Energétique des solides indéformables
Théorème de l'énergie cinétique

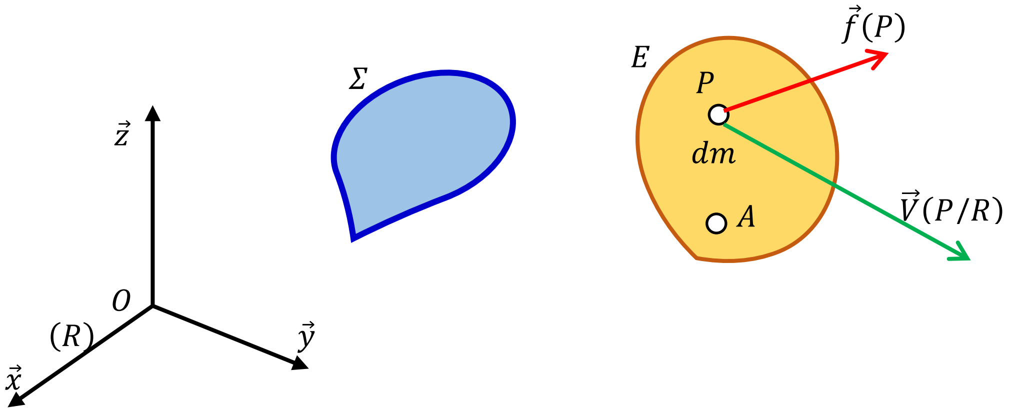
1. Puissance

1.1. Puissance développée par une action mécanique extérieure à un système matériel E dans son mouvement par rapport à un repère R

1.1.1. Définition

La puissance développée, à la date t, par l'action mécanique de Σ sur E dans son mouvement par rapport à R est :

$$P(\Sigma \to E/R) = \int_{P \in E} \vec{f}(P).\vec{V}(P/R)dm$$



1.1.2. Cas d'un solide

Pour le cas d'un solide, on peut écrire : $\vec{V}(P/R) = \vec{V}(P \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$

D'où $P(\Sigma \to S/R) = \int_{P \in S} \vec{f}(P).\vec{V}(P \in S/R)dm = \int_{P \in S} \vec{f}(P).\left(\vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}\right)dm$

Soit $P(\Sigma \to S/R) = \int_{P \in S} \vec{f}(P).\vec{V}(A \in S/R)dm + \int_{P \in S} \vec{f}(P).\left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}\right)dm$

Ou bien $P(\Sigma \to S/R) = \vec{V}(A \in S/R).\int_{P \in S} \vec{f}(P)dm + \vec{\Omega}(S/R).\int_{P \in S'} \left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{f}(P)\right) dm$

Or le torseur d'action mécanique de Σ sur S est donné par :

$$\{F(\Sigma \to S)\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \vec{R}(\Sigma \to S) \\ \vec{M}_A(\Sigma \to S) \end{matrix}\right\} \text{ avec } \left\{\begin{matrix} \vec{R}(\Sigma \to S) = \int_{P \in S} \vec{f}(P)dm \\ \vec{M}_A(\Sigma \to S) = \int_{P \in S'} \left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{f}(P)\right) dm \end{matrix}\right.$$

D'où $P(\Sigma \to S/R) = \vec{V}(A \in S/R).\vec{R}(\Sigma \to S) + \vec{\Omega}(S/R).\vec{M}_A(\Sigma \to S)$

Soit finalement : $P(\Sigma \to S/R) = \{F(\Sigma \to S)\}_A \{\vartheta(S/R)\}_A$

La puissance développée par l'action mécanique du système matériel Σ sur le solide S est donnée par :

$$\boldsymbol{P(\Sigma \to S/R) = \{F(\Sigma \to S)\}_A \{\vartheta(S/R)\}_A}$$

Remarque

La puissance développée par une action mécanique extérieure dépend du repère choisi, en effet, on a :

