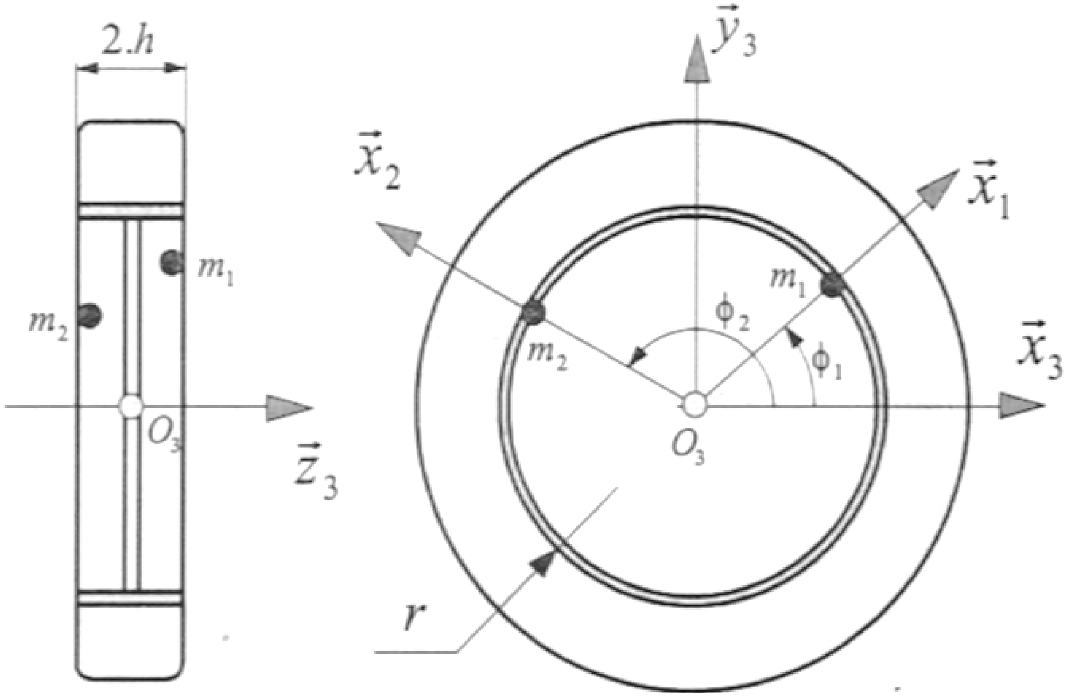


ENSEIGNANT: LEFI ABDELLAOUI, EMAIL: LEFIABDELLAOUI@YAHOO.FR, BLOG: HTTP://LEFIABDELLAOUI.WORDPRESS.COM

Partie2 : équilibrage d'une roue

On appellera S le système composé par les trois solides S_1, S_2 et S_3, de centre d'inertie G et de matrice d'inertie donnée par :

$$\left[I_{O_3}(S)\right] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{R_3}$$

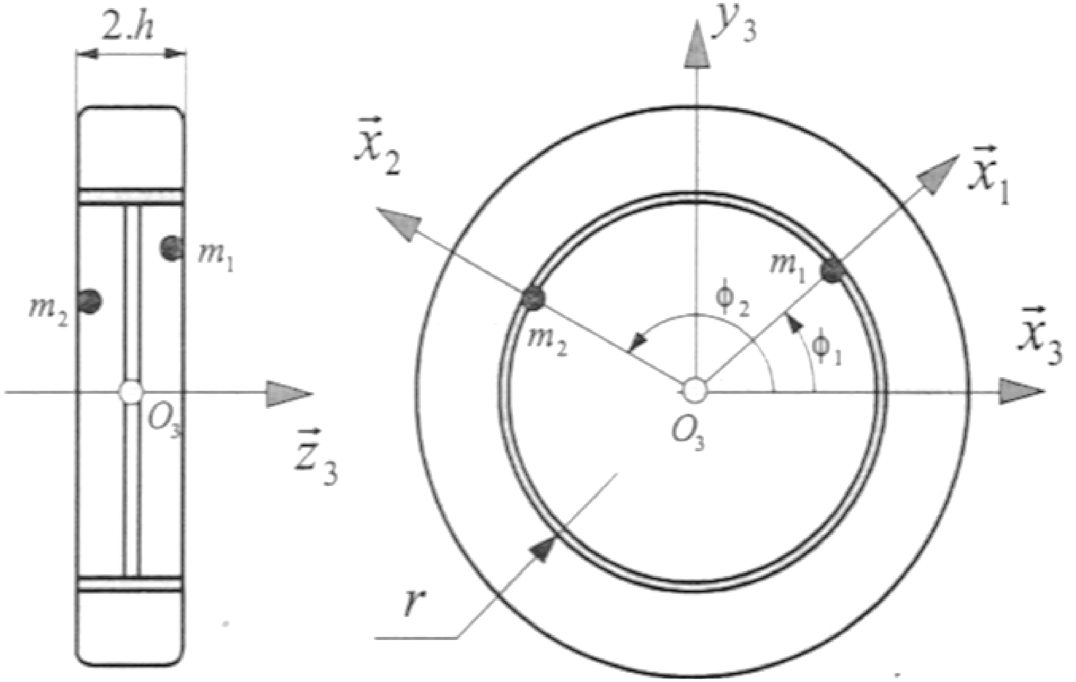


1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{O_3G}$ dans le repère R_3.

1° $\overrightarrow{O_3G} = \dfrac{1}{m_1+m_2+m_3}\left(m_1\overrightarrow{O_3G_1}+m_2\overrightarrow{O_3G_2}+m_3\overrightarrow{O_3G_3}\right)$

$$= \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\left(m_1 \begin{pmatrix} r\cos\phi_1 \\ r\sin\phi_1 \\ h \end{pmatrix}_{R_3} + m_2 \begin{pmatrix} r\cos\phi_2 \\ r\sin\phi_2 \\ -h \end{pmatrix}_{R_3} + m_3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{R_3} \right)$$

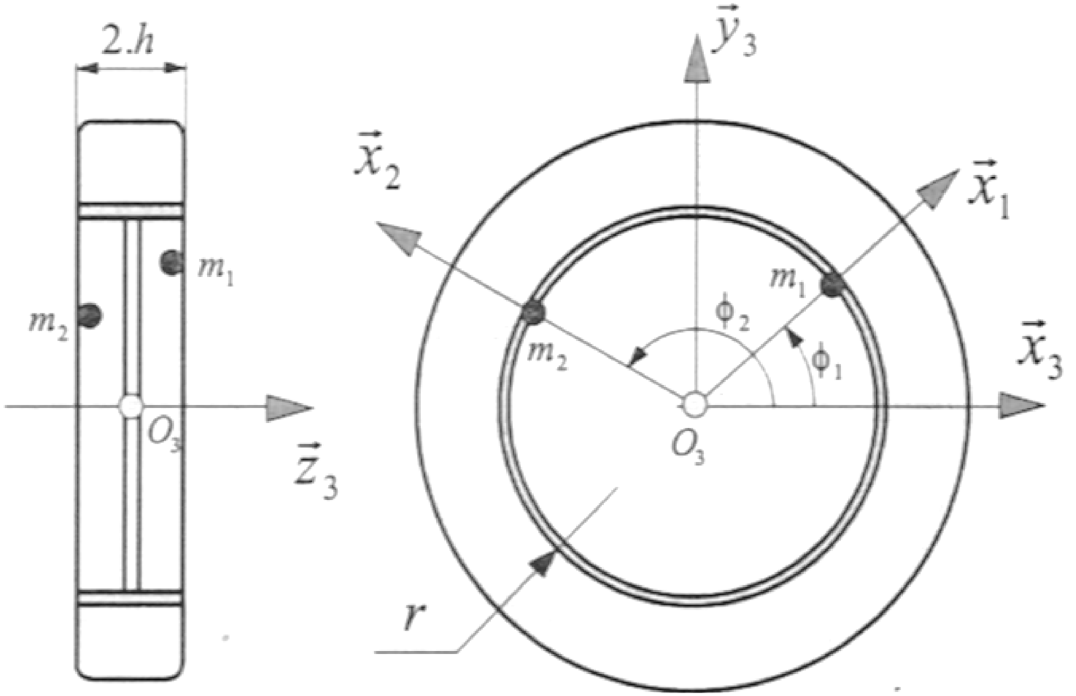
$$= \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\begin{pmatrix} m_1 r\cos\phi_1 + m_2 r\cos\phi_2 + m_3 a \\ m_1 r\sin\phi_1 + m_2 r\sin\phi_2 + m_3 b \\ m_1 h - m_2 h + m_3 c \end{pmatrix}_{R_3}$$



2. Déterminer les deux équations scalaires traduisant la condition d'équilibrage statique dans le repère R_3.

2° - Equilibrage statique ⇒ Ramener le centre d'inertie G_3 sur l'axe de rotation

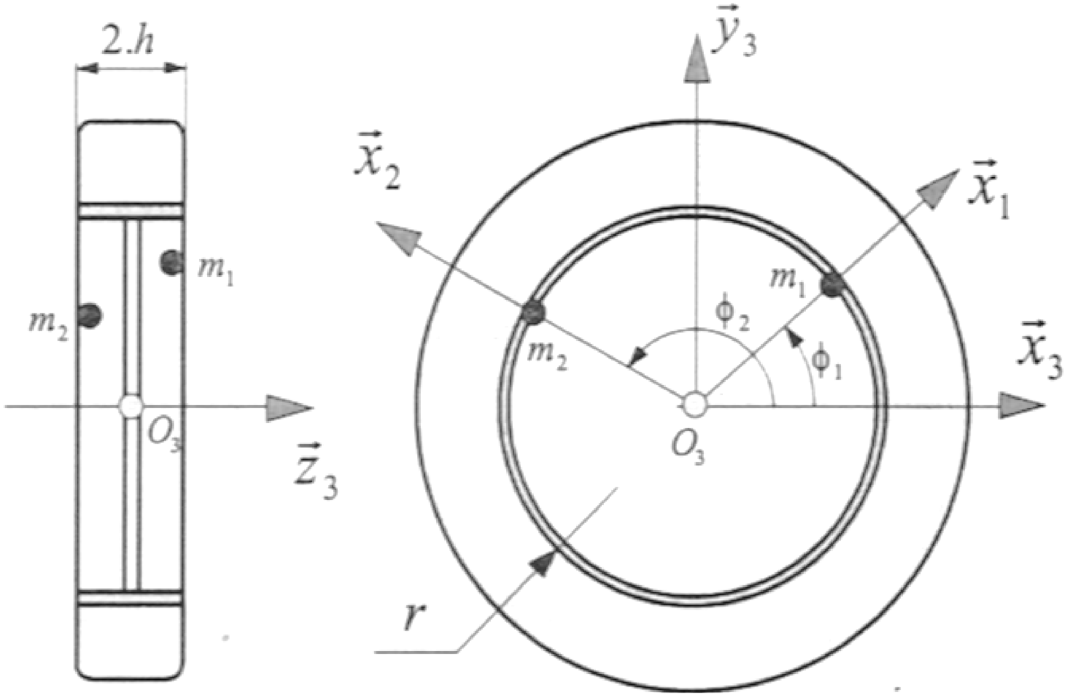
$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 r\cos\phi_1 + m_2 r\cos\phi_2 + m_3 a = 0 & (1) \\ m_1 r\sin\phi_1 + m_2 r\sin\phi_2 + m_3 b = 0 & (2) \end{cases}$$



3. Exprimer D et E en fonction des données géométriques du problème et des composantes de $\left[I_{O_3}(S_3)\right]$.

3°- $D = D_3 + m_1 r h \sin\phi_1$ [redacted] $m_2 h r \sin\phi_2$

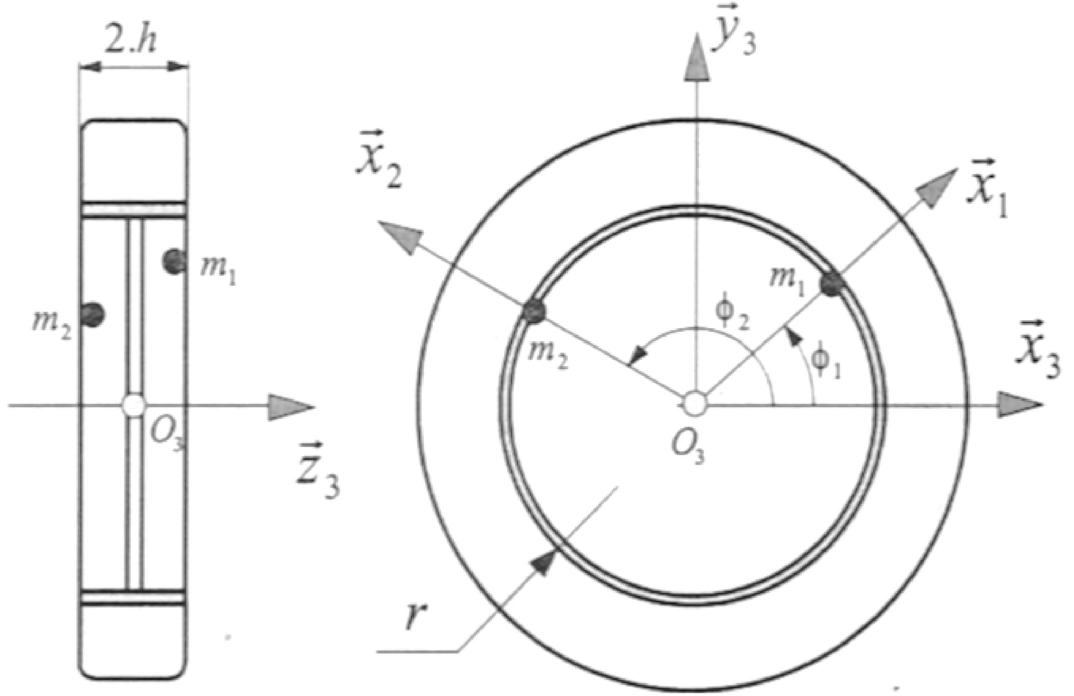
$E = E_3 + m_1 r h \cos\phi_1 - m_2 h r \cos\phi_2$



