Géométrie des masses

1. Centre d'inertie :

1.1. Définition :

Le centre d'inertie d'un système matériel E, de masse m, est le point G défini par :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\int_{P\in E} \overrightarrow{AP}dm, \quad le\ point\ A\ est\ quelconque$$

Dans le cas où le système matériel est homogène, on distingue, selon la répartition de la masse (modèle volumique, surfacique ou linéique), les trois relations suivantes :

Modèle volumique (cube, cylindre, sphère…)	$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{V}\int_{P\in E} \overrightarrow{AP}dv, \quad le\ point\ A\ est\ quelconque$
Modèle surfacique (plaque, disque, sphère creuse…)	$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{S}\int_{P\in E} \overrightarrow{AP}ds, \quad le\ point\ A\ est\ quelconque$
Modèle linéique (tige, cerceau…)	$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{L}\int_{P\in E} \overrightarrow{AP}dl, \quad le\ point\ A\ est\ quelconque$

1.2. Propriétés :

1. Le centre d'inertie est unique pour un système matériel donné,
2. Le centre d'inertie est fixe par rapport à tout repère attacher au système matériel E qui est supposé indéformable.
3. Le centre d'inertie G est tel que : $\int_{P\in E} \overrightarrow{GP}dm = \vec{0}$
4. Si le système matériel E, de masse m et de centre d'inertie G, est constitué par un ensemble de sous-systèmes matériels E_i, de masse m_i et de centre d'inertie G_i, alors le centre d'inertie G du système matériel E est tel que :

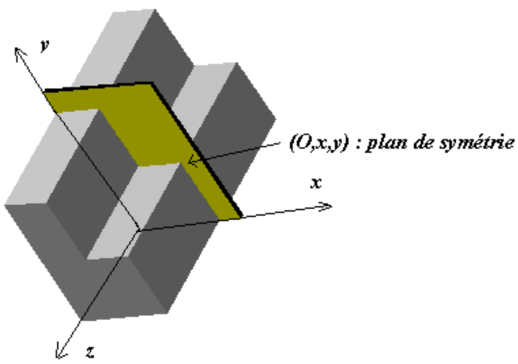
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{\sum_i m_i}\sum_i m_i \overrightarrow{AG_i}$$

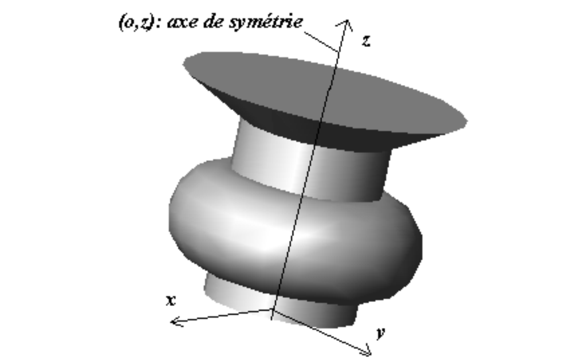
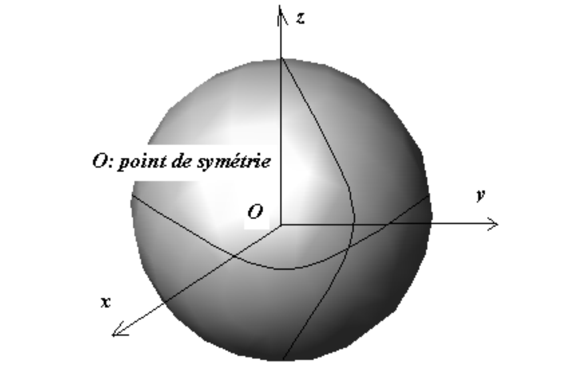
5. Si le système matériel admet un élément de symétrie matérielle (plan, axe ou point) alors le centre d'inertie appartient à cet élément.

Remarque :

On dit qu'il y a une symétrie matérielle, s'il y a simultanément une symétrie géométrique et une symétrie de répartition de la masse.