- $P(\Sigma \to E/R) = \int_{P \in E} \vec{f}(P).\vec{V}(P/R)dm$
- $P(\Sigma \to E/R_1) = \int_{P \in E} \vec{f}(P).\vec{V}(P/R_1)dm$

$$P(\Sigma \to E/R) - P(\Sigma \to E/R_1) = \int_{P \in E} \vec{f}(P).\left(\vec{V}(P/R) - \vec{V}(P/R_1)\right) dm = \int_{P \in E} \vec{f}(P).\vec{V}(P \in R_1/R)dm$$

Soit finalement, on peut déduire :

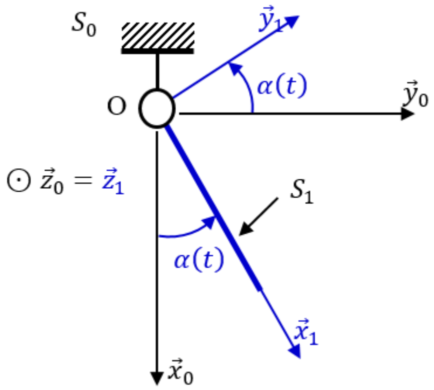
$P(\Sigma \to E/R) - P(\Sigma \to E/R_1) = \{F(\Sigma \to E)\}_A \{\vartheta(R_1/R)\}_A$

La puissance développée par une action mécanique extérieure dépend du repère choisi.

$$P(\Sigma \to E/R) - P(\Sigma \to E/R_1) = \{F(\Sigma \to E)\}_A \{\vartheta(R_1/R)\}_A$$

Application : Bras de robot

Un robot est composé d'un seul bras S_1 articulé au point O par rapport au bâti S_0.



Données

- Le bras S_1est de masse m_1 et de centre d'inertie G_1 tel que $\overrightarrow{OG_1} = a\vec{x}_1$;
- La liaison pivot $(O, \vec{z}_0)$ est parfaite ;
- Le champ de la pesanteur est modélisé par $\vec{g} = g\vec{x}_0$
- Un servomoteur exerce un couple moteur $\vec{C}_m = C_m\vec{z}_0$ sur le bras S_1

Question

Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures au bras (1) dans son mouvement par rapport au repère R_0.

Réponse

$$P(\bar{S}_1 \to S_1 / R_0) = P(S_0 \to S_1 / R_0) + P(\text{moteur} \to S_1/R_0) + P(\vec{g} \to S_1 / R_0)$$

- $$P(S_0 \to S_1 / R_0) = \left\{F(S_0 \to S_1)\right\}_O \otimes \left\{\mathcal{V}(S_1/R_0)\right\}_O$$

$$= {}_O\left\{\begin{array}{c|c} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{array}\right\}_{R_0} \otimes {}_O\left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{array}\right\}_{R_0} = 0$$

- $$P(\text{moteur} \to S_1/R_0) = \left\{F(\text{mot} \to S_1)\right\}_O \otimes \left\{\mathcal{V}(S_1/R_0)\right\}_O$$

$$= {}_O\left\{\begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m\vec{z}_0 \end{array}\right\} \otimes {}_O\left\{\begin{array}{c} \dot{\alpha}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array}\right\} = C_m\dot{\alpha}$$

- $$P(\vec{g} \to S_1/R_0) = \left\{F(\vec{g} \to S_1)\right\}_O \otimes \left\{\mathcal{V}(S_1/R_0)\right\}_O$$

$$= {}_O\left\{\begin{array}{c} m_1 g\vec{x}_0 \\ \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1 g\vec{x}_0 \end{array}\right\} \otimes {}_O\left\{\begin{array}{c} \dot{\alpha}\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array}\right\}$$

$$P(\vec{g} \rightarrow S_1/R_0) = \left\{ \begin{matrix} m_1 g \vec{x}_0 \\ -m_1 a g \sin\alpha \, \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_O \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$$