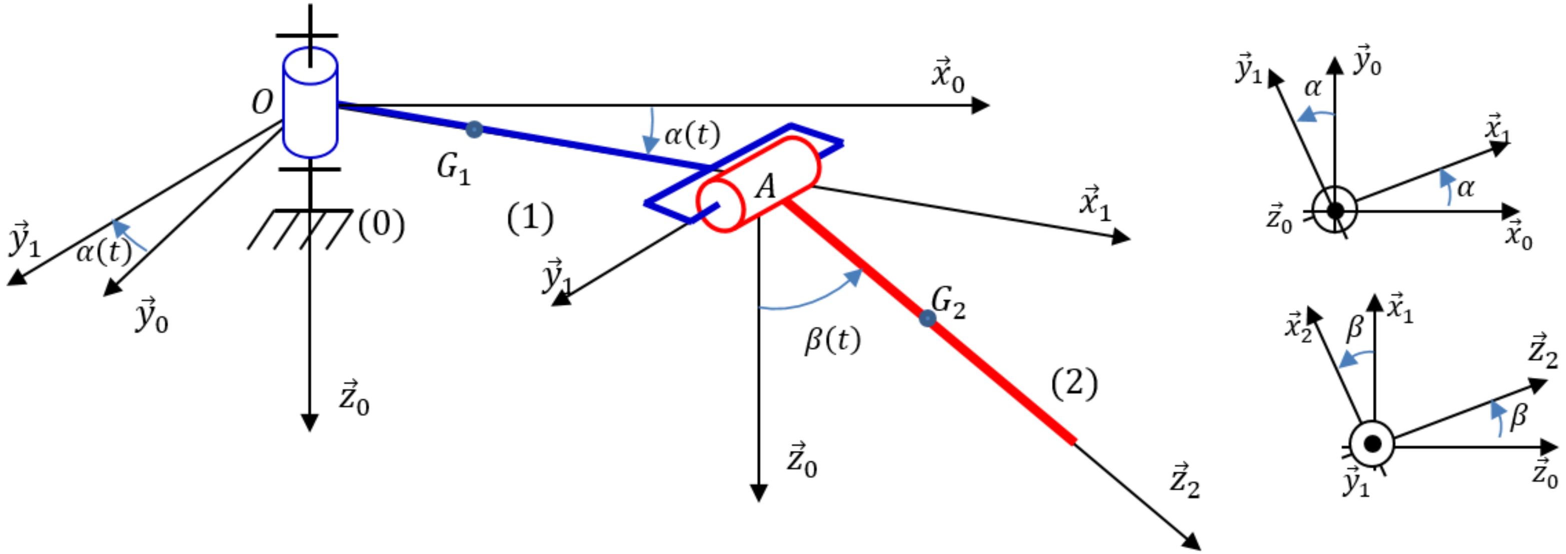
3. Exprimer D et E en fonction des données géométriques du problème et des composantes de $\left[I_{O_3}(S_3)\right]$.

4°- Equilibrage dynamique ⇒ Rendre l'axe de rotation un axe principal d'inertie ⇒ $D = E = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_3 + m_1 r h \sin\phi_1 - m_2 h r \sin\phi_2 = 0 & (3) \\ E_3 + m_1 r h \cos\phi_1 - m_2 h r \cos\phi_2 = 0 & (4) \end{cases}$$



Exercice 5 : Centrifugeuse



- <u>Bras 1</u> : De centre d'inertie G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = e\vec{x}_1$, de moment d'inertie par rapport à $(O, \vec{z}_0)$, supposé moment principal d'inertie, est noté par I et $\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$ et de masse m_1
- <u>Cabine 2</u> : De centre d'inertie G_2 tel que $\overrightarrow{AG_2} = b\vec{z}_2$, de masse m_2 et de matrice d'inertie :

$$[I_A(2)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_1, \vec{z}_2)}$$

Cinématique :

Déterminer le torseur cinématique de la cabine 2 au point A dans son mouvement par rapport au bâti ;

A. Cinématique :

1°- $\{\mathcal{V}(2/R_0)\} = {}_A\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(2/R_0) \\ \vec{V}(A\in 2/R_0) \end{array} \right\}$

• $\vec{\Omega}(2/R_0) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/0)$

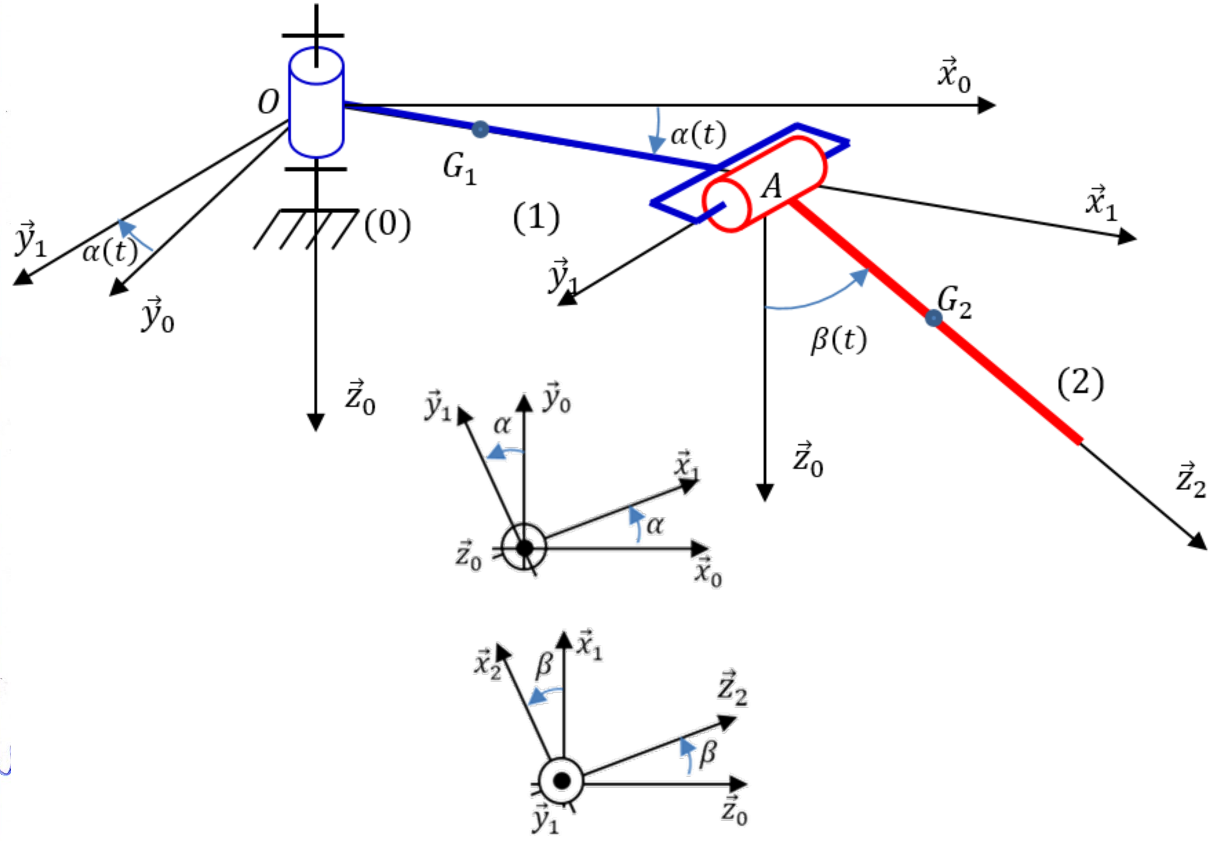
$= \dot{\beta}(t)\,\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0$

• $\vec{V}(A\in 2/R_0) = \cancel{\vec{V}(A\in 2/1)} + \vec{V}(A\in 1/R_0)$

$= \cancel{\vec{V}(O\in 1/R_0)} + \vec{\Omega}(1/R_0)\wedge\vec{OA}$

$= \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \wedge a\,\vec{x}_1 = a\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 = a\omega\,\vec{y}_1$

$\Rightarrow \{\mathcal{V}(2/R)\} = {}_A\left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta}(t)\,\vec{y}_1 + \dot{\alpha}(t)\,\vec{z}_0 \\ a\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 \end{array} \right\}$; $\dot{\alpha} = \omega$



Cinématique :

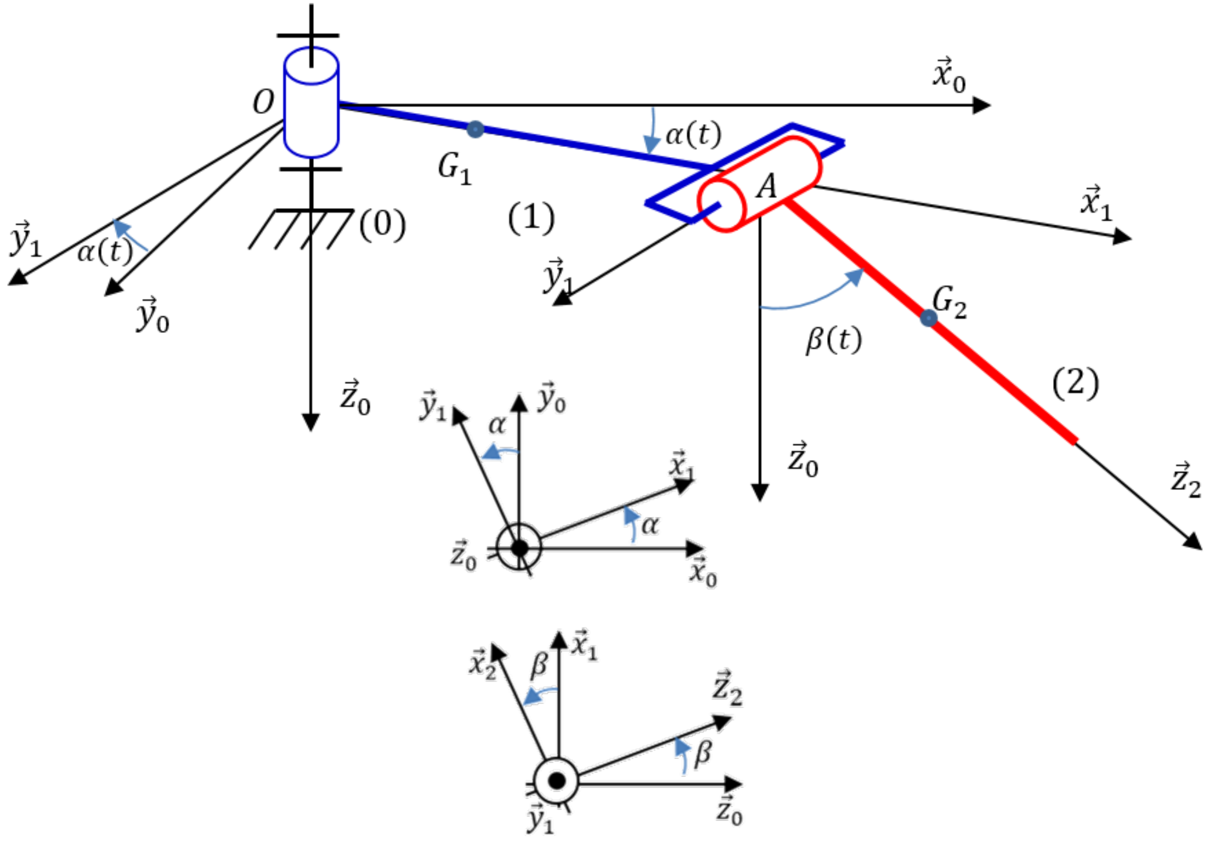
Déterminer la vitesse du point G_2, centre d'inertie de la cabine 2, par rapport au repère lié au bâti.

2° – $\vec{V}(G_2 \in 2/R_0) = \vec{V}(A \in 2/R_0) + \vec{\Omega}(2/R_0) \wedge \vec{AG_2}$

$= a\dot{\alpha}\vec{y}_1 + (\dot{\beta}\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\vec{z}_0) \wedge b\vec{z}_2$

$= a\dot{\alpha}\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{x}_2 + b\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_1$

$\cancel{a\omega\vec{y}_1} = \omega(a + b\sin\beta)\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{x}_2$



Cinématique :

Déterminer l'accélération du point G_2, centre d'inertie de la cabine 2, par rapport au repère lié au bâti.