Le tableau suivant résume l'influence de la symétrie matérielle sur la position du centre d'inertie.

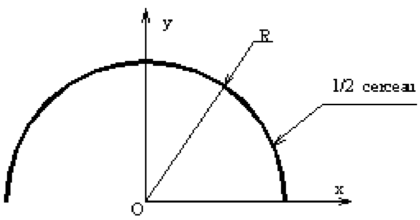
Symétrie par rapport à un plan	
	Le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ est un plan de symétrie, le centre d'inertie G appartient à cet élément de symétrie et par conséquent : $\overrightarrow{OG} = X_G\vec{x} + Y_G\vec{y}$ $Z_G = 0$
Symétrie par rapport à un axe	

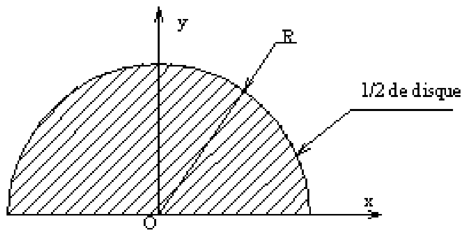
<table>
<tr><td>
</td><td>L'axe $(O,\vec{z})$ est un axe de symétrie, le centre d'inertie G appartient à cet élément de symétrie et par conséquent :
$\overrightarrow{OG} = Z_G\vec{z}$
$X_G = Y_G = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Symétrie par rapport à un point</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Le point O est un point de symétrie, le centre d'inertie G est confondu avec cet élément de symétrie et par conséquent :
$\overrightarrow{OG} = \vec{0}$
$X_G = Y_G = Z_G = 0$</td></tr>
</table>

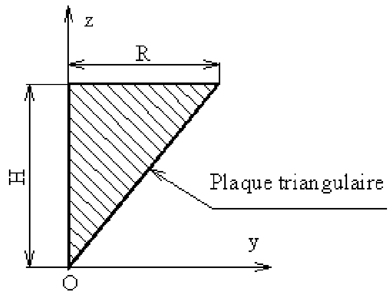
1.3. Applications :

Application 1 :

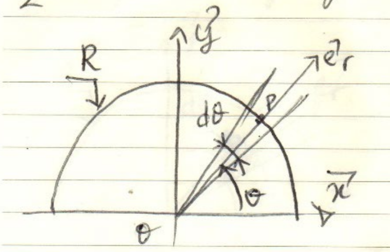
1. Déterminer la position du centre d'inertie des solides suivants qui sont supposés homogènes : ½ disque, ¼ de cerceau.
2. Déterminer la position du centre d'inertie de la plaque triangulaire de côtés R et H







$\frac{1}{2}$ cerceau de rayon R



• (Oy) est un axe de symétrie ⇒ $G \in (O,\vec{y})$

• $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{L}\int_{P\in S} \overrightarrow{OP}\, dl$

$dl = R\, d\theta$

$0 \leq \theta \leq \pi$

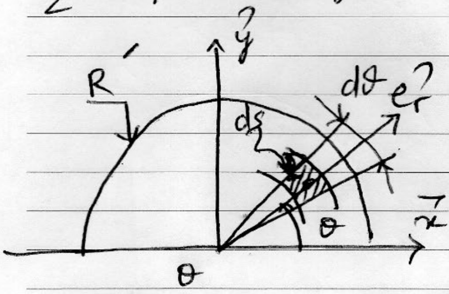
$\overrightarrow{OP} = R\,\vec{e}_r = R(\cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y})$

$L = \pi R$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = Y_G\,\vec{y}$ avec $Y_G = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} R\sin\theta\, R\, d\theta$

