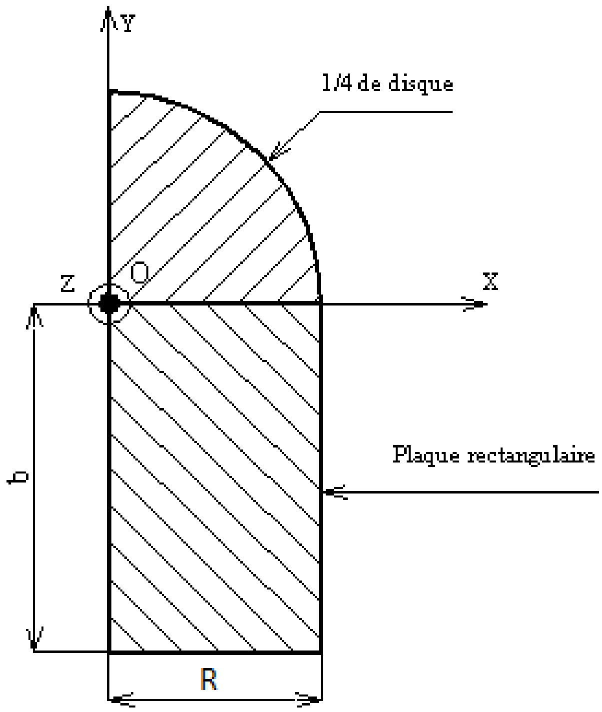
TD : Géométrie des masses

Exercice 1 :

Le solide donné par la figure suivante est formé d'1/4 de disque et d'une plaque rectangulaire. Il est supposé homogène et d'épaisseur négligeable. Le ¼ de disque est de masse m et de rayon R. La plaque rectangulaire est de masse M, de largeur R et de longueur b.



1) Déterminer le centre d'inertie de l'1/4 de disque,
2) Déduire le centre d'inertie de l'ensemble formé par la plaque rectangulaire et l'1/4 de disque,
3) Déterminer la matrice d'inertie de l'1/4 de disque au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$,
4) Déterminer La matrice d'inertie de la plaque rectangulaire au point O dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$,
5) Déduire la matrice d'inertie de l'ensemble Σ au point O et dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

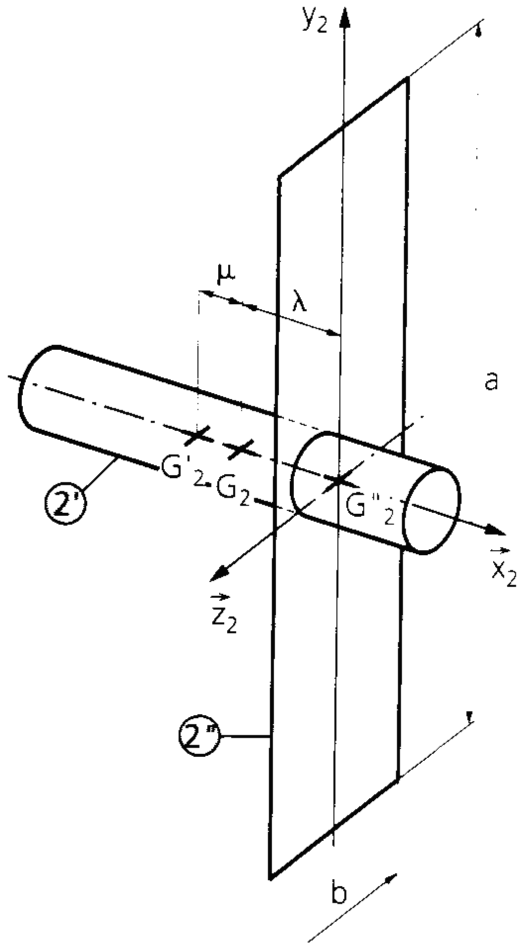
Exercice 2 : (école de l'air)

Les solides 1 et 2 de l'éolienne (figure suivante) sont modélisés par :

- Solide 1 : homogène de masse m_1 et de centre d'inertie en A. Il admet le plan $(A,\vec{x}_1,\vec{z}_1)$ comme plan de symétrie matérielle. Sa matrice d'inertie en A est :

$$I_A(1)=\begin{bmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{bmatrix}_{(x_1,y_1,z_1)}$$

- Solide 2 : homogène de masse m_2 et centre d'inertie G_2. Il est composé de :
  1. Un cylindre plein 2' d'axe $(A,\vec{x}_2)$, de masse m_2', de centre d'inertie G_2' ($\overrightarrow{G_2'G_2}=\mu\vec{x}_2$), de hauteur H et de rayon R ;
  2. Une plaque rectangulaire 2'' de masse m_2'', de centre d'inertie G_2'' $\left(\overrightarrow{G_2G_2''}=\lambda\vec{x}_2\right)$, de côté a suivant $(G_2'',\vec{y}_2)$, de côté b suivant $(G_2'',\vec{z}_2)$ et d'épaisseur négligeable.