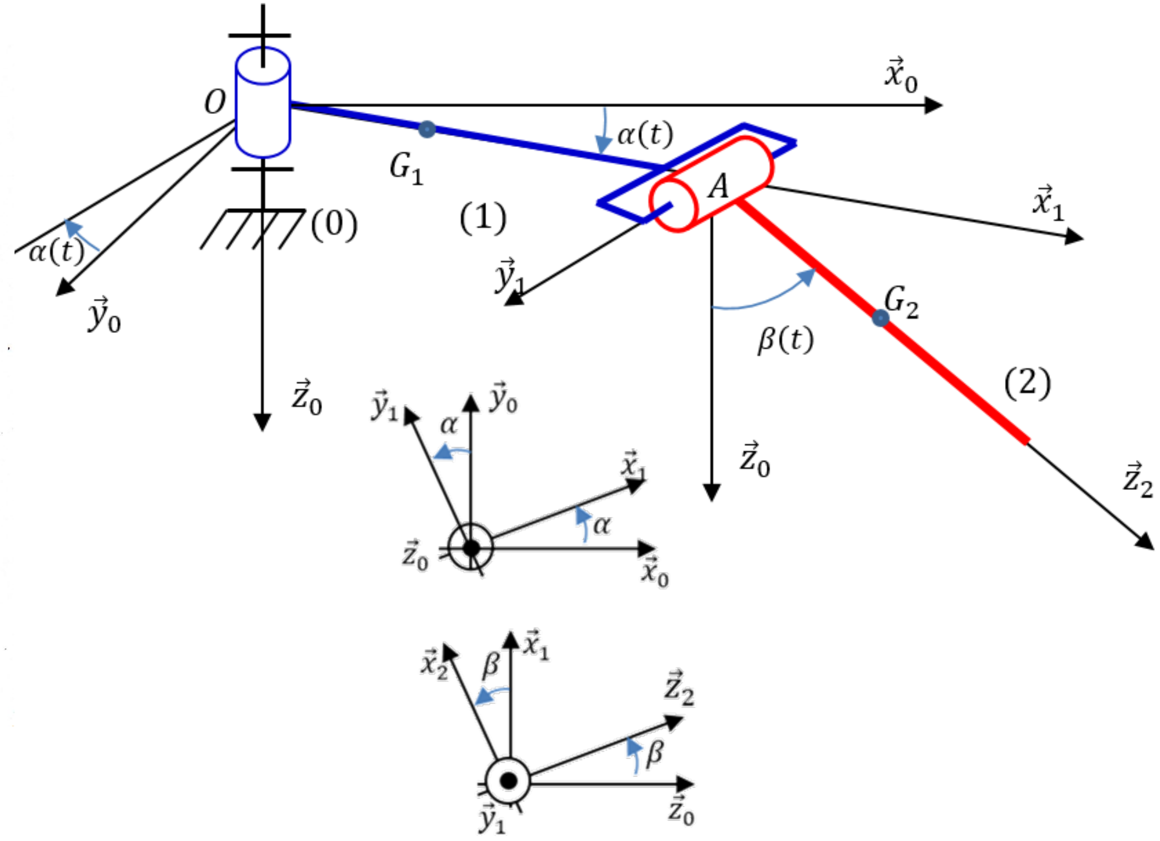
3°/ $\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/R_0) = \dfrac{d\vec{V}(G_2 \in 2/R_0)}{dt}\Big]_{R_0}$

$= b\omega\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{y}_1 + \omega(a + b\sin\beta)\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\Big]_{R_0}$

$+ b\ddot{\beta}\,\vec{x}_2 + b\dot{\beta}\dfrac{d\vec{x}_2}{dt}\Big]_{R_0}$

• $\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\Big]_{R_0} = \cancel{\dfrac{d\vec{y}_1}{dt}\Big]_{R_1}}^{\vec{0}} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{y}_1$

$= \omega\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1 = -\omega\vec{x}_1$



Cinématique :

Déterminer l'accélération du point G_2, centre d'inertie de la cabine 2, par rapport au repère lié au bâti.

$$= \omega \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1 = -\omega \vec{x}_1$$

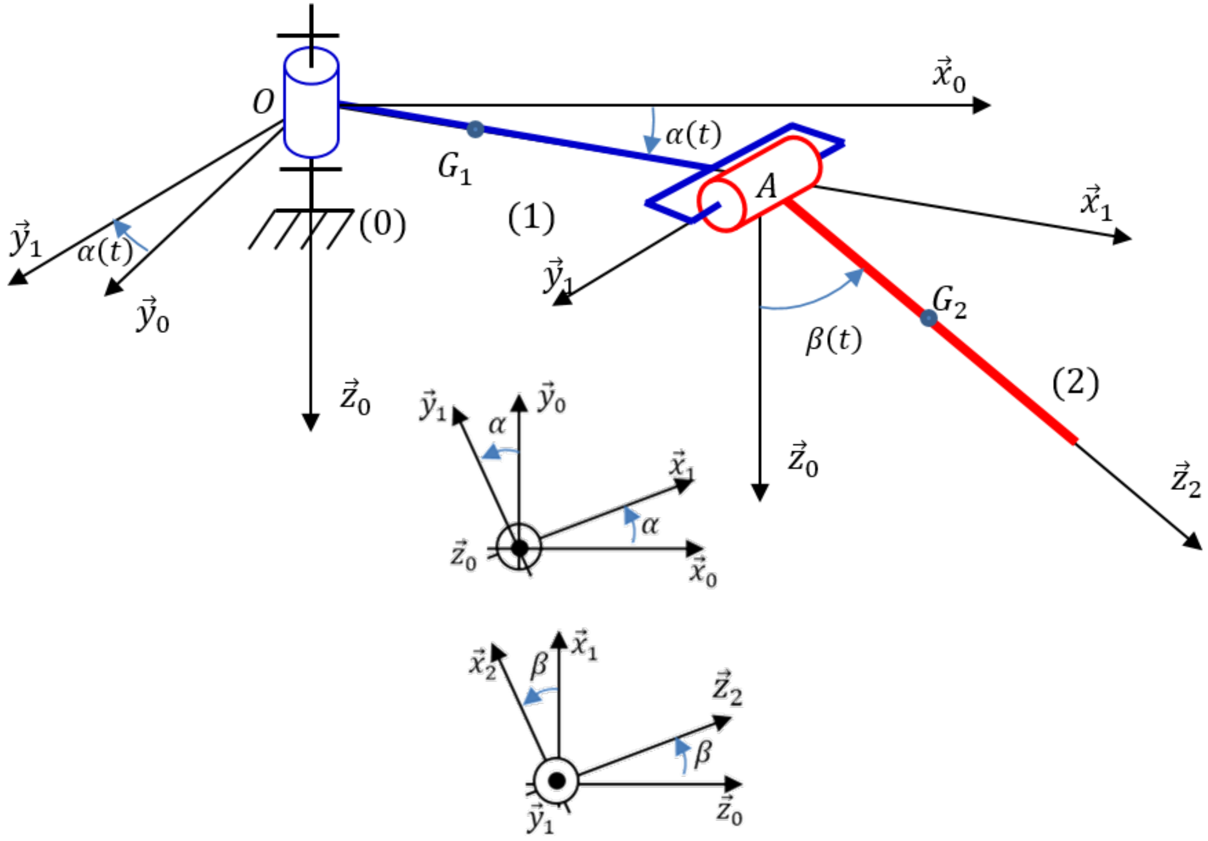
- $$\left.\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}(2/R_0) \wedge \vec{x}_2$$

$$= (\omega \vec{z}_0 + \dot{\beta}\vec{y}_1) \wedge \vec{x}_2$$

$$= \omega \cos\beta \, \vec{y}_1 - \dot{\beta}\vec{z}_2$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/R_0) = b\omega\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{y}_1 + b\ddot{\beta}\,\vec{x}_2 + \omega^2(a + b\sin\beta)\,\vec{x}_1 + b\omega\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{y}_1 - b\dot{\beta}^2\vec{z}_2$$

$$\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/R_0) = 2b\omega\dot{\beta}\cos\beta\,\vec{y}_1 + \omega^2(a + b\sin\beta)\,\vec{x}_1 + b\ddot{\beta}\,\vec{x}_2 - b\dot{\beta}^2\vec{z}_2$$



Dynamique :

Donner le torseur cinétique de la cabine 2, au point A, dans son mouvement par rapport au bâti 0 ;

B- Dynamique :

1°- $\{C(2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \vec{V}(G_2 \in 2/R_0) \\ \vec{\sigma}_A(2/R_0) \end{array} \right\}_A$

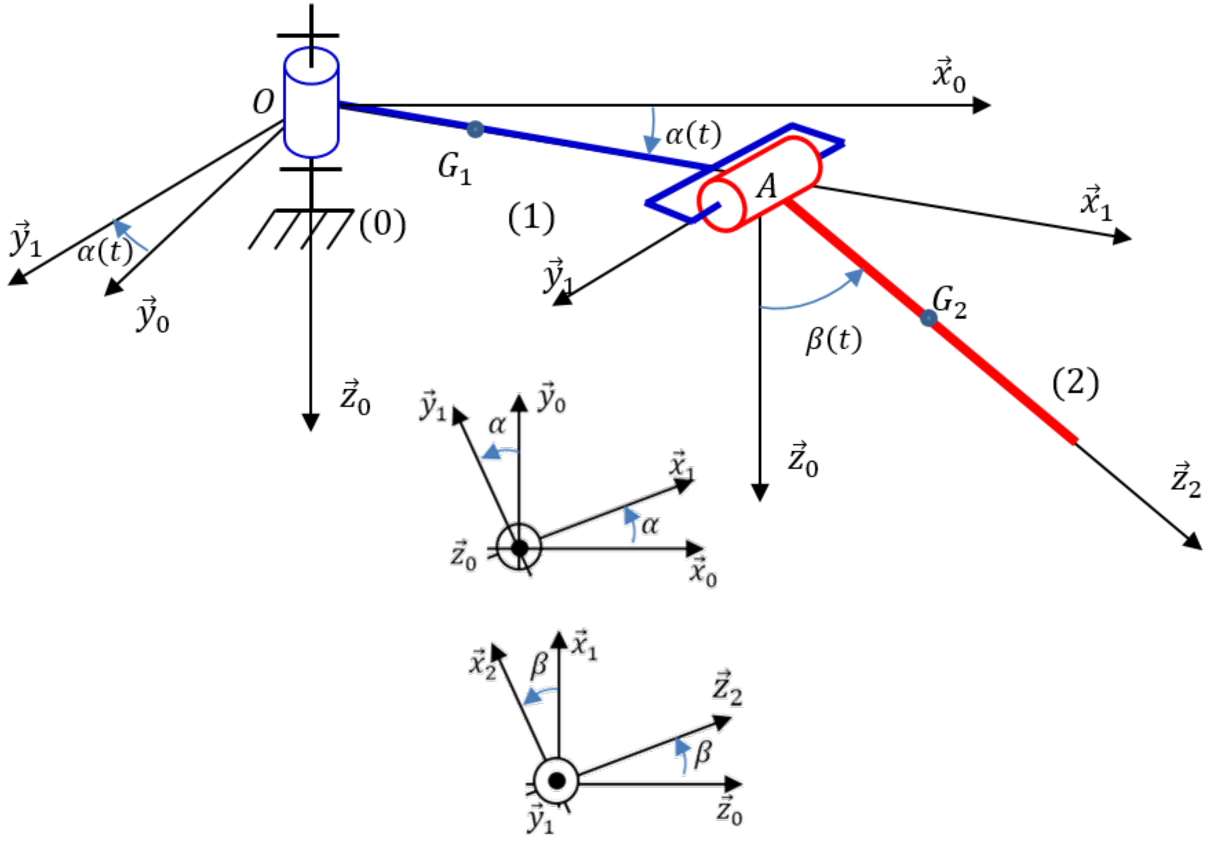
• $\vec{\sigma}_A(2/R_0) = m_2 \vec{AG_2} \wedge \vec{V}(A \in 2/R_0) + [I_A(2)]\vec{\Omega}(2/R_0)$

• $m_2 \vec{AG_2} \wedge \vec{V}(A \in 2/R_0) = m_2 b \vec{z}_2 \wedge (a \omega \vec{y}_1)$

$= -m_2 a b \omega \vec{x}_2$

• $[I_A(2)]\vec{\Omega}(2/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_2} \begin{pmatrix} -\omega \sin\beta \\ \dot{\beta} \\ \omega \cos\beta \end{pmatrix}_{R_2}$

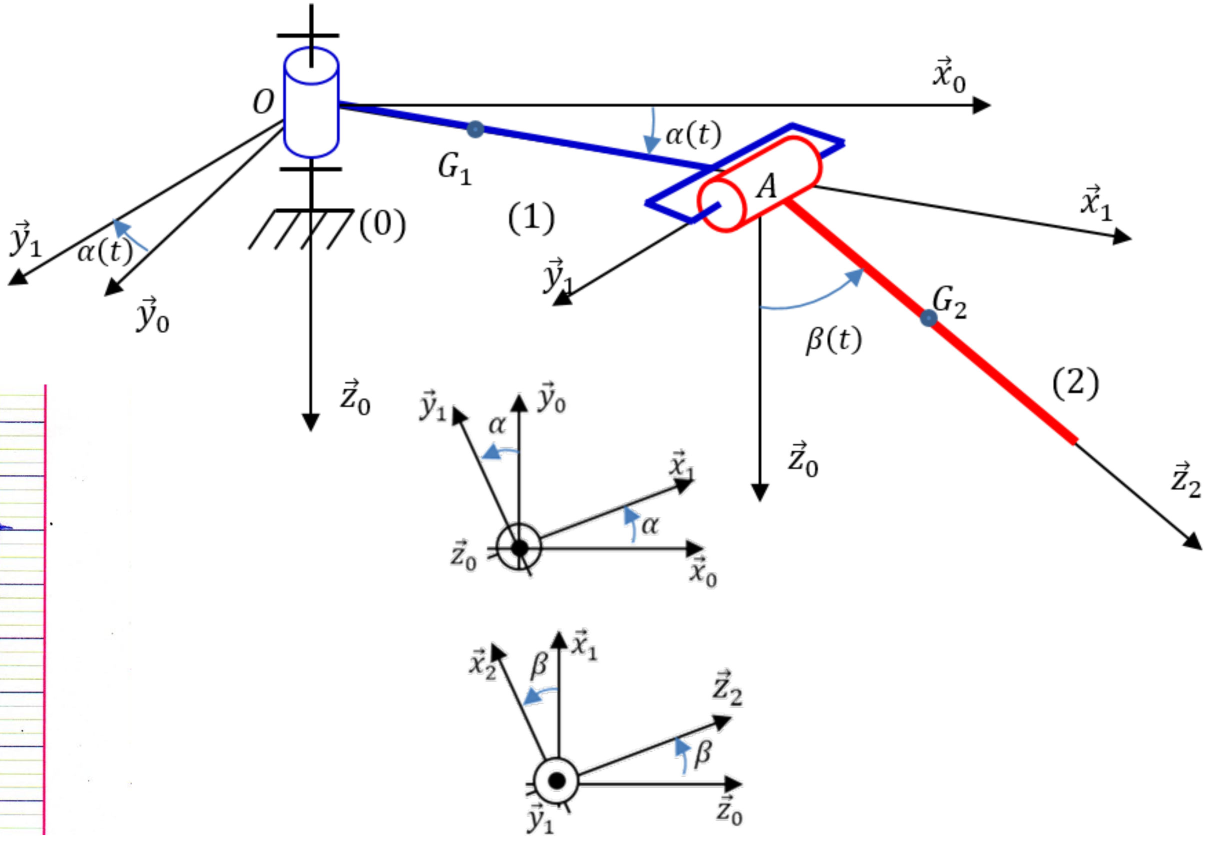
$= -A\omega \sin\beta \, \vec{x}_2 + B\dot{\beta} \, \vec{y}_1 + C\omega \cos\beta \, \vec{z}_2$