$= \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{2R}{\pi}$

$\frac{1}{2}$ disque de rayon R :



$$\vec{OG} = \frac{1}{S}\int \vec{OP}\, ds$$

$$ds = r\,dr\,d\theta$$

$$\vec{OP} = r\vec{e_r} = r(\cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y})$$

avec $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta \leq \pi$

$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$

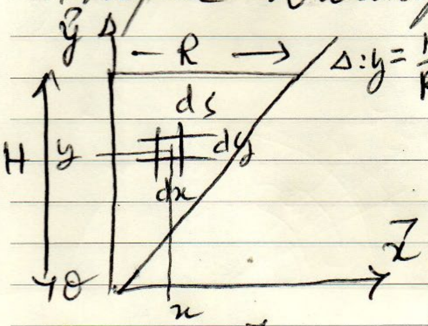
$(O,\vec{y})$ est un axe de symétrie $\Rightarrow G \in (O,\vec{y})$

$$\Rightarrow \vec{OG} = y_G\,\vec{y} \quad \text{avec} \quad y_G = \frac{2}{\pi R^2}\int r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta$$

$$y_G = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\,\frac{R^3}{3}\,2 = \frac{4R}{3\pi}$$

Plaque triangulaire :



$\Delta : y = \frac{H}{R}x$

$$\vec{OG} = \frac{1}{S}\int \vec{OP}\, ds$$

$$ds = dx\,dy, \quad S = \frac{RH}{2}$$

$$\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y}\,;$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \leq x \leq R \\ \frac{H}{R}x \leq y \leq H \end{array}}$$

ou bien.

~~ou bien~~ $\boxed{0 \leq y \leq H \text{ et } 0 \leq x \leq \frac{R}{H}y}$

$$X_G = \frac{2}{RH}\int_0^H \left(\int_0^{\frac{R}{H}y} x\,dx\right) dy = \frac{2}{RH}\int_0^H \frac{R^2}{2H^2}y^2 dy$$

$$= \frac{2}{RH}\,\frac{R^2}{2H^2}\,\frac{H^3}{3} = \frac{R}{3}$$

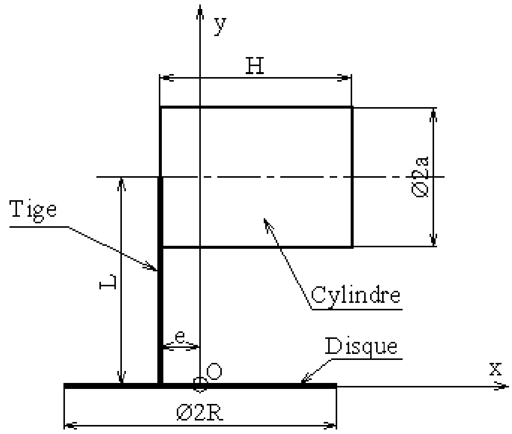
$$Y_G = \frac{2}{RH}\int_0^H \left(\int_0^{\frac{R}{H}y} dx\right) y\,dy = \frac{2}{RH}\int_0^H \frac{R}{H}y^2 dy$$

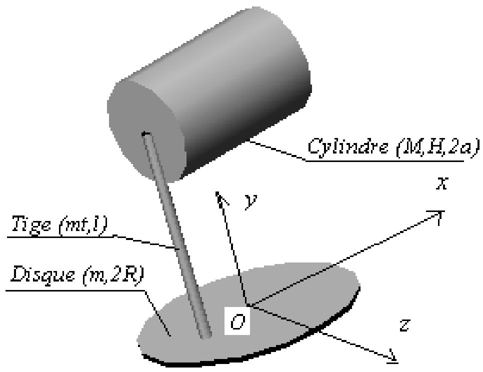
$$= \frac{2}{RH}\,\frac{R}{H}\,\frac{H^3}{3} = \frac{2}{3}H$$

Application 2 :

Déterminer la position du centre d'inertie de l'ensemble S formé par les solides homogènes suivants :

- Un disque de masse m et de rayon R,
- Une tige de masse m_t et de longueur l,
- Un cylindre de masse M, de hauteur H et de rayon de cercle de base r