$$= -m_1 a g \dot{\alpha} \sin\alpha$$

$$P(\bar{S}_1 \rightarrow S_1/R_0) = (C_m - m_1 a g \sin\alpha)\, \dot{\alpha}$$

NB : On peut exprimer les deux torseurs au point G afin de calculer $P(\vec{g} \rightarrow S_1/R_0)$

$$P(\vec{g} \rightarrow S_1/R_0) = \left\{ \begin{matrix} m_1 g \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ a \dot{\alpha} \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_G$$

$$= -m_1 g a \dot{\alpha} \sin\alpha$$

1.2. Puissance développée par les actions mutuelles entre deux systèmes matériels

1.2.1. Définition

La puissance développée, à la date t, par les actions mutuelles entre les deux systèmes matériels Σ et E, dans leurs mouvements par rapport à un repère R est :

$$\boldsymbol{P(\Sigma \leftrightarrow E/R) = P(\Sigma \rightarrow E/R) + P(E \rightarrow \Sigma/R)}$$

Remarque

La puissance développée par les actions mutuelles entre les deux systèmes matériels Σ et E est indépendante du repère R par rapport auquel les deux systèmes sont en mouvement.

En effet, on a:

$P(\Sigma \rightarrow E/R) - P(\Sigma \rightarrow E/R_1) = \{F(\Sigma \rightarrow E)\}_A \{\vartheta(R_1/R)\}_A$ (*)

$P(E \rightarrow \Sigma/R) - P(E \rightarrow \Sigma/R_1) = \{F(E \rightarrow \Sigma)\}_A \{\vartheta(R_1/R)\}_A$ (**)

D'où :

(*)+(**) ➔ $P(\Sigma \leftrightarrow E/R) - P(E \leftrightarrow \Sigma/R) = \{\vartheta(R_1/R)\}_A \left(\{F(\Sigma \rightarrow E)\}_A + \{F(E \rightarrow \Sigma)\}_A\right)$

Soit finalement :

$P(\Sigma \leftrightarrow E/R) - P(E \leftrightarrow \Sigma/R_1) = 0$ et donc la puissance développée par les actions mutuelles ne dépend pas du repère choisi.

Conclusion

La puissance développée par les actions mutuelles ne dépend pas du repère choisi.

$$P(\Sigma \leftrightarrow E/R) = P(E \leftrightarrow \Sigma/R_1)$$

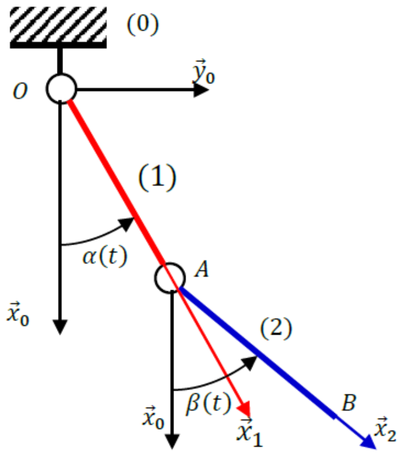
Pour cela, pour noter la puissance développée par les actions mutuelles entre les deux systèmes matériels Σ et E, on adopte la notation suivante :

$$P(\Sigma \leftrightarrow E)$$

Le choix du repère reste libre

Application : Robot à deux bras

On donne le schéma cinématique qui modélise un robot à deux bras. On demande de calculer les puissances développées par les actions mutuelles suivantes : $P(1 \leftrightarrow 2)$ et $P(0 \leftrightarrow 1)$



Réponse

<u>Calcul de $P(1 \leftrightarrow 2)$:</u>
Première réponse possible : $P(1 \leftrightarrow 2) = P(1 \to 2/0) + P(2 \to 1/0)$
Deuxième réponse possible : $P(1 \leftrightarrow 2) = P(1 \to 2/1) + P(2 \to 1/1) = P(1 \to 2/1)$
Première réponse possible : $P(1 \leftrightarrow 2) = P(1 \to 2/2) + P(2 \to 1/2) = P(2 \to 1/2)$
<u>Calcul de $P(0 \leftrightarrow 1)$:</u>
On remarque que : $P(0 \leftrightarrow 1) = P(0 \to 1/0)$

