

# Energétique des solides indéformables

---

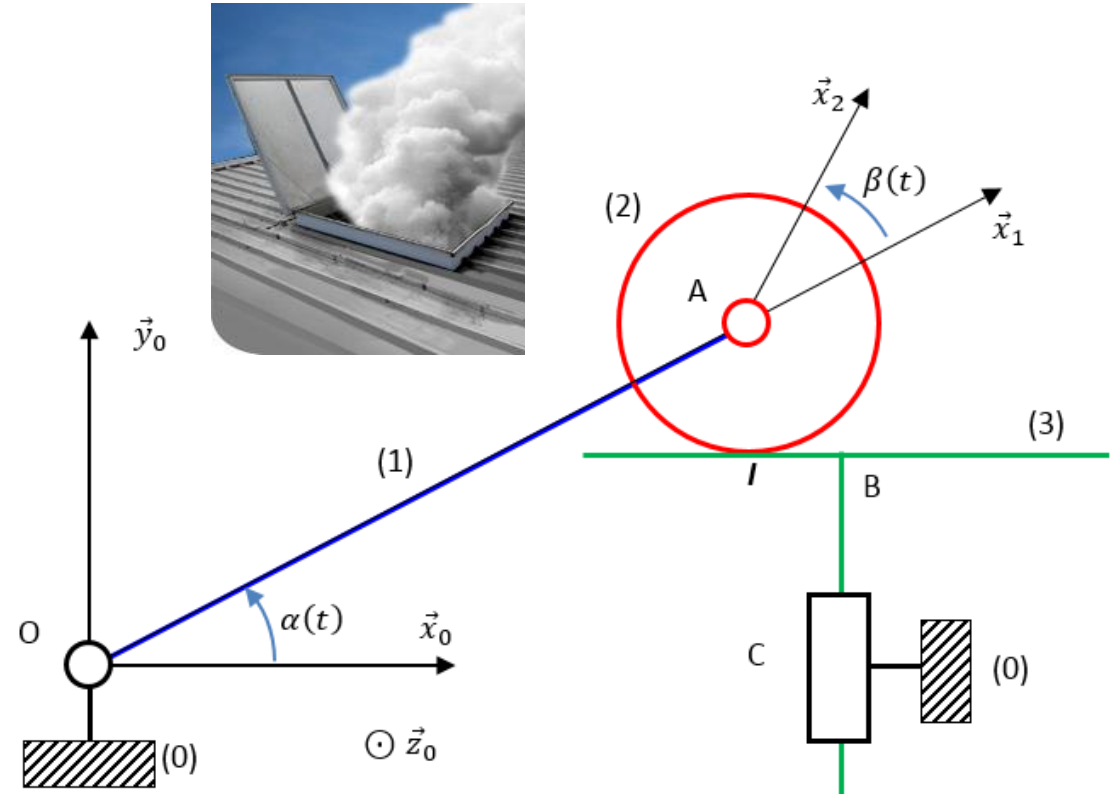
LEFI ABDELLAOUI: INGÉNIEUR DOCTEUR AGRÉGÉ EN GÉNIE MÉCANIQUE

**IPEIB 2020**

# Exercice 1. Mécanisme d'ouverture d'une trappe de désenfumage

Le mécanisme utilisé pour l'ouverture est composé de :

- Un bâti (0) lié au repère  $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , supposé galiléen.
- Un bras (1), en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti (0), lié au repère  $R_1(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$  tel que  $\alpha(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
- Une roulette (2), assimilée à un disque de rayon  $R$  et de centre  $A$ , en liaison picot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$  avec le bras (1) et lié au repère  $R_2(0, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$  tel que  $\beta(t) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$
- Un plateau (3), en liaison glissière d'axe  $(C, \vec{y}_0)$  avec le bat (0) et en liaison ponctuelle de normale  $(I, \vec{y}_0)$  au point de contact  $I$  avec la roulette (2). Le contact au point  $I$  est maintenu avec un ressort non représenté.



On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,

$\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

Déterminer  $\vec{\Omega}(1/0)$ ,  $\vec{\Omega}(2/0)$ ,  $\vec{\Omega}(3/0)$  et Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I de la roulette 2 par rapport au plateau 3.

$$1. \vec{\Omega}(1/0) = \dot{\alpha}(t) \vec{z}_0, \quad \vec{\Omega}(2/0) = (\dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)) \vec{z}_0 \text{ et } \vec{\Omega}(3/0) = \vec{0}$$

$$2. \vec{v}(I \in 2/3) = \vec{v}(I \in 2/0) - \vec{v}(I \in 3/0)$$

$$\bullet \vec{v}(I \in 2/0) = \vec{v}(A \in 2/0) + \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{AI}$$

$$\bullet \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{AI} = (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \wedge -R \vec{y}_0$$