Dynamique :

Donner le torseur cinétique de la cabine 2, au point A, dans son mouvement par rapport au bâti 0 ;

$$\{C(2/R_0)\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2\, \omega (a + b \sin\beta)\, \vec{y}_1 + m_2\, b\, \dot{\beta}\, \vec{x}_2 \\ \\ -(m_2\, a b + A \sin\beta)\, \omega\, \vec{x}_2 + B \dot{\beta}\, \vec{y}_1 \\ \quad + C \omega \cos\beta\, \vec{z}_2 \end{array} \right\}_A$$



Dynamique :

Déterminer la projection sur l'axe $\vec{y}_1$, du moment dynamique de la cabine 2 au point A dans son mouvement par rapport au bâti ;

2°- $\vec{y}_1 \cdot \vec{\delta}_A(2/R_0) = \vec{y}_1 \cdot \left[\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(2/R_0)\Big|_{R_0} + m_2 \vec{V}(A/R_0)\wedge\vec{V}(G_2/R_0)\right]$

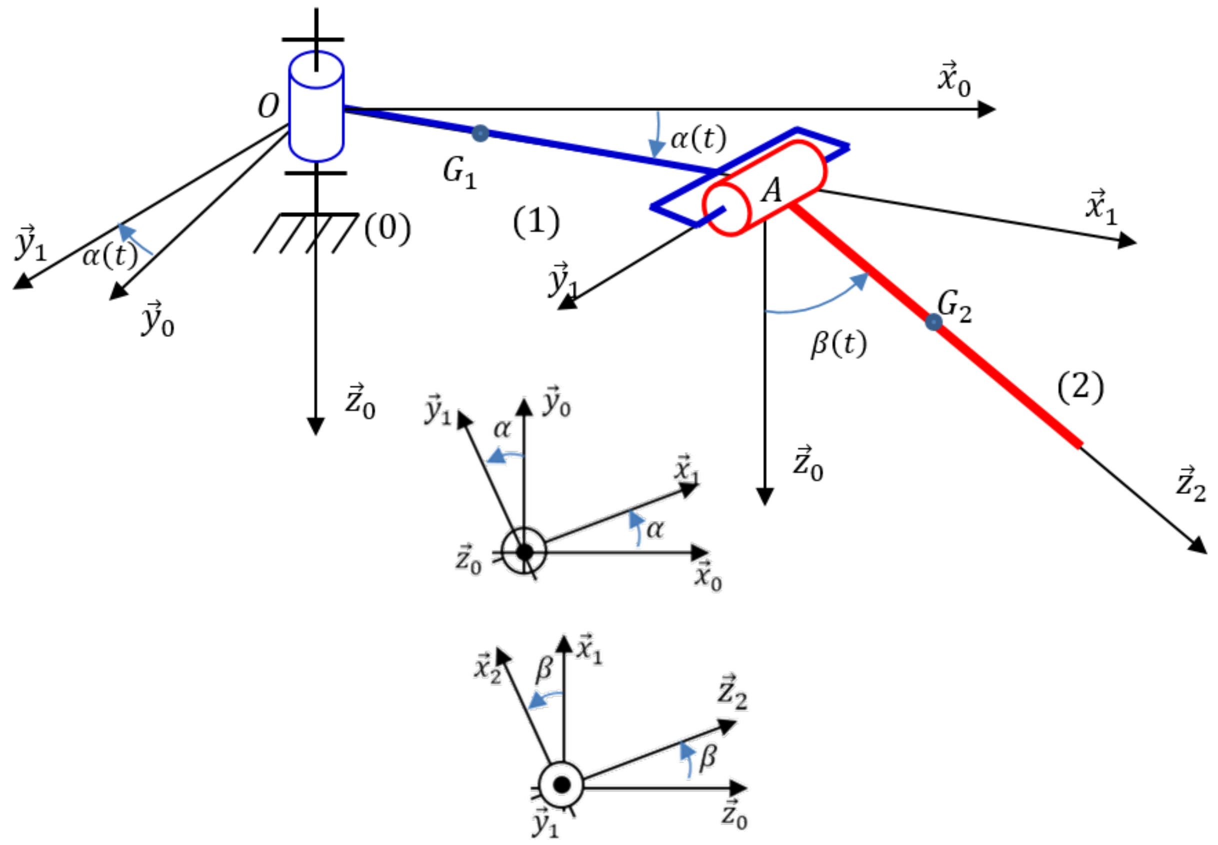
$$= \vec{y}_1 \cdot \frac{d\vec{\sigma}_A(2/R_0)}{dt}\Big|_{R_0} + m_2\,\vec{y}_1\cdot\left(\vec{V}(A/R_0)\wedge\vec{V}(G_2/R_0)\right)$$

• $\vec{y}_1\cdot\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(2/R_0)\Big|_{R_0} = \frac{d}{dt}\left[\vec{y}_1\cdot\vec{\sigma}_A(2/R_0)\right] - \frac{d\vec{y}_1}{dt}\Big|_{R_0}\cdot\vec{\sigma}_A(2/R_0)$

$\vec{y}_1\cdot\vec{\sigma}_A(2/R_0) = B\dot{\beta}$

$\frac{d\vec{y}_1}{dt}\Big|_{R_0}\cdot\vec{\sigma}_A(2/R_0) = -\omega\,\vec{x}_1\cdot\vec{\sigma}_A(2/R_0)$

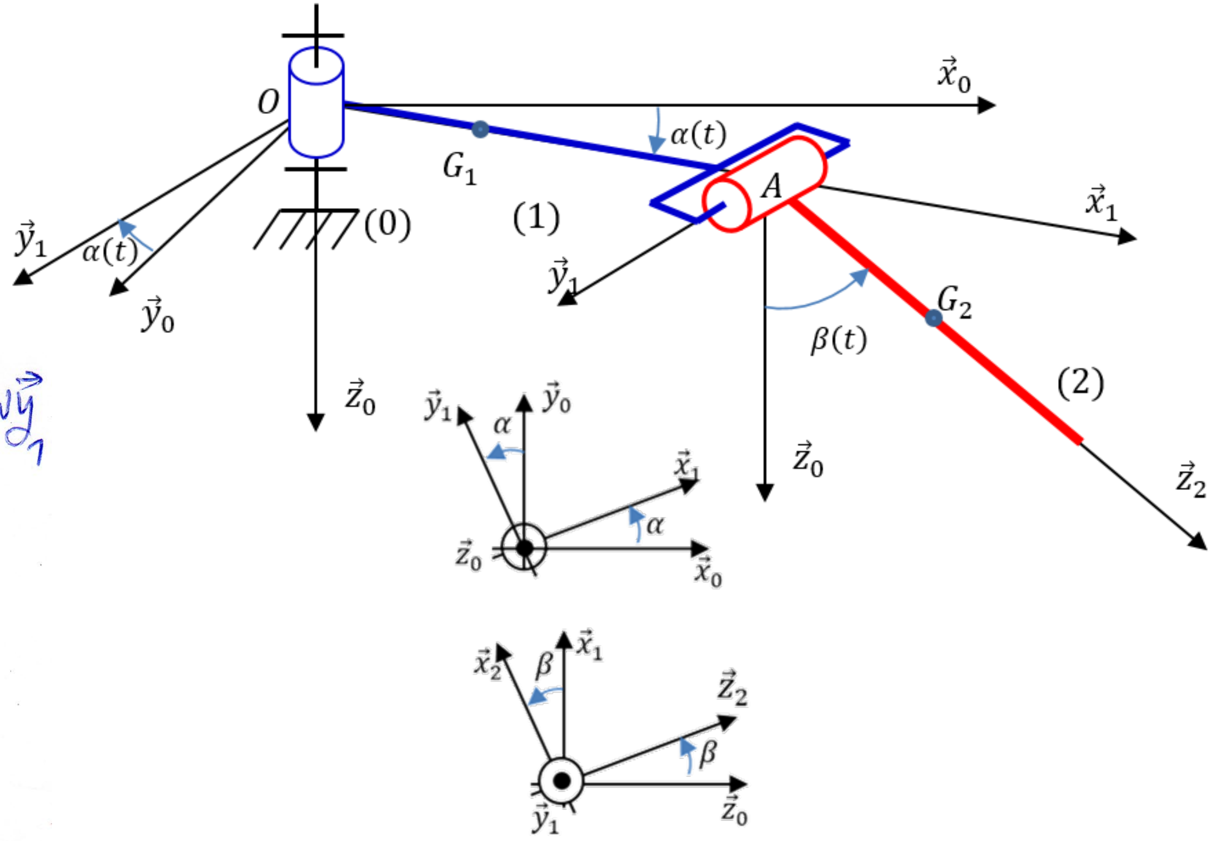
$$= +\omega^2(m_2 ab + A\sin\beta)\cos\beta - C\omega^2\cos\beta\sin\beta$$



Dynamique :

Déterminer la projection sur l'axe $\vec{y}_1$, du moment dynamique de la cabine 2 au point A dans son mouvement par rapport au bâti ;

$$\Rightarrow \vec{y}_1 \cdot \frac{d\vec{\sigma}_A(2/R_0)}{dt}\Big|_R = B\ddot{\beta} - m_2 a b \omega^2 \cos\beta + \omega^2 \cos\beta \sin\beta \,(C-A)$$



$$\text{or } \vec{y}_1 \cdot m_2 \left(\vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{V}(G_2/R_0)\right) = 0 \quad \text{car } \vec{V}(A/R_0) = a\omega \vec{y}_1$$

Soit :

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{\delta}_A(2/R_0) = B\ddot{\beta} - m_2 a b \omega^2 \cos\beta + \cancel{\omega^2(A-C)}$$

$$- \omega^2 (A-C) \cos\beta \sin\beta$$

$$= B\ddot{\beta} - \omega^2 \left[m_2 a b \cos\beta + (A-C)\cos\beta \sin\beta \right]$$

Dynamique :

Déterminer la projection sur l’axe $\vec{z}_0$ du moment dynamique de l’ensemble formé par la cabine 2 et le bras 1 au point O dans leur mouvement par rapport au bâti ;

3°- Soit $E = \{2, 1\}$

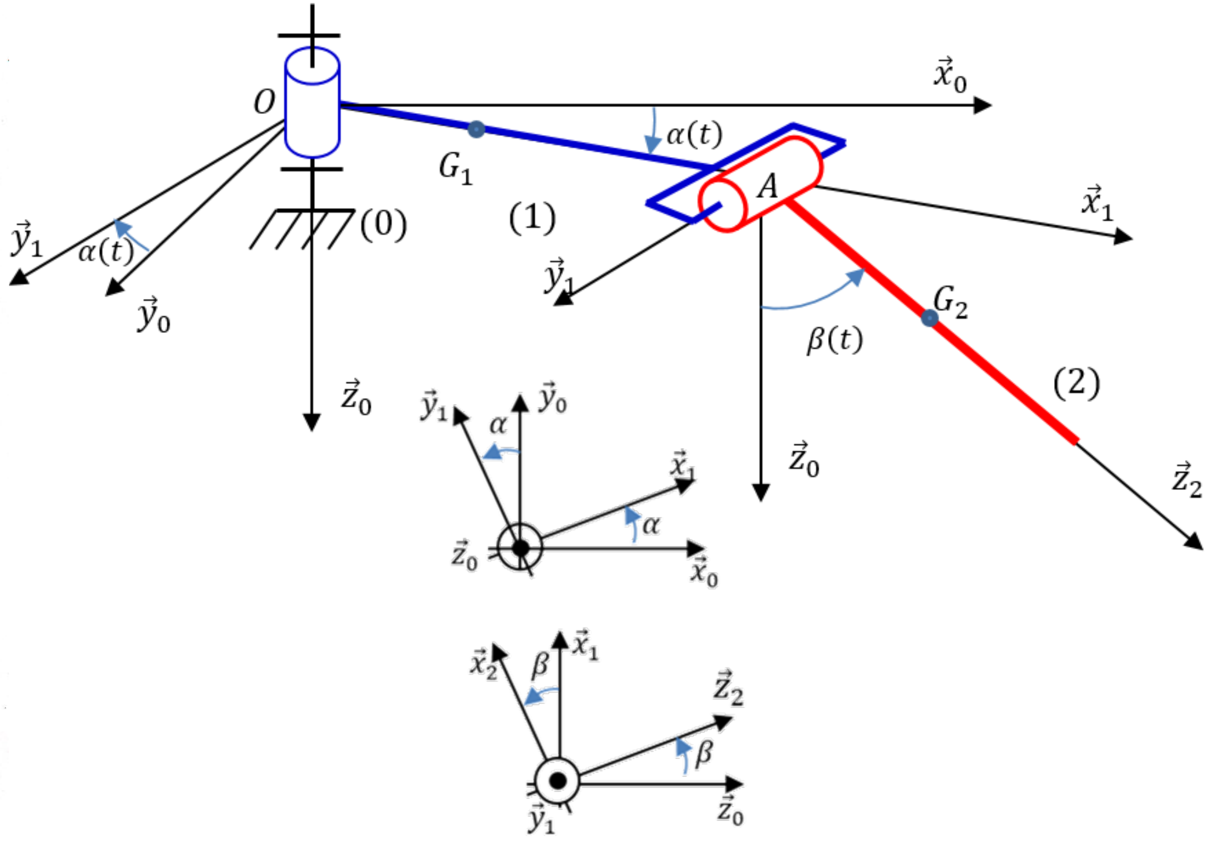
$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_0(E/R_0) = \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_0(1/R_0) + \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_0(2/R_0)$$