$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \vec{OG_i} =$$

$$= \frac{1}{(m+m_t+M)} \left(m\vec{OO} + m_t \vec{OG_t} + M\vec{OG_c} \right)$$

$$\vec{OG_t} = \begin{pmatrix} -e \\ L/2 \\ 0 \end{pmatrix}_R \quad \text{et} \quad \vec{OG_c} = \begin{pmatrix} -e + \frac{H}{2} \\ L \\ 0 \end{pmatrix}_R$$

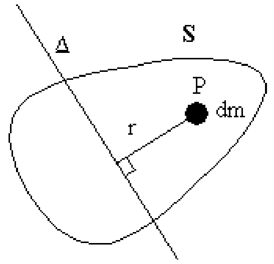
$$\Rightarrow \vec{OG} = \frac{1}{m+m_t+M} \left(m_t \begin{pmatrix} -e \\ \frac{L}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} \frac{H}{2} - e \\ L \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{m_t+m+M} \begin{pmatrix} -m_t e + M\left(\frac{H}{2} - e\right) \\ m_t \frac{L}{2} + ML \\ 0 \end{pmatrix}_R$$

2. Moment d'inertie d'un solide :

2.1. Définition :

Le moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe Δ est le scalaire suivant :

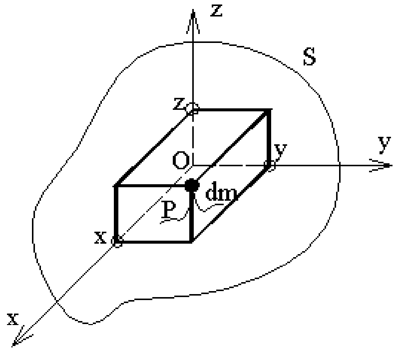


$$I(S/\Delta) = \int_{P\in S} r^2 dm$$

2.2. Moments d'inertie par rapport aux axes d'un repère

Les moments d'inertie du solide (S) par rapport aux trois axes du repère sont regroupés dans le tableau suivant :

Moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\vec{X})$	$A = \int_{p\in S} (y^2+z^2)dm$
Moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\vec{Y})$	$B = \int_{p\in S} (z^2+x^2)dm$
Moment d'inertie par rapport à l'axe $(O,\vec{Z})$	$C = \int_{p\in S} (x^2+y^2)dm$



2.3. Produits d'inertie par rapport aux axes d'un repère

Les produits d'inertie du solide (S) par rapport aux axes du repère sont regroupés dans le tableau suivant :

Produit d'inertie par rapport à l'axe $(O,\vec{Y})et(O,\vec{Z})$	$D = \int_{p\in S} yzdm$
Produit d'inertie par rapport à l'axe $(O,\vec{Z})et(O,\vec{X})$	$E = \int_{p\in S} zxdm$
Produit d'inertie par rapport à l'axe $(O,\vec{X})et(O,\vec{Y})$	$F = \int_{p\in S} xydm$

3. Opérateur d'inertie d'un solide :

3.1. Définition

L'opérateur d'inertie d'un solide (S), en un point O, est l'opérateur linéaire qui à tout vecteur $\vec{u}$ fait correspondre le vecteur :

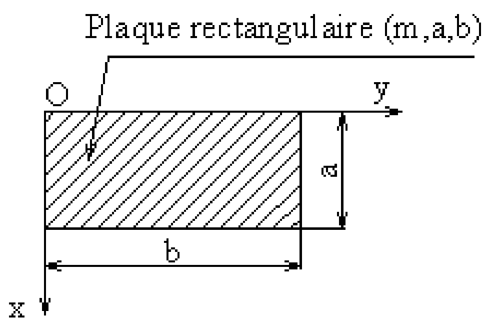
$$I_O(S)\vec{u} = \int_{P\in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP})dm.$$

3.2. Matrice d'inertie

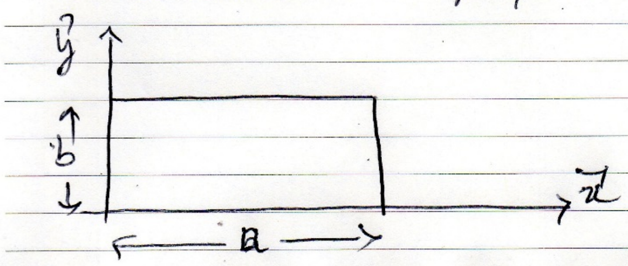
La matrice d'inertie du solide (S), au point O, dans la base $(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ s'écrit avec les notations définies précédemment par : $[I_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$

3.4. Application : Plaque rectangulaire

Déterminer au point O, dans la base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, la matrice d'inertie d'une plaque rectangulaire de masse m et de cotés a et b.