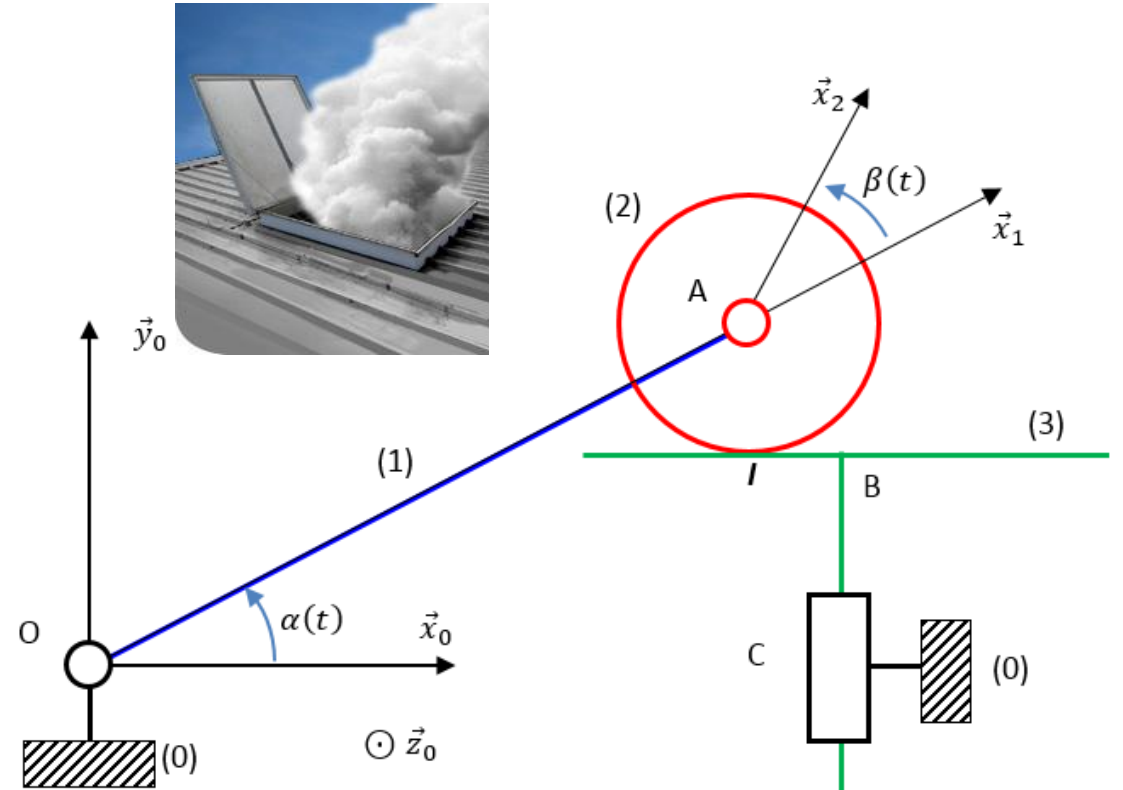
$$= R(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_0$$

$$\bullet \vec{v}(A \in 2/0) = \vec{v}(A \in 2/1) + \vec{v}(A \in 1/0)$$

$$= \vec{v}(O \in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{OA}$$

$$= \dot{\alpha}(t) \vec{z}_0 \wedge L \vec{x}_1 = L \dot{\alpha}(t) \vec{y}_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}(I \in 2/0) = L \dot{\alpha}(t) \vec{y}_1 + R(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_0$$



On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,

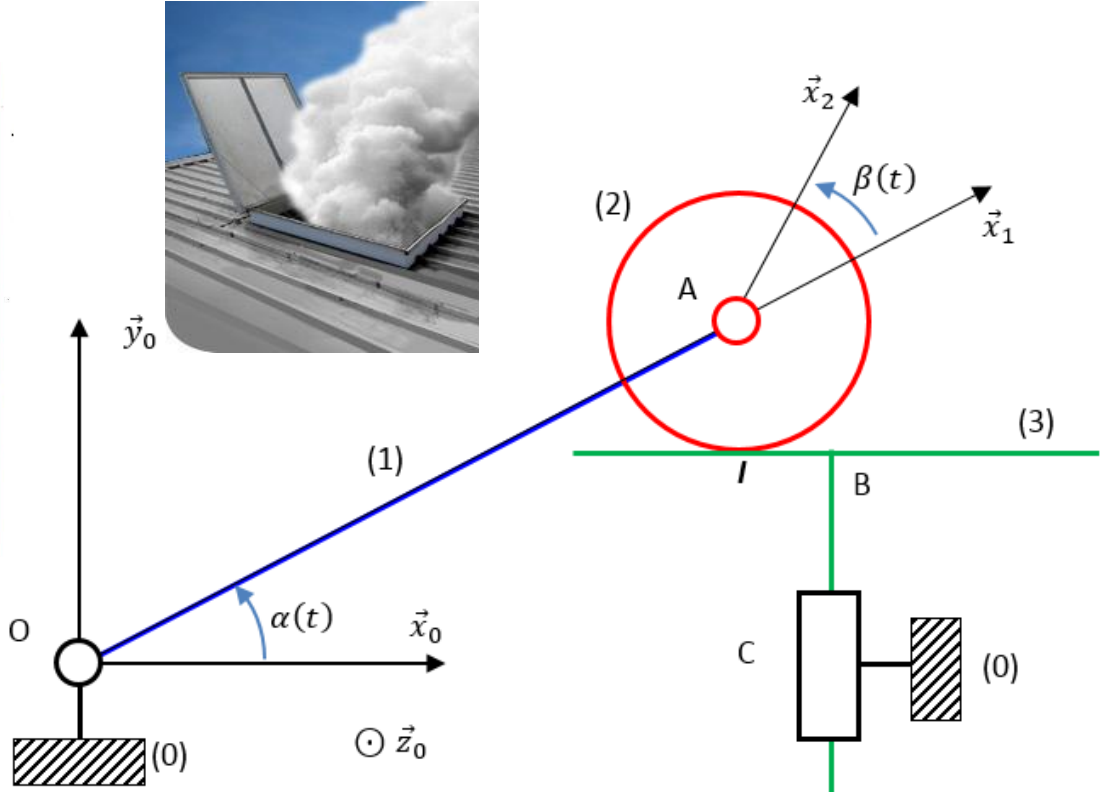
$\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