• $\vec{\delta}_0(1/R_0) = \dfrac{d}{dt}\vec{\sigma}_0(1/R_0)\Big|_{R_0}$

avec $\vec{\sigma}_0(1/R_0) = I\omega\vec{z} \Rightarrow \vec{\delta}_0(1/R_0) = \vec{0}$

• $\vec{\delta}_0(2/R_0) = \dfrac{d}{dt}\vec{\sigma}_0(2/R_0)\Big|_{R_0}$

$$\vec{\sigma}_0(2/R_0) = \vec{\sigma}_A(2/R_0) + m_2\vec{V}(G_2 \in 2/R_0) \wedge \vec{AO}$$



Dynamique :

Déterminer la projection sur l'axe $\vec{z}_0$ du moment dynamique de l'ensemble formé par la cabine 2 et le bras 1 au point O dans leur mouvement par rapport au bâti ;

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_0(2/R_0) = \vec{z}_0 \cdot \left.\frac{d\vec{\sigma}_0(2/R_0)}{dt}\right|_{R_0} = \frac{d}{dt}\left(\vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_0(2/R_0)\right)$$

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_0(2/R_0) = \vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_A(2/R_0) + \vec{z}_0 \cdot m_2 \vec{V}(G_2 \in 2/R_0) \wedge \vec{AO}$$

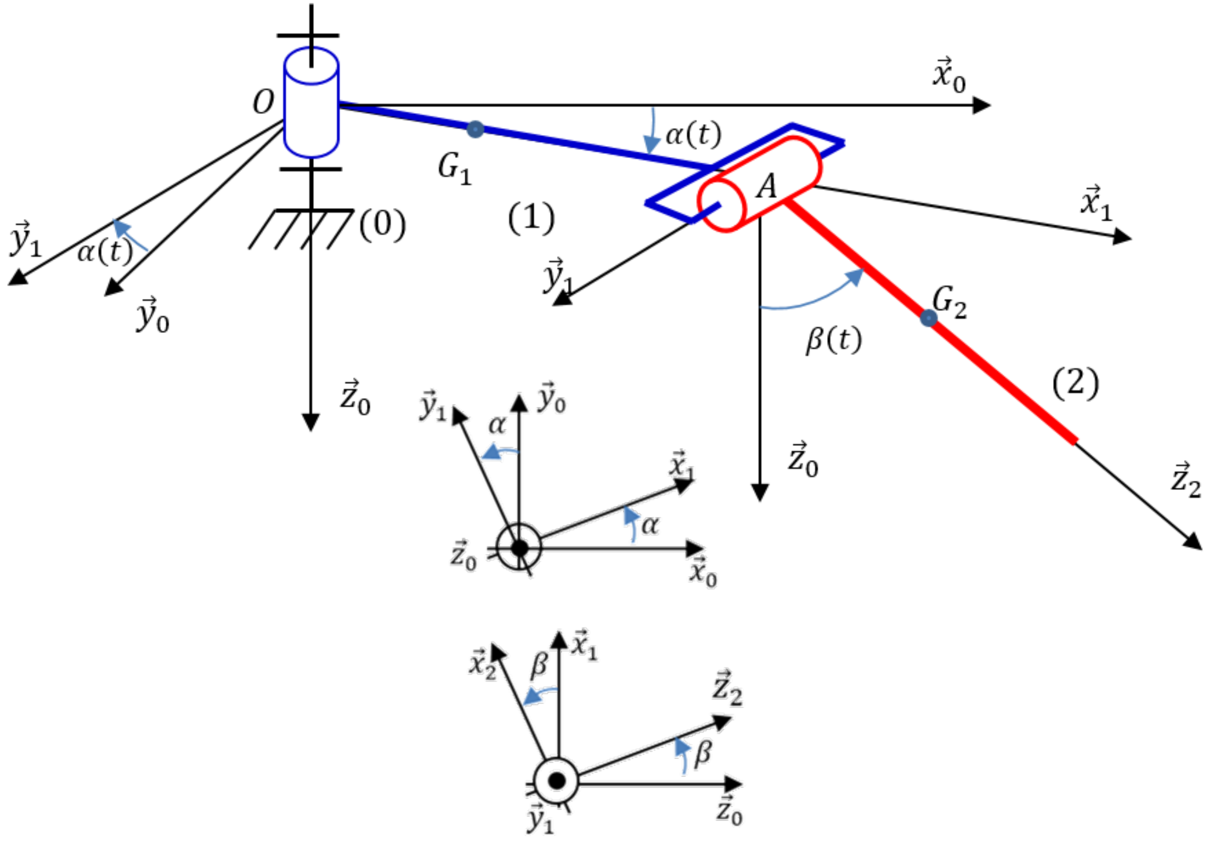
$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_A(2/R_0) = + \omega\,(m_2 ab + A \sin\beta)\sin\beta + C\omega\cos^2\beta$$

$$\vec{z}_0 \cdot \left(\vec{V}(G_2 \in 2/R_0) \wedge \vec{AO}\right) = \vec{V}(G_2 \in 2/R_0) \cdot \left(\vec{AO} \wedge \vec{z}_0\right)$$

$$= a\,\vec{y}_1 \cdot \vec{V}(G_2 \in 2/R_0)$$

$$= a\vec{y}_1 \cdot \left(\omega(a + b\sin\beta)\vec{y}_1 + b\dot{\beta}\vec{x}_2\right)$$

$$= \omega\, a\,(a + b\sin\beta)$$



Dynamique :

Déterminer la projection sur l'axe $\vec{z}_0$ du moment dynamique de l'ensemble formé par la cabine 2 et le bras 1 au point O dans leur mouvement par rapport au bâti ;

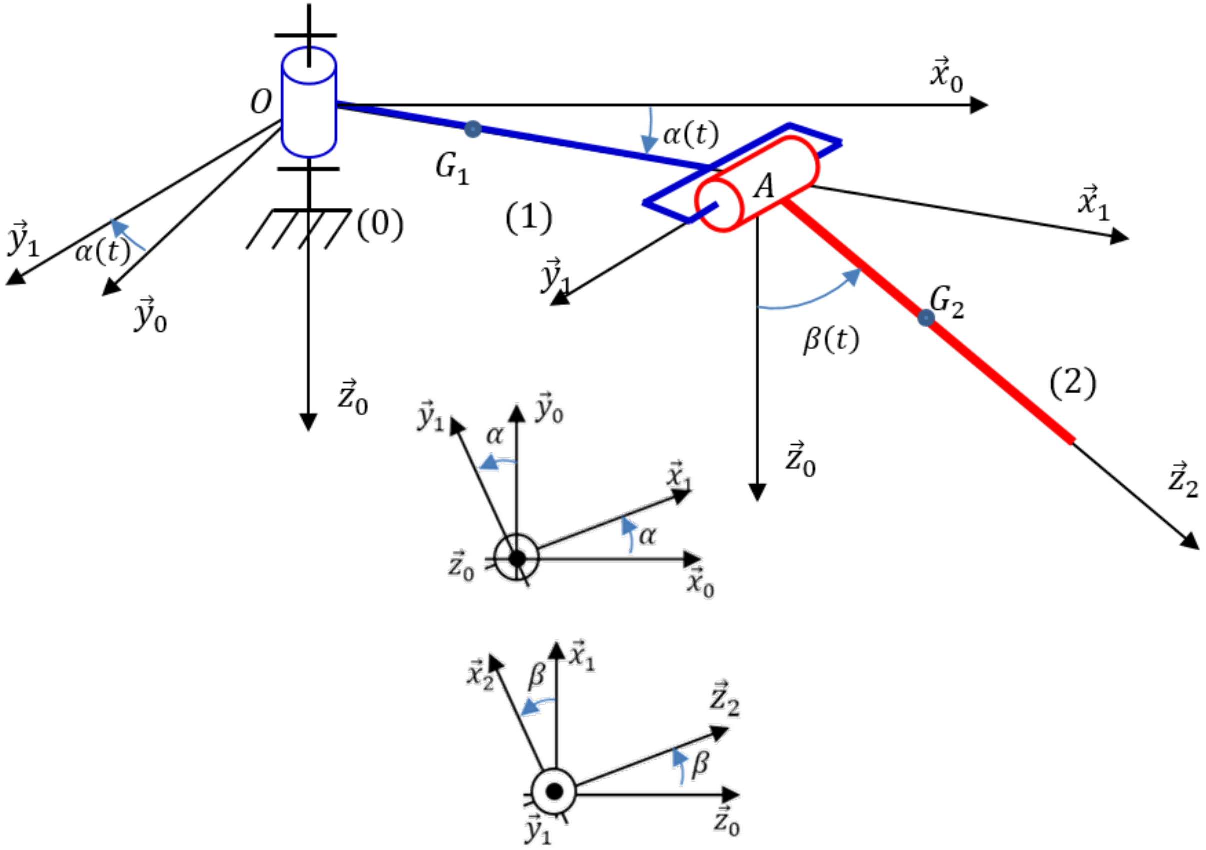
$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\sigma}_0(2/R_0) = +\omega(m_2 ab + A\sin\beta)\sin\beta + C\omega\cos^2\beta$$

$$+ m_2 \omega a (a + b\sin\beta)$$

$$= \omega\left[A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + m_2 a(a + 2b\sin\beta)\right]$$

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_0(2/R_0) = \omega \frac{d}{dt}\left[A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + m_2 a(a+2b\sin\beta)\right]$$

D'où $\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_0(E/R_0) = \omega \dfrac{d}{dt}\left[A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + m_2 a(a+2b\sin\beta)\right]$



Dynamique :

Déterminer, au point A et dans la base du repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, le torseur des actions mécaniques extérieures à la cabine 2 ;

4°-

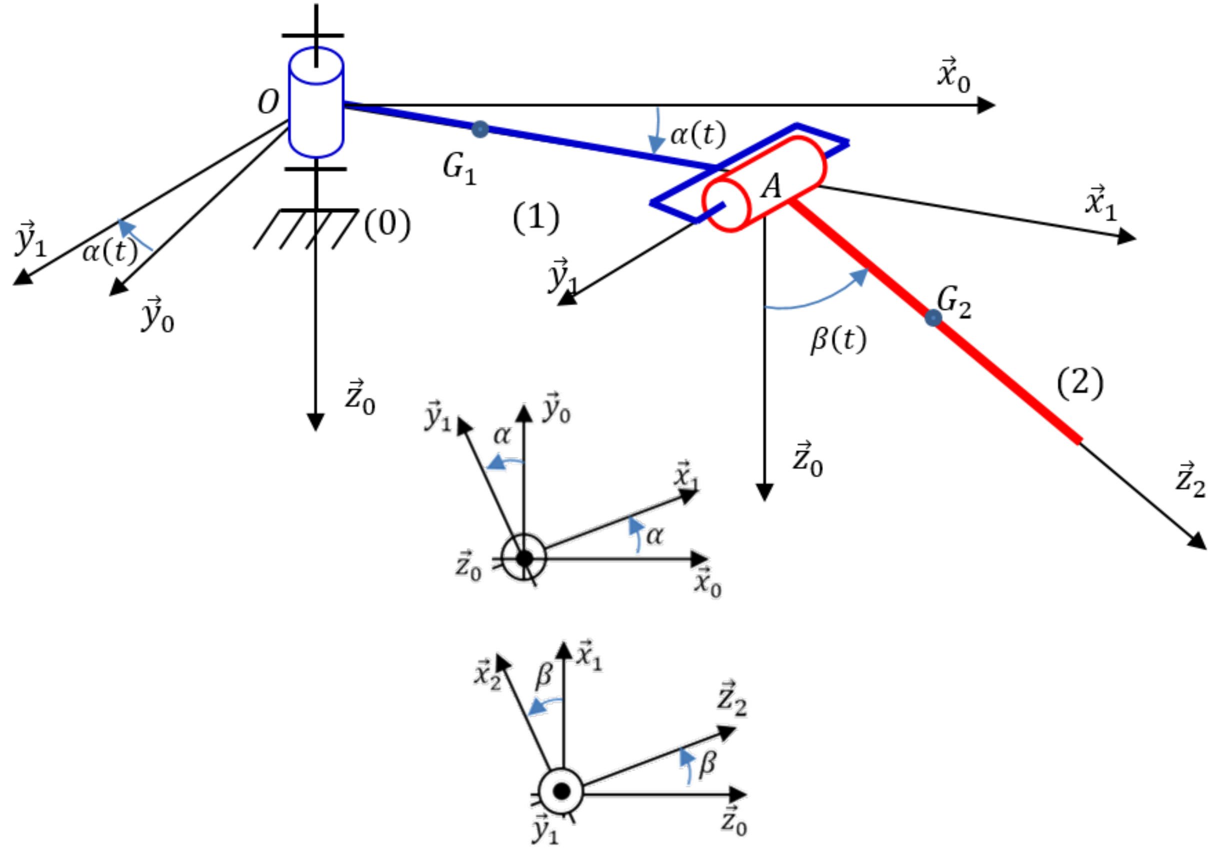
$$\bar{2} = \{1, \vec{g}\}$$

$$\{F(1 \to 2)\} = \left\{ \begin{matrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & N_{12} \end{matrix} \right\}_{A \; R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$$

$$\{F(\vec{g} \to 2)\} = \left\{ \begin{matrix} m_2 \vec{g} = m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{AG_2} \wedge m_2 \vec{g} = b \vec{z}_2 \wedge m_2 g \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_A$$

$$= \left\{ \begin{matrix} m_2 g \vec{z}_0 \\ -m_2 b g \sin\beta \, \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_2 b g \sin\beta \\ m_2 g & 0 \end{matrix} \right\}_{A \; R_1}$$

$$\Rightarrow \{F(\bar{2} \to 2)\} = \left\{ \begin{matrix} \cancel{X_{12}} & L_{12} \\ \cancel{Y_{12}} & -m_2 b g \sin\beta \\ m_2 g + Z_{12} & N_{12} \end{matrix} \right\}_A \; R1$$