Matrice d'inertie d'une plaque rectangulaire



$$A = \int (y^2+z^2)\,dm = \int y^2\,dm \ ; \ z=0$$

$$B = \int x^2\,dm$$

$$C = \int (x^2+y^2)\,dm = A+B$$

$$dm = \sigma\,ds = \frac{m}{ab}\,dx\,dy \quad \text{avec} \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \end{cases}$$

$$A = \frac{m}{ab}\int y^2\,dx\,dy = \frac{m}{ab}\int_0^a dx \int_0^b y^2\,dy = \frac{mb^2}{3}$$

$$B = \frac{ma^2}{3} \Rightarrow C = \frac{m(a^2+b^2)}{3}$$

$$D = \int yz\,dm = 0 \ ; \ E = \int xz\,dm = 0$$

$$F = \int xy\,dm = \frac{m}{ab}\int_0^a x\,dx \int_0^b y\,dy = \frac{m}{ab}\,\frac{a^2}{2}\,\frac{b^2}{2} = \frac{mab}{4}$$

D'où la matrice d'inertie est la suivante:

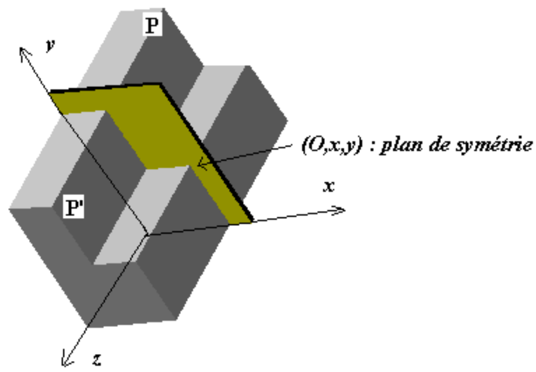
$$[I_O(S)] = \begin{bmatrix} \frac{mb^2}{3} & -\frac{mab}{4} & 0 \\ -\frac{mab}{4} & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{3} \end{bmatrix}_R$$

5. Influence de la symétrie matérielle sur la matrice d'inertie:

5.1. Symétrie matérielle par rapport à un plan :

- Le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ est un plan de symétrie matérielle.
- Pour un point P(x,y,z) de masse dm, il existe un point P'(x,y,-z) de masse dm

- $E = \int\limits_{P\in S} zx\,dm = 0$ car $\int\limits_{P\in S/z\ge 0} zx\,dm = -\int\limits_{P\in S/z\le 0} zx\,dm$
- $D = \int\limits_{P\in S} yz\,dm = 0$ car $\int\limits_{P\in S/z\ge 0} yz\,dm = -\int\limits_{P\in S/z\le 0} yz\,dm$
- L'axe $(O,\vec{z})$ est un axe principal d'inertie
- C : moment principal d'inertie

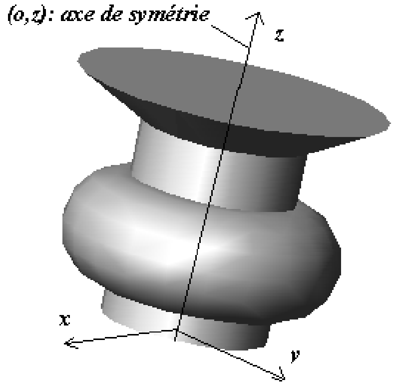


- La matrice d'inertie a pour forme : $\left[I_O(S)\right]=\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
- Le tableau suivant donne une idée sur l'influence de la symétrie des deux autres plans sur la forme de la matrice d'inertie