Déterminer  $\vec{\Omega}(1/0)$ ,  $\vec{\Omega}(2/0)$ ,  $\vec{\Omega}(3/0)$  et Déterminer le vecteur vitesse de glissement au point I de la roulette 2 par rapport au plateau 3.

$$\vec{V}(I \in 3/0) = \vec{V}(B \in 3/0) = \left. \frac{d \vec{OB}}{dt} \right|_{R_0}$$

$$= \dot{\lambda}(t) \vec{y}_0$$
  

$$\vec{V}(I \in 2/3) = L \dot{\alpha}(t) \vec{y}_1 + R(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{x}_0 - \dot{\lambda}(t) \vec{y}_0$$



On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,  
 $\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

Déterminer la condition de roulement sans glissement au point I.

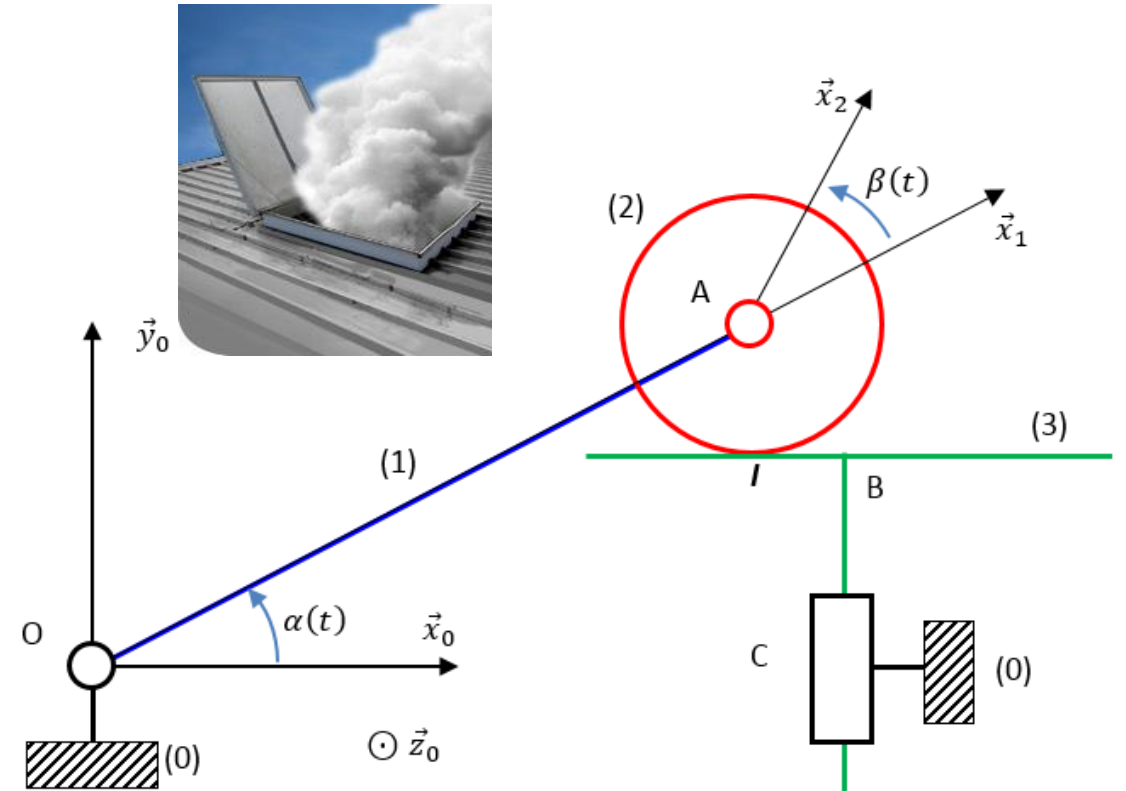
$$\vec{v}(I \in 2/3) = \vec{0}$$

$$L\dot{\alpha} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}_{R_3} + \begin{pmatrix} R(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \\ -\dot{\lambda}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -L\dot{\alpha} \sin\alpha + R(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = 0 \\ L\dot{\alpha} \cos\alpha = \dot{\lambda}(t) \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = \frac{L}{R} \dot{\alpha} \sin\alpha \\ \dot{\lambda}(t) = L\dot{\alpha} \cos\alpha \end{cases}$$



On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,  
 $\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

## Energétique :

Dans cette partie, on rajoute les hypothèses suivantes.

- Le bras (1) est de masse  $m_1$ , de centre d'inertie  $G_1$  ( $\overrightarrow{OG_1} = e\vec{x}_1$ ) et de matrice d'inertie :

$$I_O(1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{R_1}$$

- La roulette (2) est de masse  $m_2$ , de centre d'inertie A et de matrice d'inertie :

$$I_A(2) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}_{R_2}$$

- Le plateau (3) est de masse  $m_3$  et de centre d'inertie  $G_3$  ( $\overrightarrow{BG_3} = k\vec{y}_0$ ).