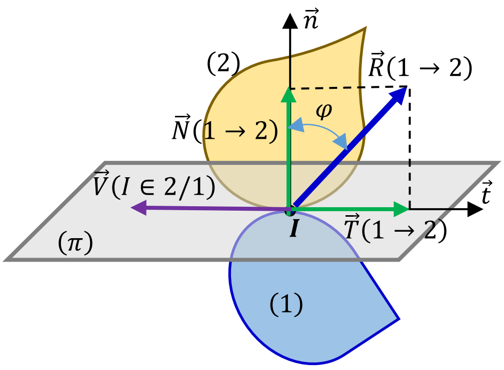
1.3. Liaison parfaite entre deux solides d'un point de vue énergétique

1.3.1 : Définition

Deux solides 1 et 2 ont une liaison parfaite, d'un point de vue énergétique, si quel que soit le mouvement autorisé par la liaison, la puissance des actions mutuelles entre les solides 1 et 2 est nulle :

$$P(1 \leftrightarrow 2) = 0$$

1.3.2. Cas d'une liaison ponctuelle



Le contact est supposé rigoureusement ponctuel.

- Le torseur d'actions mécaniques du solde 1 sur le solide 2 est de la forme, au point A :

$\{F(1 \to 2)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \to 2) = \vec{N}(1 \to 2) + \vec{T}(1 \to 2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ avec $\|\vec{T}(1 \to 2)\| = f\|\vec{N}(1 \to 2)\|$ et f représente le coefficient de frottement. D'après la loi de coulomb, $f = \tan\varphi$ avec φ est l'angle de frottement

- Le torseur cinématique de 2 par rapport à 1 au point I est donné par :

$\{\vartheta(2/1)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(I \in 2/1) \end{Bmatrix}$ avec $\vec{V}(I \in 2/1)$ est la vitesse de glissement de 2 par rapport à 1 au point I.

- Déterminer la puissance développée par les actions mutuelles entre les solides (1) et (2) ;
- Sous quelle(s) condition(s) cette puissance est nulle ?

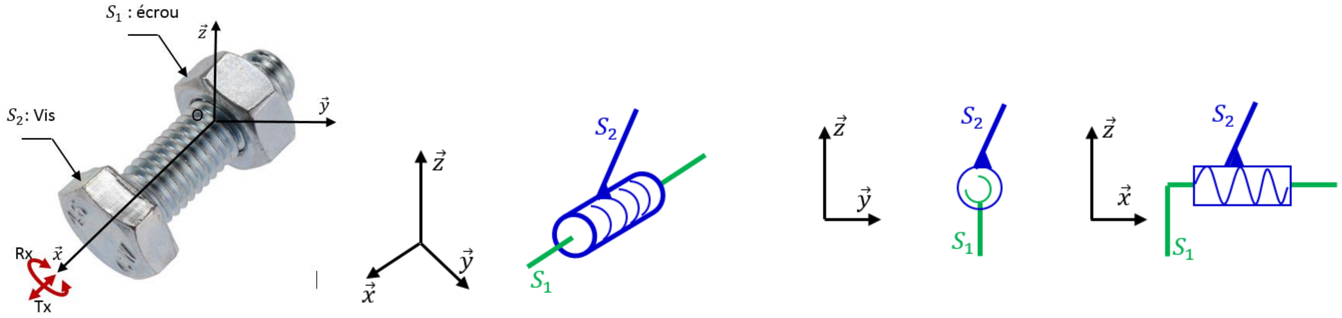
Réponse

$P(1 \leftrightarrow 2) = P(1 \to 2/1) = \{F(1 \to 2)\}_I \otimes \{\vartheta(2/1)\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \to 2) = \vec{N}(1 \to 2) + \vec{T}(1 \to 2) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/1) \\ \vec{V}(I \in 2/1) \end{Bmatrix}$