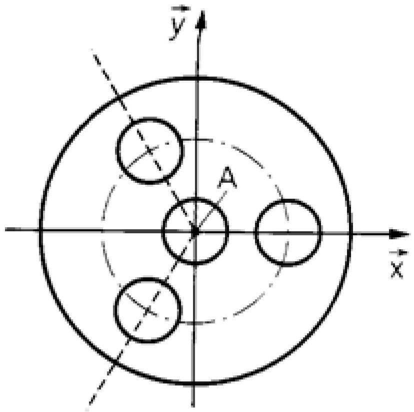


On a $\mu>0, \lambda>0, m_2=m'_2+m''_2$

1) Simplifier la matrice d'inertie $I_A(1)$ connaissant le plan de symétrie ;
2) Déterminer :
   - La relation entre μ et λ ;
   - La matrice d'inertie en G_2' du solide 2' dans la base $(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$;
   - La matrice d'inertie en G_2'' du solide 2'' dans la base $(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$;
   - La matrice d'inertie en G_2 du solide 2 dans la base $(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$;

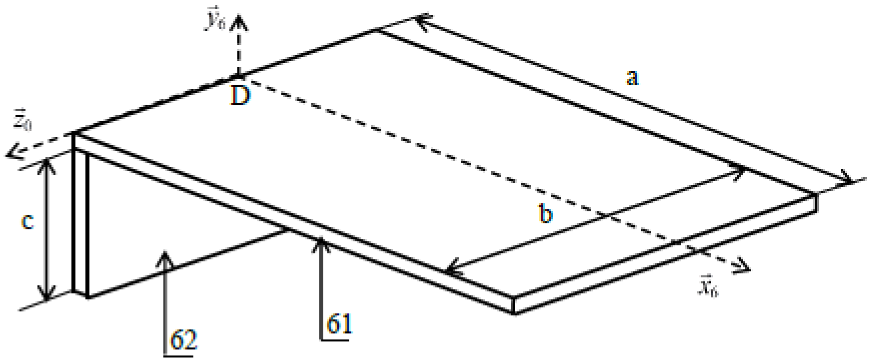
Exercice 3 :

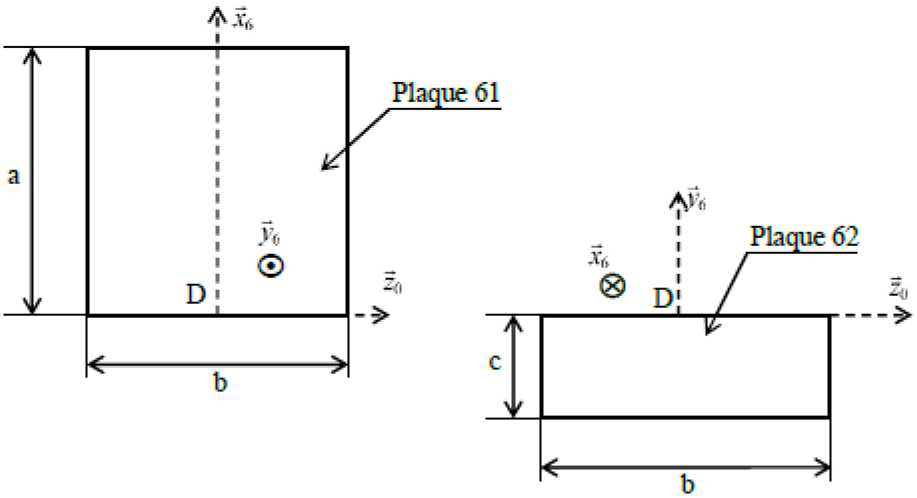
Une roulette (figure suivante) est assimilée à un disque homogène de rayon $5r$ percé de quatre trous de rayon r, l'un centré en A et les trois autres également répartis sur un cercle de rayon $3r$. La masse de la roulette est m. Déterminer son moment d'inertie I_{Az} par rapport à l'axe $(A, \vec{z})$ en fonction de m et r. (Montrer que $I_{Az}(roulette) = 13.5mr^2$)



Exercice 4 :

Le plateau 6 est modélisé par deux plaques (61 et 62) homogènes et d'épaisseurs négligeables. Les deux plaques 61 et 62 présentent la **même masse surfacique σ.**





En se basant sur le modèle géométrique du plateau 6 :

1. Déterminer la position du centre d'inertie du plateau 6 ; $\overrightarrow{DG_6}$

2. La matrice d'inertie du plateau 6 est donnée par la matrice suivante :

$$\left[I_D(6)\right] = \begin{bmatrix} A_6 & 0 & 0 \\ 0 & B_6 & 0 \\ 0 & 0 & C_6 \end{bmatrix}_{R_6}$$; Justifier cette forme.

3. Déterminer la matrice d'inertie de la plaque 61 au point D et dans la base du repère R_6. Les éléments de la matrice seront exprimés en fonction de σ et d'autres données géométriques.

4. Déterminer la matrice d'inertie de la plaque 62 au point D et dans la base du repère R_6. Les éléments de la matrice seront exprimés en fonction de σ et d'autres données géométriques.

5. Déduire le moment d'inertie du plateau 6 par rapport à l'axe $(D, \vec{z}_0)$.

***** Fin *****