- Le bras (1) est entraîné par une courroie qui exerce sur 1 un torseur :  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 \\ C_M \vec{z}_0 \end{array} \right\}_O$ .

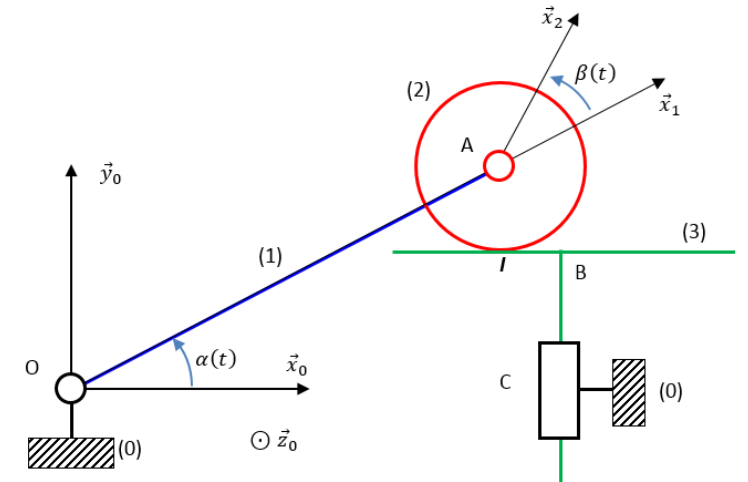
- L'action de la trappe sur (3) est modélisée par le torseur :  $\left\{ \begin{array}{l} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_B$ .

- Au point I, il y a roulement sans glissement et le facteur de frottement vaut  $f$ .

- Soit  $\Sigma = \{1, 2, 3\}$

- $\vec{g} = g\vec{z}_0$

- Toutes les liaisons sont supposées parfaites sauf la liaison ponctuelle.



Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble  $\Sigma$  dans le mouvement par rapport à  $R_0$ . Déduire son moment d'inertie équivalente ramenée sur l'axe moteur  $(O, \vec{z}_0)$ .

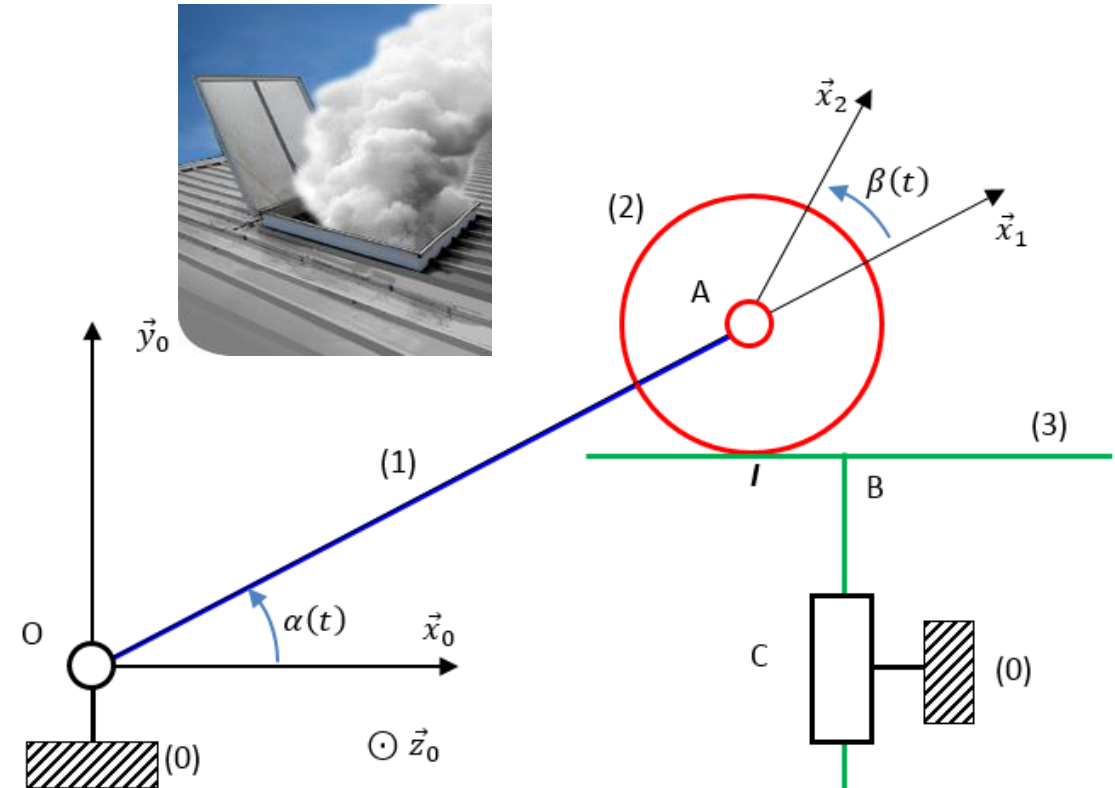
1.  $\Sigma = \{1, 2, 3\}$

$$E_c(\Sigma/R_0) = E_c(1/R_0) + E_c(2/R_0) + E_c(3/R_0)$$

- $E_c(1/R_0) = \frac{1}{2} C_1 \dot{\alpha}^2$
- $E_c(3/R_0) = \frac{1}{2} m_3 \dot{\lambda}^2 = \frac{1}{2} m_3 L^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha$
- $E_c(2/R_0) = \frac{1}{2} \left\{ v(2/R_0) \right\}_A \otimes \left\{ c(2/R_0) \right\}_A$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \\ L \dot{\alpha} \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} m_2 L \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ c_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_A$$