$P(1 \leftrightarrow 2) = \vec{R}(1 \to 2).\vec{V}(I \in 2/1) = \vec{T}(1 \to 2).\vec{V}(I \in 2/1)$
La puissance mutuelle est nulle, $P(1 \leftrightarrow 2) = 0$, dans deux situations

- $\vec{T}(1 \rightarrow 2) = \vec{0}$, c-à-d, $f = 0$; La liaison ponctuelle est parfaite
- $\vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}$; condition de roulement sans glissement (C.R.S.G)

1.3.3. Cas d'une liaison hélicoïdale



Pour la liaison hélicoïdale d'axe $\vec{x}$, le torseur cinématique est donné par :

$$\{\vartheta(S_2/S_1)\}_O = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{Avec : } \begin{cases} v_x = +\frac{pas}{2\pi}\omega_x \; si\ le\ filetage\ est\ à\ droite \\ v_x = -\frac{pas}{2\pi}\omega_x \; si\ le\ filetage\ est\ à\ gauche \end{cases}$$

Le torseur statique est donné par :

$$\{\mathcal{F}(S_1 \rightarrow S_2)\}_O = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

En se basant sur la propriété d'une liaison parfaite d'un point de vue énergétique, démontrer que pour le torseur statique on a :

$$\begin{cases} L_{12} = -\frac{pas}{2\pi}X_{12} \; si\ le\ filetage\ est\ à\ droite \\ L_{12} = +\frac{pas}{2\pi}X_{12} \; si\ le\ filetage\ est\ à\ gauche \end{cases}$$

Réponse

La liaison hélicoïdale est supposée parfaite, donc : $P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0$

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \rightarrow S_2/S_1) = \{F(S_1 \rightarrow S_2)\}_O \otimes \{\vartheta(S_2/S_1)\}_O = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \otimes \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = L_{12}\omega_x + X_{12}v_x = 0 \Rightarrow L_{12} = -\frac{v_x}{\omega_x}X_{12}$$

Or, $\begin{cases} v_x = +\frac{pas}{2\pi}\omega_x \; si\ le\ filetage\ est\ à\ droite \\ v_x = -\frac{pas}{2\pi}\omega_x \; si\ le\ filetage\ est\ à\ gauche \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} L_{12} = -\frac{pas}{2\pi}X_{12} \; si\ le\ filetage\ est\ à\ droite \\ L_{12} = +\frac{pas}{2\pi}X_{12} \; si\ le\ filetage\ est\ à\ gauche \end{cases}$

2. Théorème de l'énergie cinétique

2.1. Cas d'un seul solide

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide S, dans son mouvement par rapport à un repère supposé galiléen R_g est donné par :

$$\{D(S/R_g)\}_A = \{F(\bar{S} \longrightarrow S)\}_A$$

Cela permet d'écrire aussi :

$$\{D(S/R_g)\}_A \otimes \{\vartheta(S/R_g)\}_A = \{F(\bar{S} \longrightarrow S)\}_A \otimes \{\vartheta(S/R_g)\}_A = P(\bar{S} \rightarrow S/R_g)$$

Avec :

$$\{D(S/R_g)\}_A = \begin{Bmatrix} \int \vec{\Gamma}(P \in S/R_g)dm \\ \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R_g)dm \end{Bmatrix} \text{ et } \{\vartheta(S/R_g)\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R_g) \\ \vec{V}(A \in S/R_g) \end{Bmatrix}$$

$$P(\bar{S} \rightarrow S/R_g) = \int \vec{V}(A \in S/R_g).\vec{\Gamma}(P \in S/R_g)dm + \vec{\Omega}(S/R_g).\int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/R_g)dm$$