Dynamique :

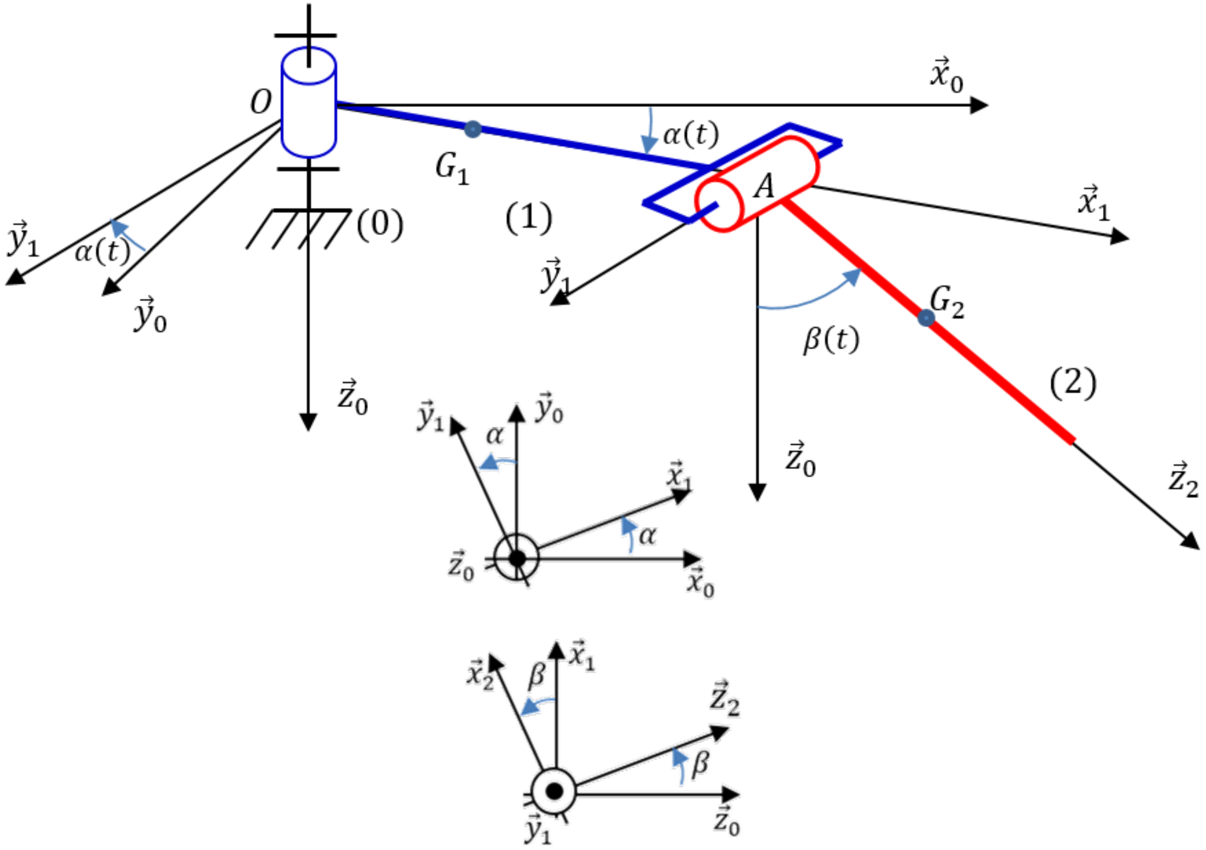
Déterminer, au point 0 et dans la base du repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, le torseur des actions mécaniques extérieures à l'ensemble S formé par le bras 1 et la cabine 2 ;

5°/ $S = \{1, 2\} \Rightarrow \bar{S} = \{0, \vec{g}, \text{moteur}\}$

$$\{F(0 \to 1)\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{array}\right\}_{R_0}$$

$$\{F(\text{moteur} \to 1)\} = {}_O\left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array}\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_m \end{array}\right\}_{R_0}$$

$$\{F(\vec{g} \to 1)\} = {}_O\left\{\begin{array}{c} m_1 g \vec{z}_0 \\ \vec{OG_1} \wedge m_1 g \vec{z}_0 \end{array}\right\}$$



Dynamique :

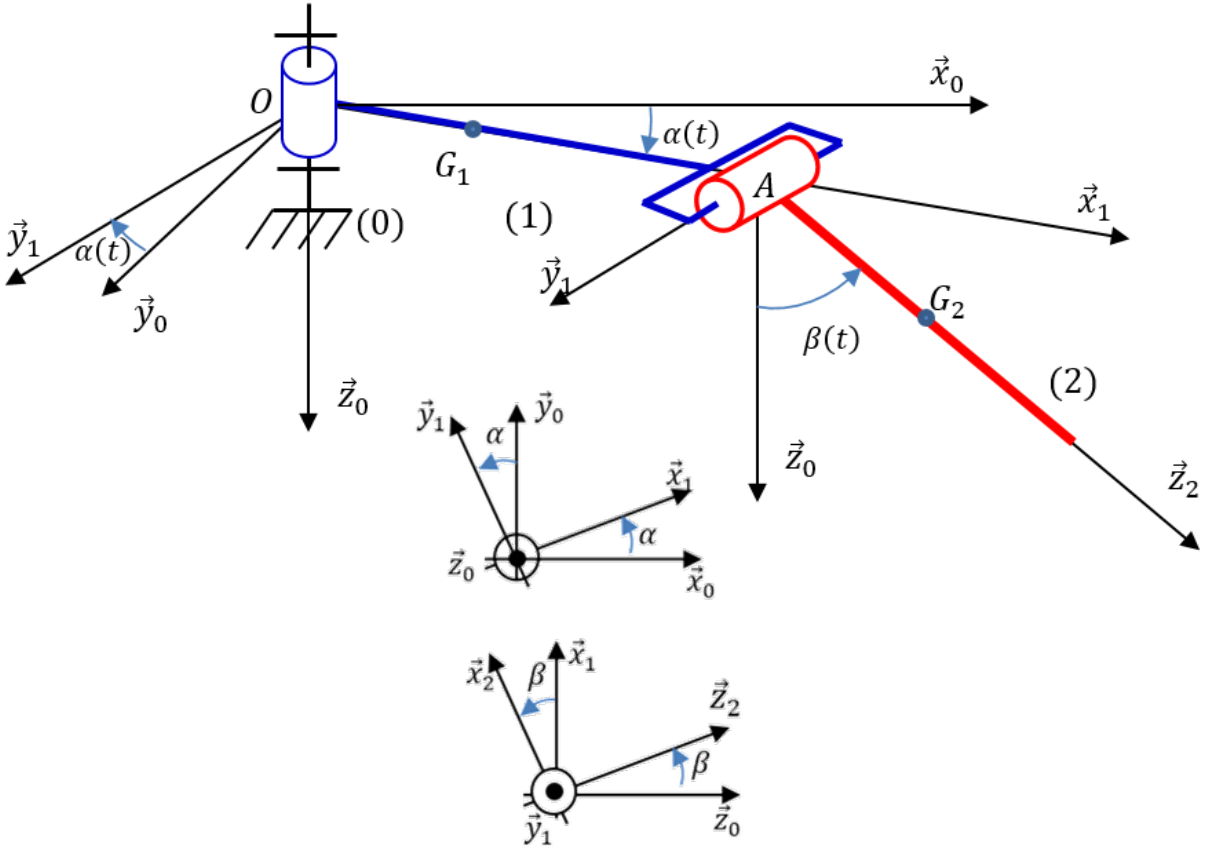
Déterminer, au point 0 et dans la base du repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, le torseur des actions mécaniques extérieures à l'ensemble S formé par le bras 1 et la cabine 2 ;

$$\{F(\vec{g}\to 1)\} = \left\{ \begin{matrix} m_1 g \vec{z}_0 \\ \vec{OG_1} \wedge m_1 g \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_O$$

$$\vec{OG_1} \wedge m_1 g \vec{z}_0 = m_1 e g\, \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_0 = -m_1 e g\, \vec{y}_1$$

$$= -m_1 e g\,(-\sin\alpha\, \vec{x}_0 + \cos\alpha\, \vec{y}_0)$$

$$\Rightarrow \{F(\vec{g}\to 1)\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ m_1 g \end{matrix} \middle| \begin{matrix} m_1 e g \sin\alpha \\ -m_1 e g \cos\alpha \\ 0 \end{matrix} \right\}_{O,\,R_0}$$



Dynamique :

Déterminer, au point 0 et dans la base du repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, le torseur des actions mécaniques extérieures à l'ensemble S formé par le bras 1 et la cabine 2 ;

$$\{F(\vec{g}\to 2)\} = \begin{Bmatrix} m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{OG_2} \wedge m_2 g \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

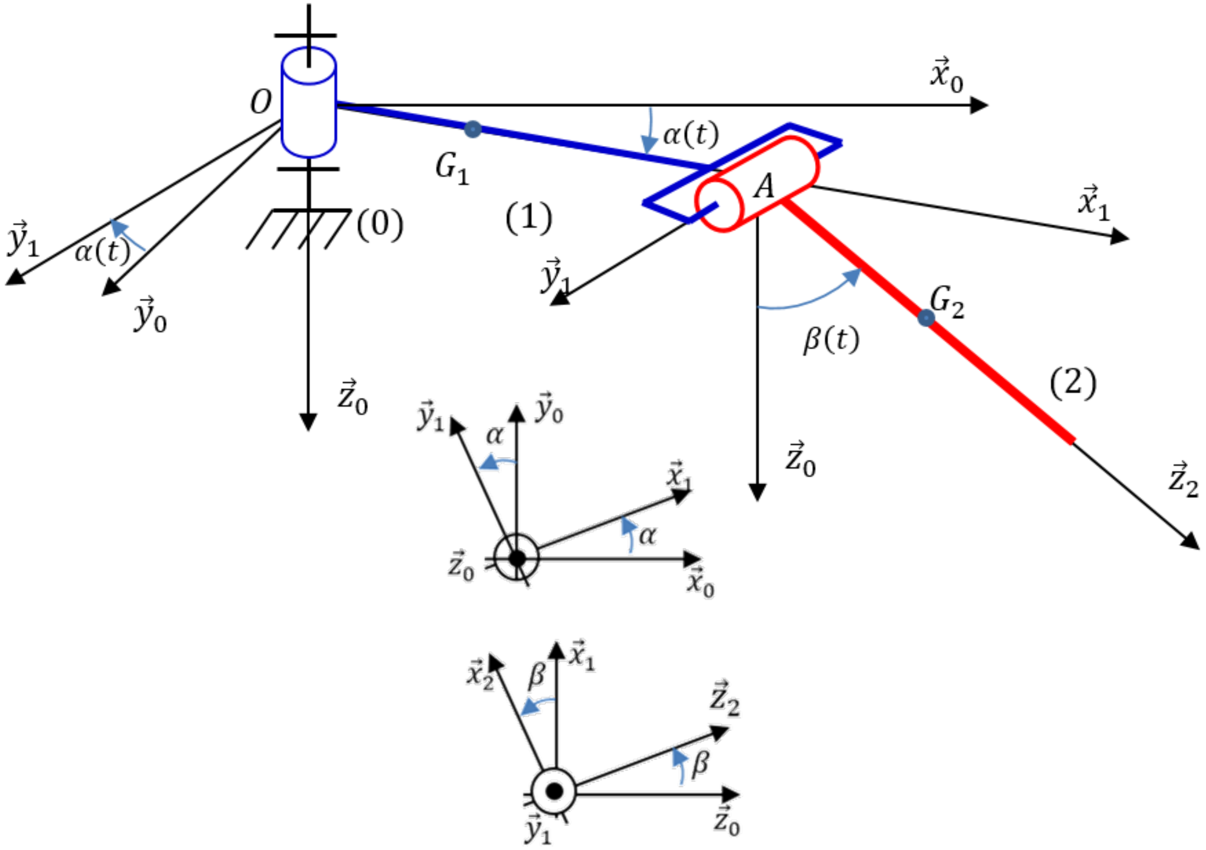
$$\vec{OG_2} \wedge m_2 g \vec{z}_0 = (a\vec{x}_1 + b\vec{z}_2) \wedge m_2 g \vec{z}_0$$

$$= m_2 a g\, \vec{x}_1 \wedge \vec{z}_0 + m_2 b g\, \vec{z}_2 \wedge \vec{z}_0$$