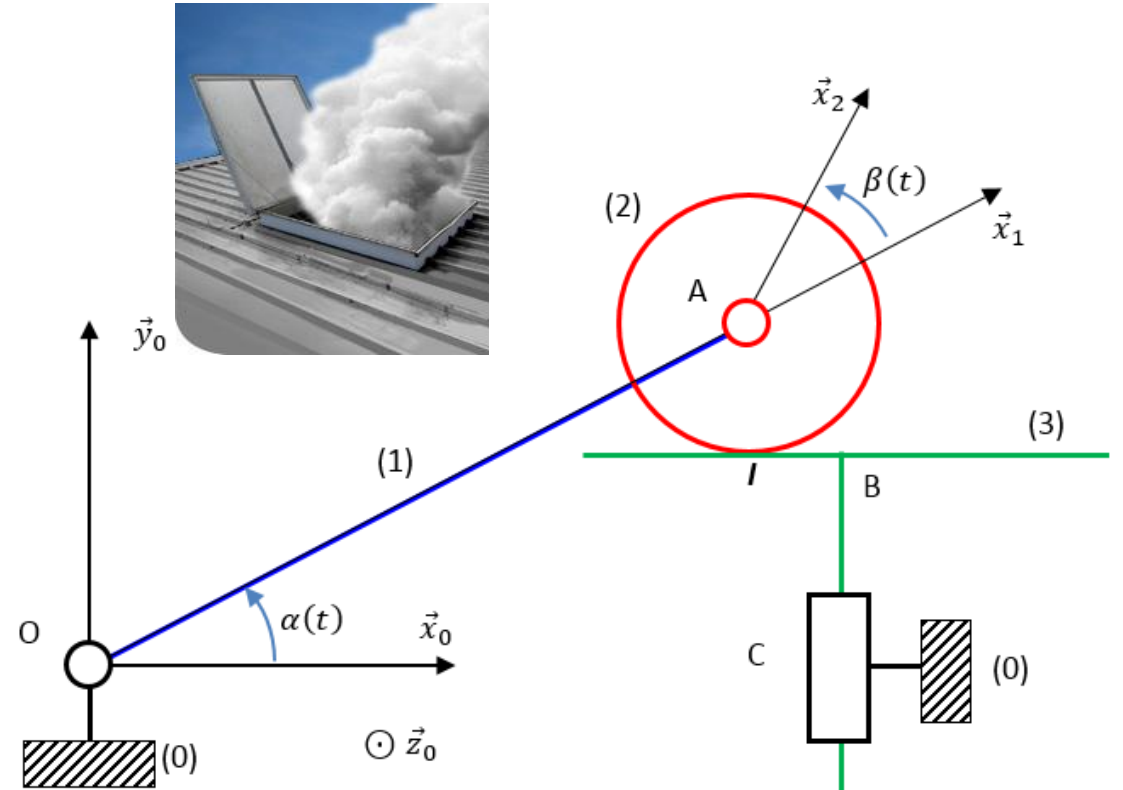
$$= \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2$$



On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,  
 $\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble  $\Sigma$  dans le mouvement par rapport à  $R_0$ . Déduire son moment d'inertie équivalente ramenée sur l'axe moteur  $(O, \vec{z}_0)$ .

$$\begin{aligned}
 \bullet E_c(1/R_0) &= \frac{1}{2} C_1 \dot{\alpha}^2 \\
 \bullet E_c(3/R_0) &= \frac{1}{2} m_3 \dot{\lambda}^2 = \frac{1}{2} m_3 L^2 \dot{\alpha}^2 \cos^2 \alpha \\
 \bullet E_c(2/R_0) &= \frac{1}{2} \left\{ v(2/R_0) \right\}_A \otimes \left\{ c(2/R_0) \right\}_A \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \right\}_A \otimes \left\{ m_2 L \dot{\alpha} \vec{y}_1 \right\}_A \\
 &= \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \\
 &= \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} c_2 \frac{L^2}{R^2} \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \left( m_2 L^2 + c_2 \frac{L^2}{R^2} \sin^2 \alpha \right)
 \end{aligned}$$



On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,  
 $\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