Or $\vec{V}(A \in S/R_g) = \vec{V}(P \in S/R_g) + \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Omega}(S/R_g)$
Donc :
$P(\bar{S} \to S/R_g) = \int \vec{V}(P \in S/R_g).\vec{\Gamma}(P \in S/R_g)dm - \vec{\Omega}(S/R_g).\int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/R_g)dm + \vec{\Omega}(S/R_g).\int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P \in S/R_g)dm$
Soit encore :
$P(\bar{S} \to S/R_g) = \int \vec{V}(P \in S/R_g).\vec{\Gamma}(P \in S/R_g)dm = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int \vec{V}(P \in S/R_g)^2 dm\right) = \frac{d}{dt}\left(E_c(S/R_g)\right)$
D'où finalement, pour le cas d'un seul solide :
$\frac{d}{dt}\left(E_c(S/R_g)\right) = P(\bar{S} \to S/R_g)$

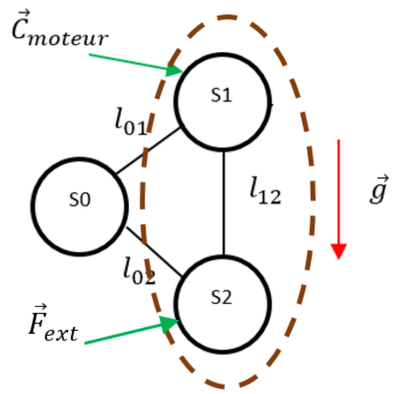
Théorème :
La dérivée, par rapport au temps, de l'énergie cinétique du solide S dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_g est égal à la puissance des actions mécaniques extérieures à S dans son mouvement par rapport à R_g.

$$\frac{d}{dt}\left(E_c(S/R_g)\right) = P(\bar{S} \to S/R_g)$$

2.2. Cas d'un ensemble de solides

2.2.1. Etude de cas

Soit $E = \{S_1, S_2\}$



$\frac{d}{dt}\left(E_c(E/R_g)\right) = \frac{d}{dt}\left(E_c(S_1/R_g)\right) + \frac{d}{dt}\left(E_c(S_2/R_g)\right)$

- $\frac{d}{dt}\left(E_c(S_1/R_g)\right) = P(\bar{S}_1 \to S_1/R_g) = \boldsymbol{P(moteur \to S_1/R_g) + P(\vec{g} \to S_1/R_g) + P(S_0 \to S_1/R_g) + P(S_2 \to S_1/R_g)}$
- $\frac{d}{dt}\left(E_c(S_2/R_g)\right) = P(\bar{S}_2 \to S_2/R_g) = \boldsymbol{P\left(\vec{F}_{ext} \to S_2/R_g\right) + P(\vec{g} \to S_2/R_g) + P(S_0 \to S_2/R_g) + P(S_1 \to S_2/R_g)}$

Or :

- $\boldsymbol{P(S_1 \to S_2/R_g) + P(S_2 \to S_1/R_g) = P(S_2 \leftrightarrow S_1) = P(int \text{ à } \Sigma)}$
- $\boldsymbol{P(moteur \to S_1/R_g) + P(\vec{g} \to S_1/R_g) + P(S_0 \to S_1/R_g) + P\left(\vec{F}_{ext} \to S_2/R_g\right) + P(\vec{g} \to S_2/R_g) + P(S_0 \to S_2/R_g) = P(\bar{E} \to E/R_g)}$

Soit finalement :

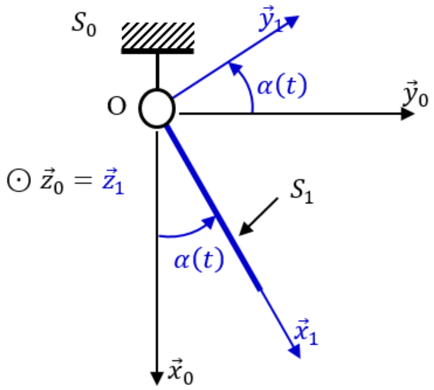
$\frac{d}{dt}\left(E_c(E/R_g)\right) = \boldsymbol{P(\bar{E} \to E/R_g) + P(int \text{ à } E)}$