$$= -m_2 a g\, \vec{y}_1 + m_2 b g \sin\beta\, \vec{y}_1$$

$$= m_2 g (b\sin\beta - a)\, \vec{y}_1$$

$$= m_2 g (b\sin\beta - a)\,[-\sin\alpha\, \vec{x}_0 + \cos\alpha\, \vec{y}_0]$$



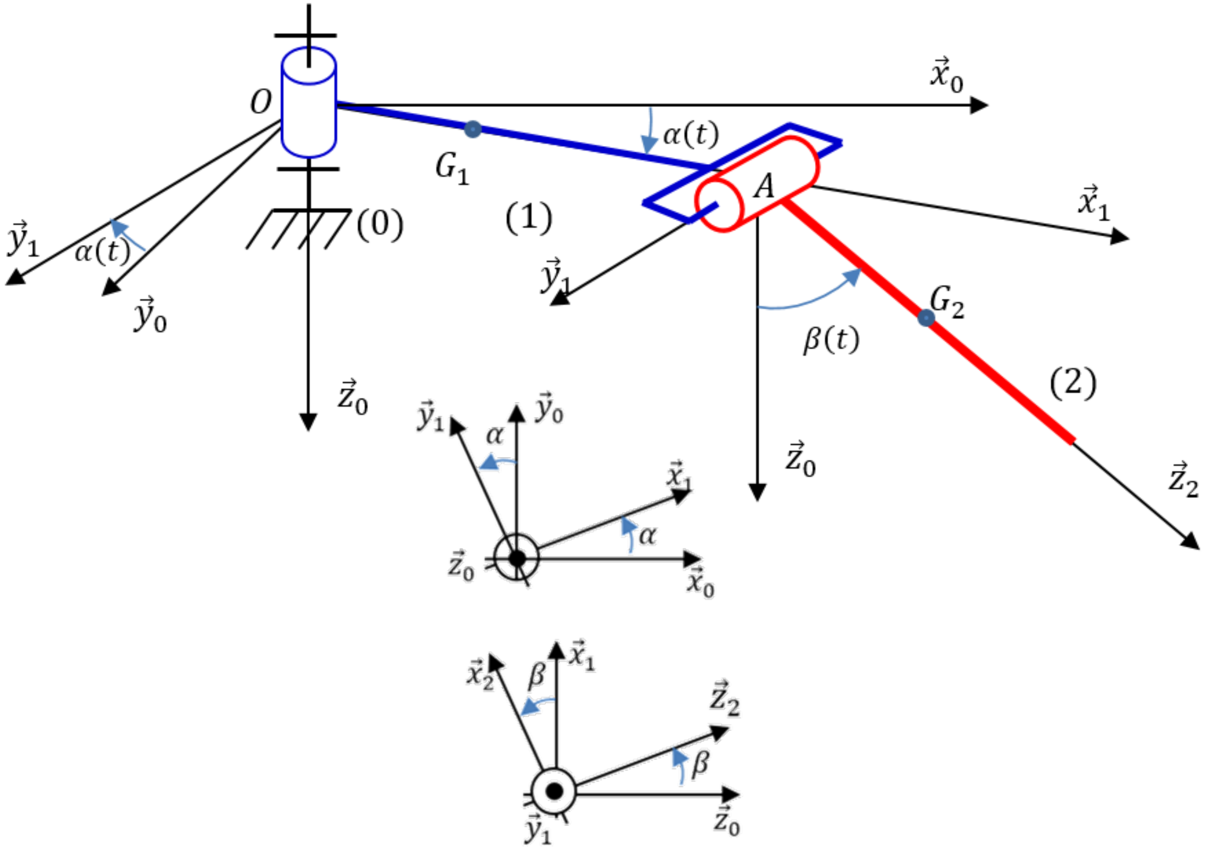
Dynamique :

Déterminer, au point 0 et dans la base du repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, le torseur des actions mécaniques extérieures à l'ensemble S formé par le bras 1 et la cabine 2 ;

$$\{F(g \rightarrow 2)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} 0 & -m_2 g(b\sin\beta - a)\sin\alpha \\ 0 & m_2 g(b\sin\beta - a)\cos\alpha \\ m_2 g & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$$

$$\Rightarrow \{F(\bar{E} \rightarrow E)\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} + m_1 e g\sin\alpha - m_2 g(b\sin\beta - a)\sin\alpha \\ Y_{01} & M_{01} - m_1 e g\cos\alpha + m_2 g(b\sin\beta - a)\cos\alpha \\ Z_{01} + m_2 g + m_1 g & C_m \end{Bmatrix}$$

R0



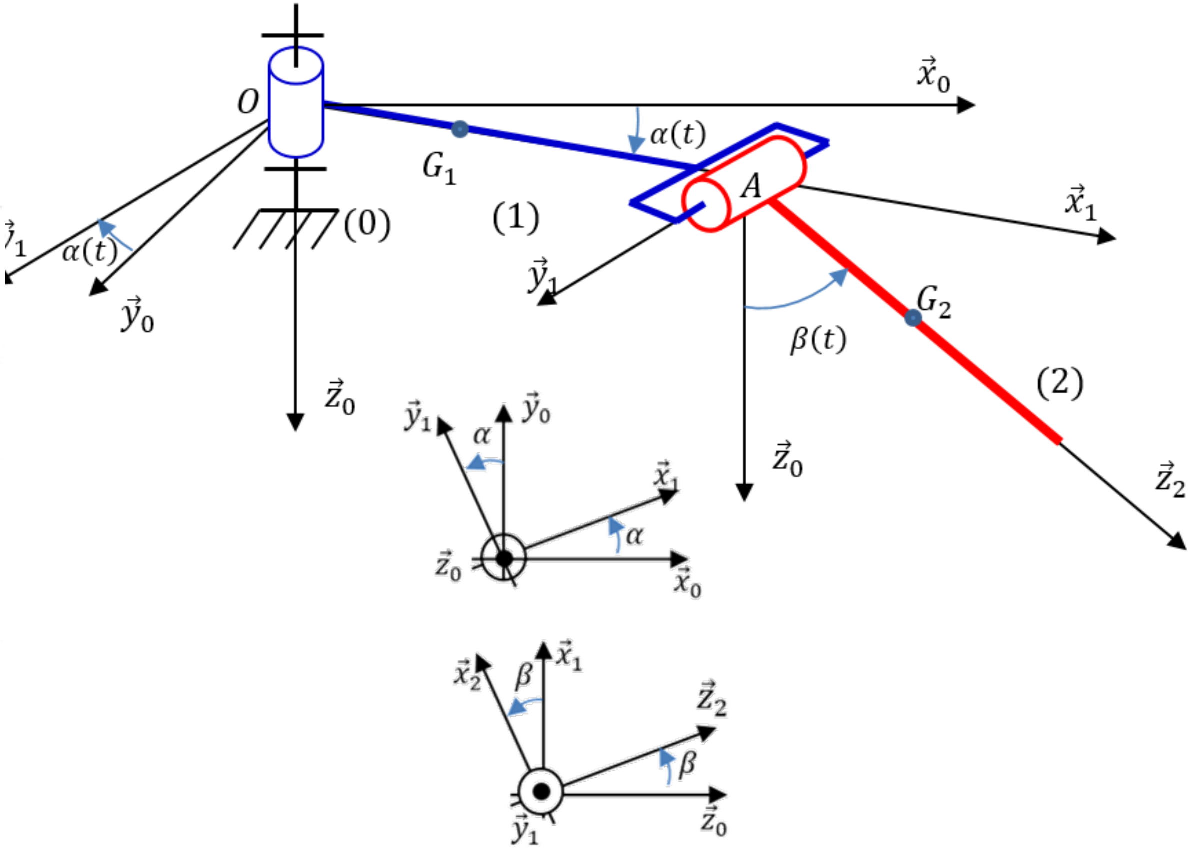
Dynamique :

Déterminer les deux équations de mouvement de la centrifugeuse par rapport au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

6°/ Equations de mouvement de (2) par rapport à (R_0) est donnée par :

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_A(\bar{2}\to 2) = \vec{y}_1 \cdot \vec{\delta}_A(2/R_0)$$

$$B\ddot{\beta} - \omega^2\left[m_2 ab\cos\beta + (A-C)\cos\beta\sin\beta\right] = -m_2 bg\sin\beta$$



Dynamique :

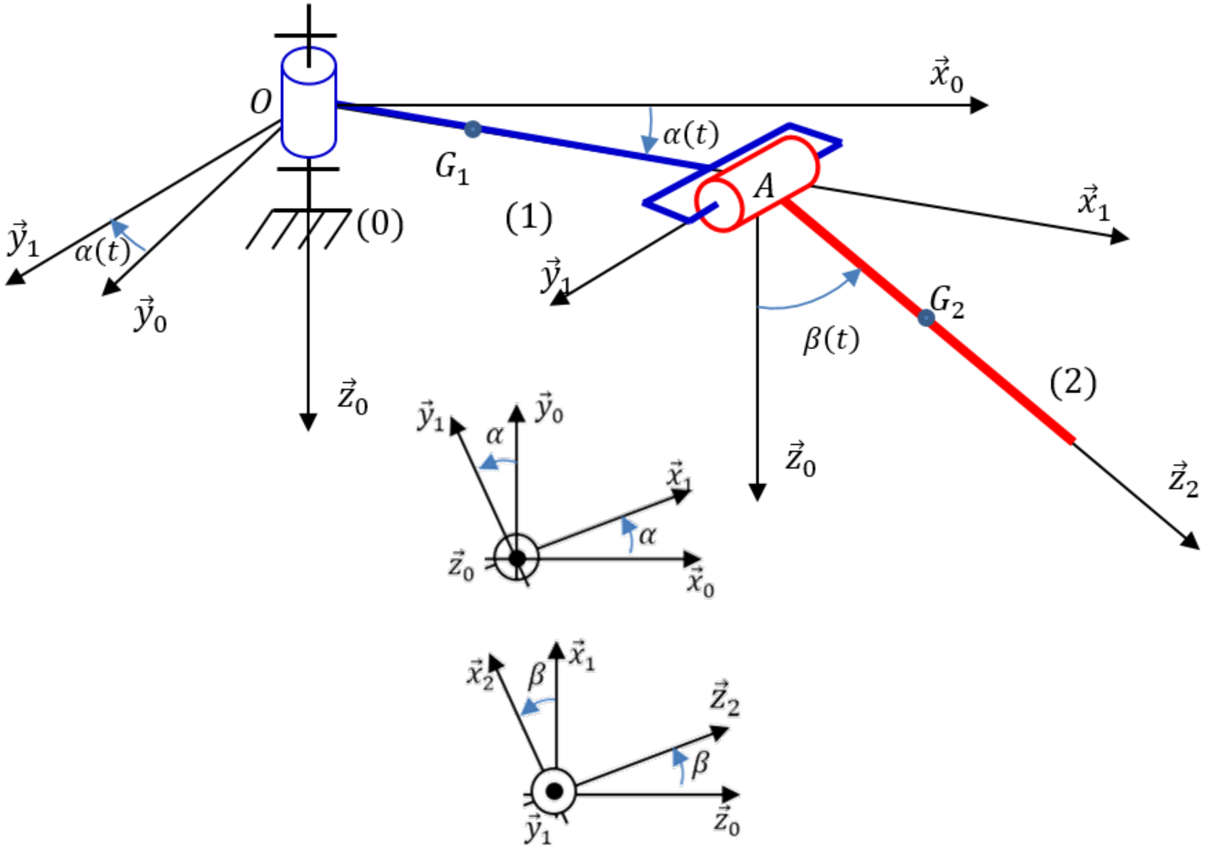
Déterminer les deux équations de mouvement de la centrifugeuse par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Equation de mouvement de l'ensemble

$E = \{1, 2\}$ dans son m^vt par rapport à R_0 :

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\mathcal{M}}_O(\bar{E} \to E) = \vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_O(E/R_0)$$

$$C_m = \omega \frac{d}{dt}\left(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + m_2 a(a + 2b\sin\beta)\right)$$



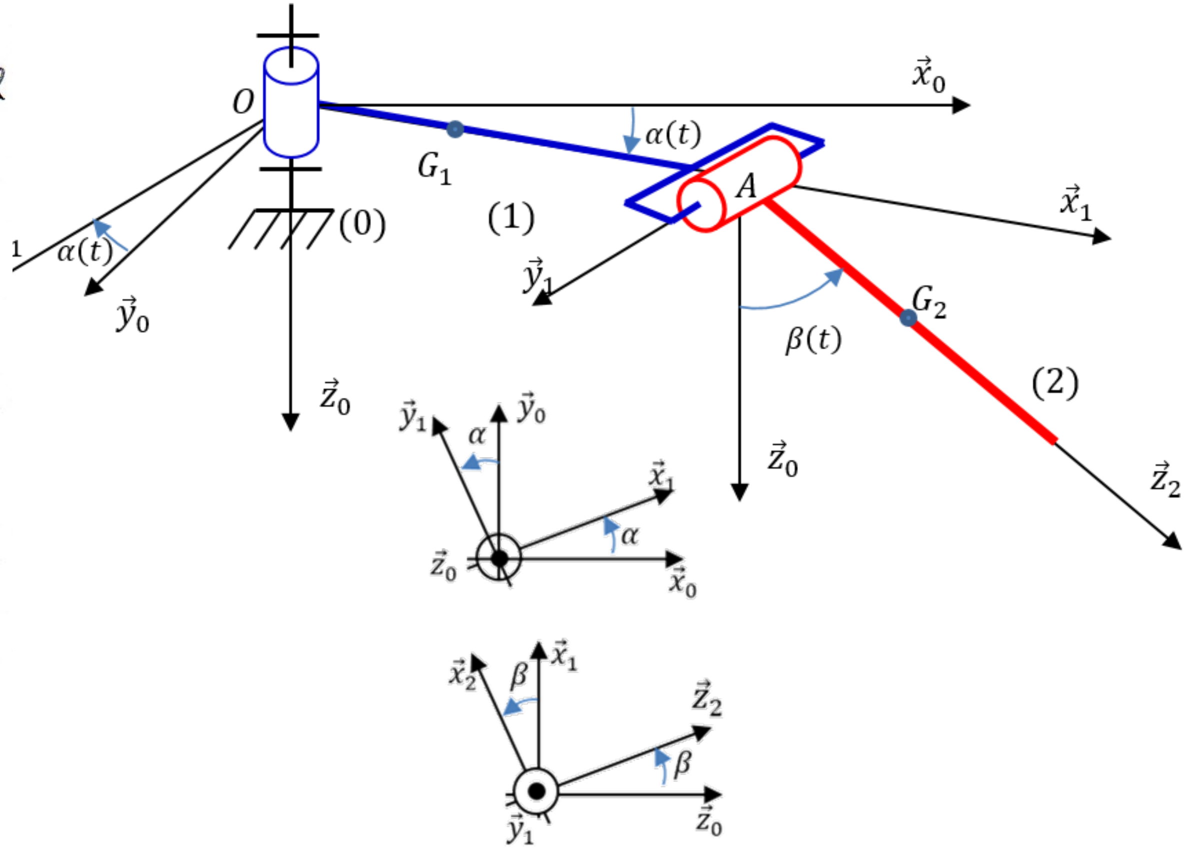
Dynamique :

Déterminer les deux équations de mouvement de la centrifugeuse par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

NB : On pourra poser la partie dynamique autrement :

Remplacer les questions 2+3+4+5+6 par une seule question :

Déterminer les deux équations de mouvement de la centrifugeuse par rapport au repère R_0.