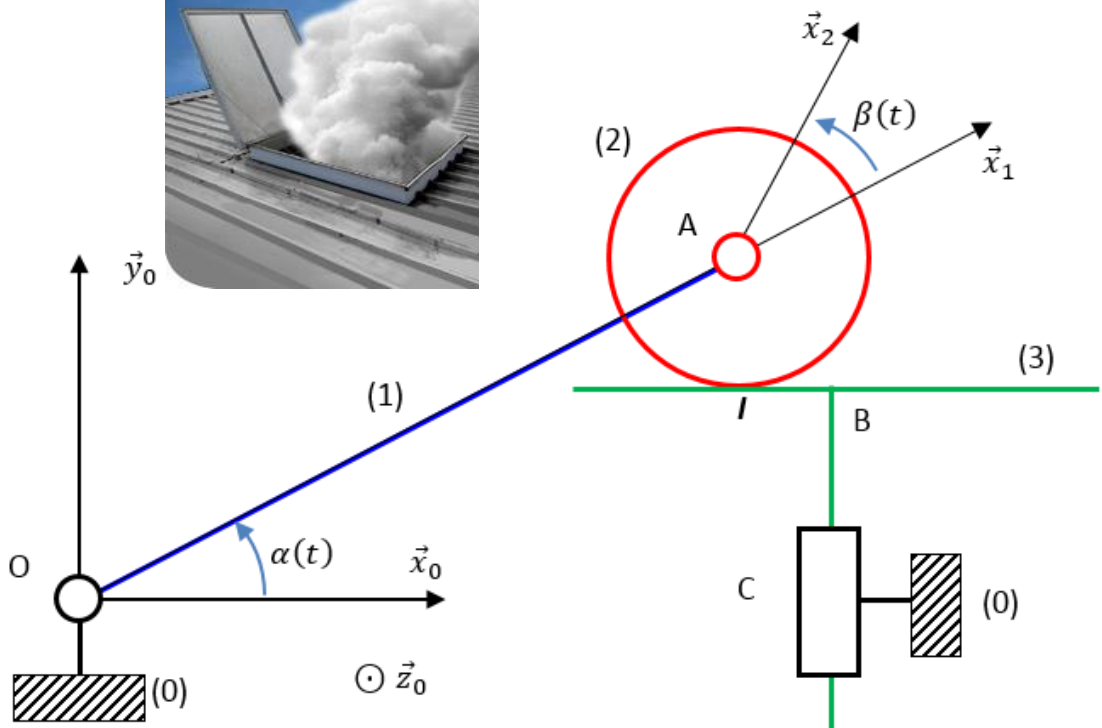


Calculer l'énergie cinétique de l'ensemble  $\Sigma$  dans le mouvement par rapport à  $R_0$ . Déduire son moment d'inertie équivalente ramenée sur l'axe moteur  $(O, \vec{z}_0)$ .

$$E_c(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \left[ C_1 + m_3 L^2 \cos^2 \alpha + m_2 L^2 + C_2 \frac{L^2}{R^2} \sin^2 \alpha \right]$$

$$= \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\alpha}^2 \text{ avec}$$

$$J_{eq} = C_1 + C_2 \frac{L^2}{R^2} \sin^2 \alpha + m_2 L^2 + m_3 L^2 \cos^2 \alpha$$



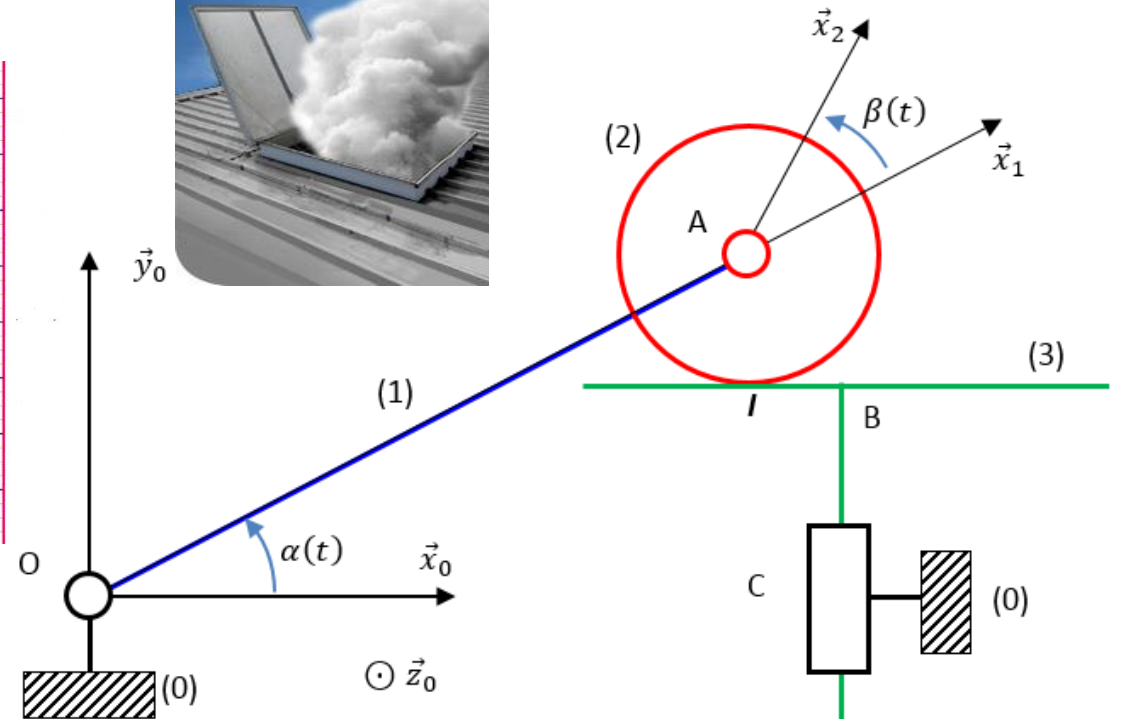
On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,  
 $\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

Déterminer la puissance des efforts intérieurs à  $\Sigma$ ,

2.  $P(\text{int à } \Sigma) = P(1 \leftrightarrow 2) + P(2 \leftrightarrow 3)$

- $P(1 \leftrightarrow 2) = 0$  car liaison parfaite
- $P(2 \leftrightarrow 3) = 0$  car C.R.S.G