Généralisation : $E = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$
La dérivée, par rapport au temps, de l'énergie cinétique d'un système matériel E dans son mouvement par rapport au repère galiléen R_g est égale à la puissance développée par les actions mécaniques extérieures à E dans son mouvement par rapport à R_g et la puissance développée par les actions mutuelles entre les solides qui constituent E.

$$\boldsymbol{\frac{dT(E/R_g)}{dt} = P(\bar{E} \to E/R_g) + P(int \text{ à } E) \text{ avec } P(int \text{ à } E) = \sum_{\substack{i=j=1 \\ i<j}}^{n} P(S_i \leftrightarrow S_j)}$$

Application : Bras de robot

Un robot est composé d'un seul bras S_1 articulé au point O par rapport au bâti S_0.

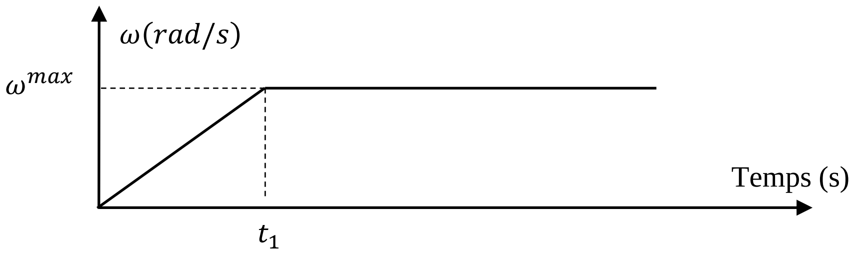


Données

- Le bras S_1 est de masse m_1 et de matrice d'inertie $[I_O(S_1)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_1}$
- La liaison pivot $(O, \vec{z}_0)$ est parfaite ;
- Le champ de la pesanteur est modélisé par $\vec{g} = g\vec{x}_0$
- Un servomoteur exerce un couple moteur $\vec{C}_m = C_m\vec{z}_0$ sur le bras S_1
- Le repère R_0 est supposé galiléen,

Question

1. Déterminer l'énergie cinétique du bras S_1 dans son mouvement par rapport à R_0
2. Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures au bras S_1 dans son mouvement par rapport au repère R_0.
3. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'expression du couple moteur en fonction des données du problème.
4. Sachant que la loi de commande du moteur est donnée par la figure suivante, déterminer l'expression du couple moteur C_m pour les deux phases de fonctionnement : $t \le t_1$ et $t > t_1$



Réponse

1°. $E_c(S_1|R_0) = \frac{1}{2} C \dot{\alpha}^2$

2°. $P(\bar{S}_1 \to S_1|R_0) = (C_m - m_1 a g \sin\alpha)\dot{\alpha}$

3°. $\frac{d}{dt} E_c(S_1|R_0) = P(\bar{S}_1 \to S_1|R_0)$

$C\cancel{\dot{\alpha}}\ddot{\alpha} = (C_m - m_1 a g \sin\alpha)\cancel{\dot{\alpha}}$

$\Rightarrow C_m = C\ddot{\alpha} + m_1 a g \sin\alpha$

4°. $\dot{\alpha}(t) = \omega(t) \Rightarrow \ddot{\alpha}(t) = \dfrac{d\omega(t)}{dt}$

Si $t \leq t_1 \Rightarrow \ddot{\alpha}(t) = \dfrac{\omega^{max}}{t_1}$

$$\Rightarrow C_m = \frac{C\,\omega^{max}}{t_1} + m_1 a g \sin\alpha$$

Si $t > t_1 \Rightarrow \ddot{\alpha}(t) = 0$

$$\Rightarrow C_m = m_1 a g \sin\alpha.$$

*** Fin ***