Le plan $(O,\vec{y},\vec{z})$ est un plan de symétrie	Le plan $(O,\vec{x},\vec{z})$ est un plan de symétrie
$\left[I_O(S)\right]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ ▪ L'axe $(O,\vec{x})$ est principal d'inertie ▪ A est un moment principal d'inertie	$\left[I_O(S)\right]=\begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$ ▪ L'axe $(O,\vec{y})$ est principal d'inertie ▪ B est un moment principal d'inertie

5.2. Symétrie matérielle par rapport à un axe :

L'axe $(O,\vec{z})$ est un axe de symétrie matérielle.

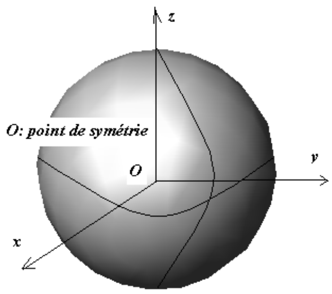


- Le plan $(O,\vec{y},\vec{z})$ est un plan de symétrie matérielle donc : *E=F=0*
- Le plan $(O,\vec{x},\vec{z})$ est un plan de symétrie matérielle donc : *D=F=0*
- L'axe $(O,\vec{x})$ et l'axe $(O,\vec{y})$ jouent le même rôle, donc, *A=B*
- La matrice d'inertie est : $\left[I_O(S)\right]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$
- La base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est une base principale d'inertie
- Le tableau suivant donne une idée sur l'influence de la symétrie des deux autres axes sur la forme de la matrice d'inertie

Symétrie par rapport à l'axe $(O,\vec{x})$	Symétrie par rapport à l'axe $(O,\vec{y})$
$\left[I_O(S)\right]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$	$\left[I_O(S)\right]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$

5.3. Symétrie matérielle par rapport à un point :

On a trois plans de symétrie : $(O,\vec{y},\vec{z})$, $(O,\vec{x},\vec{z})$ et $(O,\vec{x},\vec{y})$

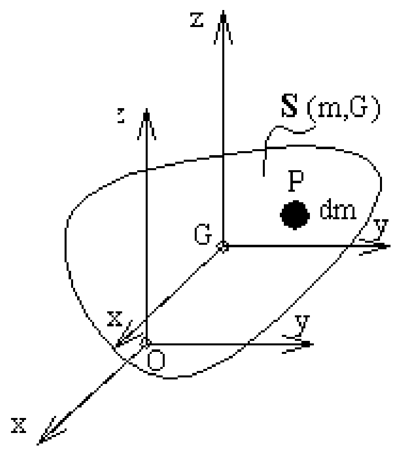


- Les trois axes du repère jouent le même rôle : A=B=C
- Les produits d'inerties sont tous nuls et les moments d'inerties sont tous égaux
- La matrice d'inertie est : $\left[I_O(S)\right]=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})}$; c'est une matrice d'inertie sphérique

6. Théorème de Hyguens:

Soient (S) un solide auquel est lié le repère $R\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ et G son centre d'inertie. On a :

$$\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}$$



$$\left[I_O(S)\right]=\begin{bmatrix} A_O & -F_O & -E_O \\ -F_O & B_O & -D_O \\ -E_O & -D_O & C_O \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad et \quad \left[I_G(S)\right]=\begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Les relations entre les éléments de la matrice d'inertie au point O et les éléments de la matrice d'inertie au point G sont donnés comme suit :

$$A_O = A_G + m\left(y_G^{\ 2} + z_G^{\ 2}\right) \qquad D_O = D_G + my_G z_G$$

$$B_O = B_G + m\left(x_G^{\ 2} + z_G^{\ 2}\right) \qquad E_O = E_G + mx_G z_G$$

$$C_O = C_G + m\left(x_G^{\ 2} + y_G^{\ 2}\right) \qquad F_O = F_G + mx_G y_G$$

Fin