$\Rightarrow P(\text{int à } \Sigma) = 0$

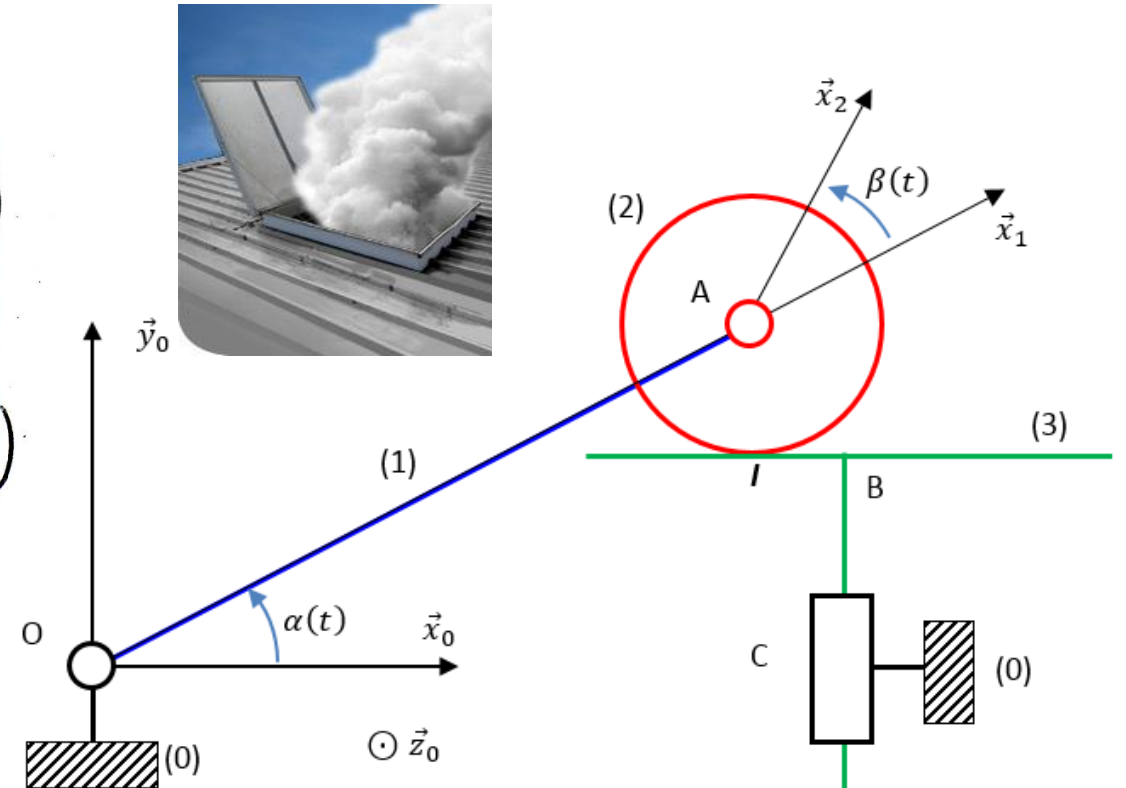


On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,

$\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

Déterminer la puissance des efforts extérieurs à  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .

$$\begin{aligned}
 P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_0) &= P(o \rightarrow 1 / R_0) + P(o \rightarrow 3 / R_0) \\
 &+ P(\text{Courroie} \rightarrow 1 / R_0) + P(\text{trappe} \rightarrow 3 / R_0) \\
 &+ P(\vec{g} \rightarrow 1 / R_0) + P(\vec{g} \rightarrow 2 / R_0) + P(\vec{g} \rightarrow 3 / R_0)
 \end{aligned}$$



On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,

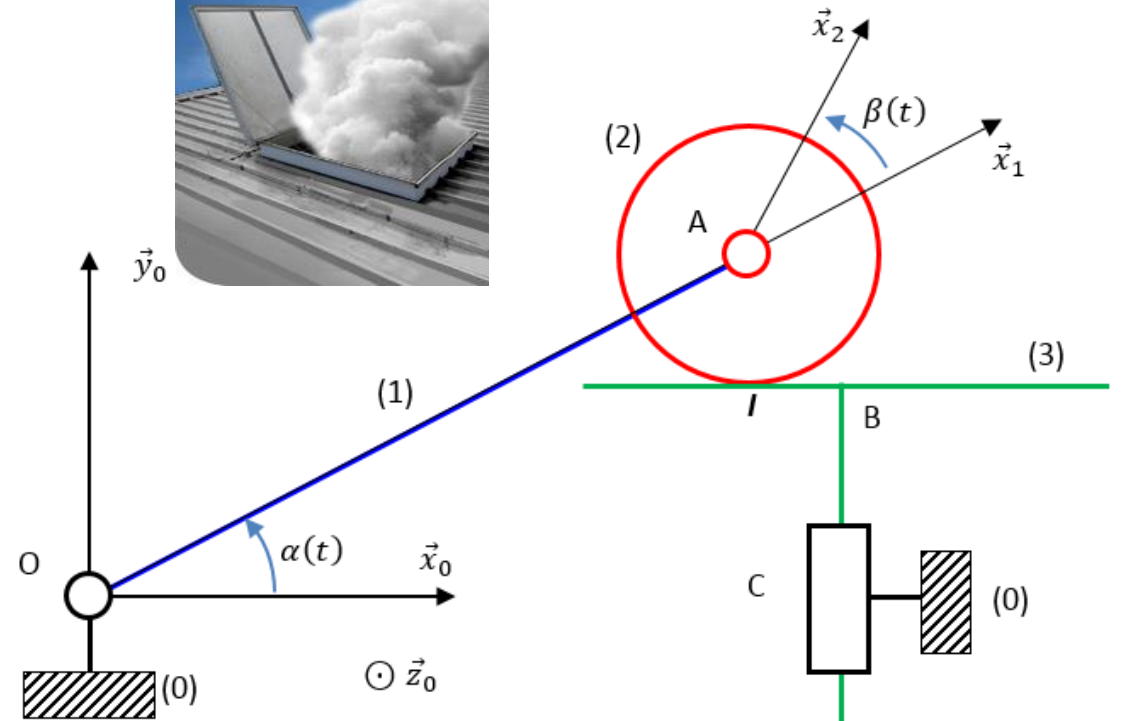
$\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