Dynamique :

Déterminer les deux équations de mouvement de la centrifugeuse par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

⊛ Equation de mouvement de (2) % à R_0

- $\vec{y}_1 \cdot \vec{\delta}_A(2/R_0) = \vec{y}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_o(\bar{1} \to 1)$

$$= \vec{y}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{g} \to 2) + \underbrace{\vec{y}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_A(1 \to 2)}_{0}$$

$$= \vec{y}_1 \cdot (\vec{AG_2} \wedge + m_2 g \vec{z}_0)$$

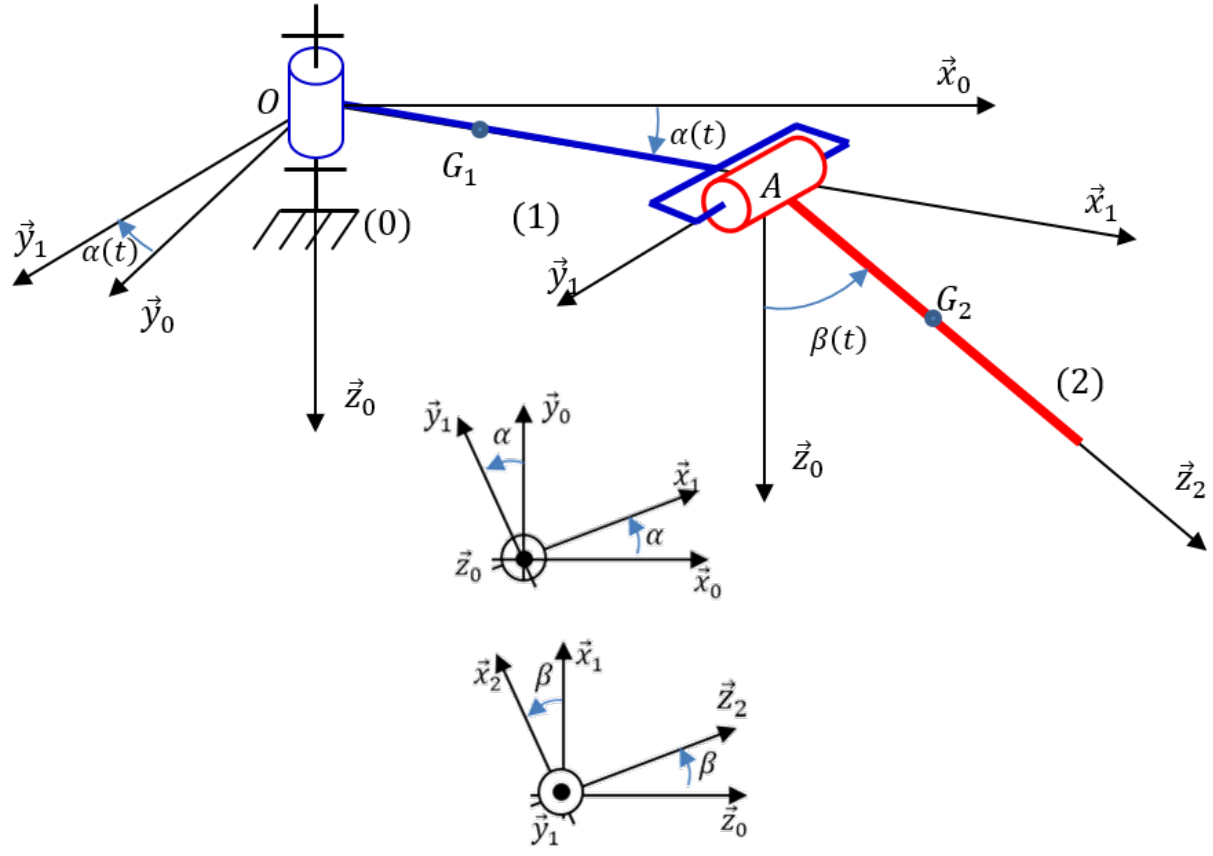
$$= \vec{y}_1 \cdot (b\vec{z}_2 \wedge m_2 g \vec{z}_0)$$

$$= -m_2 b g \sin\beta$$

- $\vec{y}_1 \cdot \vec{\delta}_A(2/R_0) = B\ddot{\beta} - \omega^2[m_2 a b \cos\beta + (A-C)\sin\beta\cos\beta]$

D'où l'équation de mouvement :

$$\boxed{-m_2 b g \sin\beta = B\ddot{\beta} - \omega^2(m_2 a b \cos\beta + (A-C)\sin\beta\cos\beta)}$$



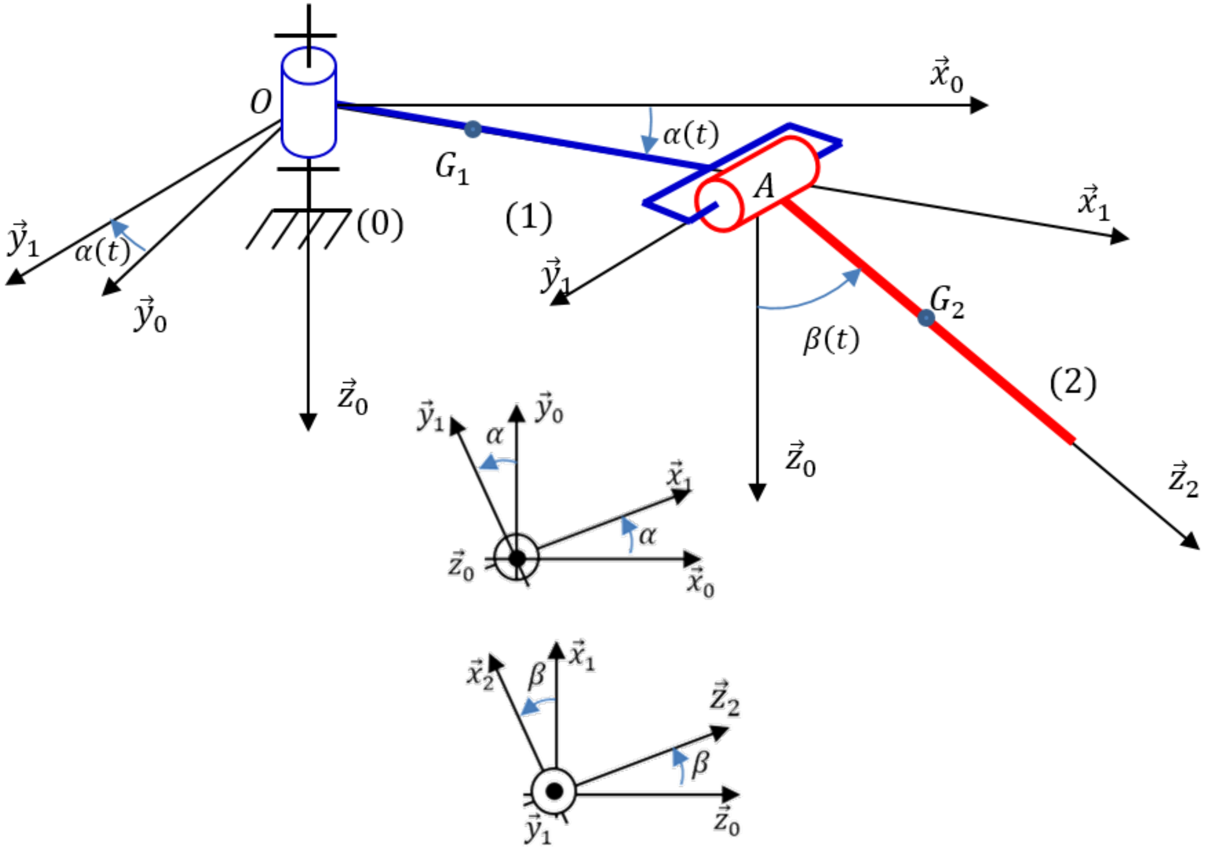
Dynamique :

Déterminer les deux équations de mouvement de la centrifugeuse par rapport au repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

⊛ Equation de mouvement de $E=\{1,2\}$ % à R_0

$$\vec{z}_0\cdot\vec{\delta}_0(E/R_0) = \vec{z}_0\cdot\vec{\mathcal{M}}_0(\bar{E}\to E)$$

$$\vec{z}_0\cdot\vec{\mathcal{M}}_0(\bar{E}\to E) = \vec{z}_0\cdot\vec{\mathcal{M}}_0(g\to 1)+\vec{z}_0\cdot\vec{\mathcal{M}}_0(g\to 2) + \vec{z}_0\cdot\vec{\mathcal{M}}_0(0\to 1)+\vec{z}_0\cdot\vec{\mathcal{M}}_0(\text{moteur}\to 1)$$



Dynamique :

Déterminer les deux équations de mouvement de la centrifugeuse par rapport au repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{g} \to 1) = \vec{z}_0 \cdot (\vec{OG}_1 \wedge m_1 g \vec{z}_0) = \vec{z}_0 \cdot (e\vec{x}_1 \wedge m_1 g \vec{z}_0)$$

$$= 0$$

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\mathcal{M}}_0(g \to 2) = \vec{z}_0 \cdot (\vec{OG}_2 \wedge m g \vec{z}_0) = 0$$

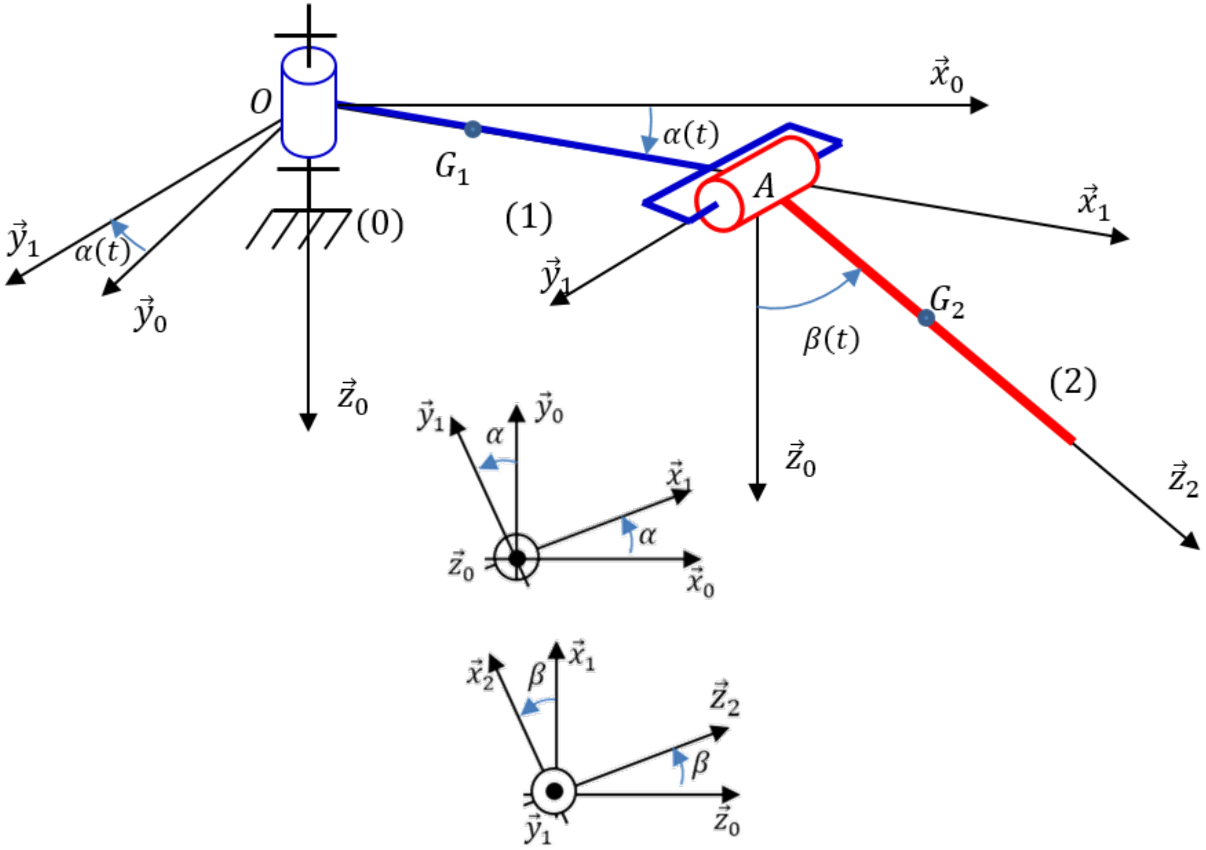
$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\mathcal{M}}_0(O \to 1) = 0$$

$$\vec{z}_0 \cdot \mathcal{M}_0(\text{moteur} \to 1) = C_m$$

$$\Rightarrow \vec{z}_0 \cdot \vec{\mathcal{M}}_0(\bar{E} \to E) = C_m$$

$$\vec{z}_0 \cdot \vec{\delta}_0(E/R_0) = \omega \frac{d}{dt}\left(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + m_2 a(a + 2b\sin\beta)\right)$$

Soit : $C_m = \omega \dfrac{d}{dt}\left(A\sin^2\beta + C\cos^2\beta + m_2 a(a + 2b\sin\beta)\right)$



Merci pour votre attention