Déterminer la puissance des efforts extérieurs à  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .

•  $P(0 \rightarrow 1/R_0) = P(0 \rightarrow 3/R_0) = 0$  car liaisons parfaites

•  $P(\vec{g} \rightarrow 2/R_0) = P(\vec{g} \rightarrow 2/R_0) = P(\vec{g} \rightarrow 3/R_0) = 0$   
 car  $\vec{g} = g\vec{z}_0$  et le système est plan dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$

En effet:  $P(\vec{g} \rightarrow 1/R_0) = \left\{ F(\vec{g} \rightarrow 1) \otimes \left\{ v(1/R_0) \right\} \right\}_0$   
 $= \left\{ \begin{matrix} m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{OG}_1 m_1 g \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_0 \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_0 = 0$



On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,  
 $\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

Déterminer la puissance des efforts extérieurs à  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$ .

$$P(\text{Courroie} \rightarrow 1/R_0) = \left\{ F(\text{courroie} \rightarrow 1) \right\} \mathcal{V}(1/R_0)$$

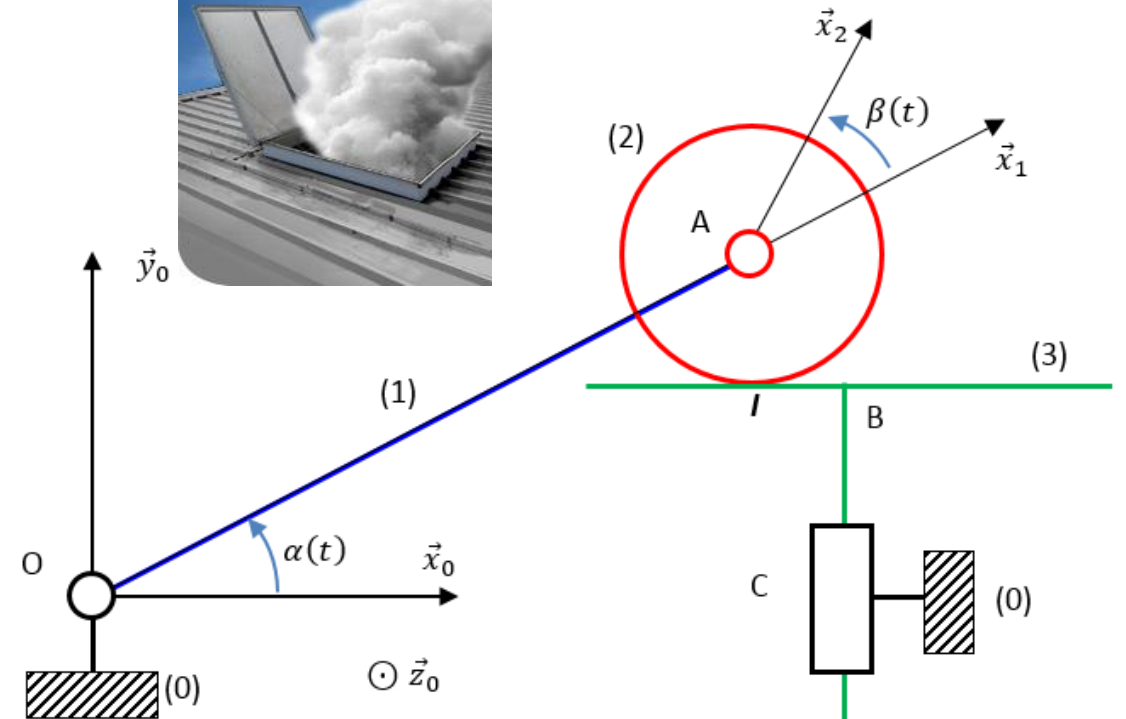
$$= \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_1 \\ C_M \vec{z}_0 \end{matrix} \right\} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = C_M \dot{\alpha}$$

$$P(\text{trappe} \rightarrow 3/R_0) = \left\{ F(\text{trappe} \rightarrow 3) \right\} \mathcal{V}(3/R_0)$$

$$= \left\{ \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \middle| \begin{matrix} L \\ M \\ N \end{matrix} \right\} \otimes \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\lambda} \end{matrix} \right\} = \gamma \dot{\lambda}$$

$$= \gamma L \dot{\alpha} \cos \alpha$$

$$P(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_0) = (C_M + \gamma L \cos \alpha) \dot{\alpha}$$



On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,

$\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

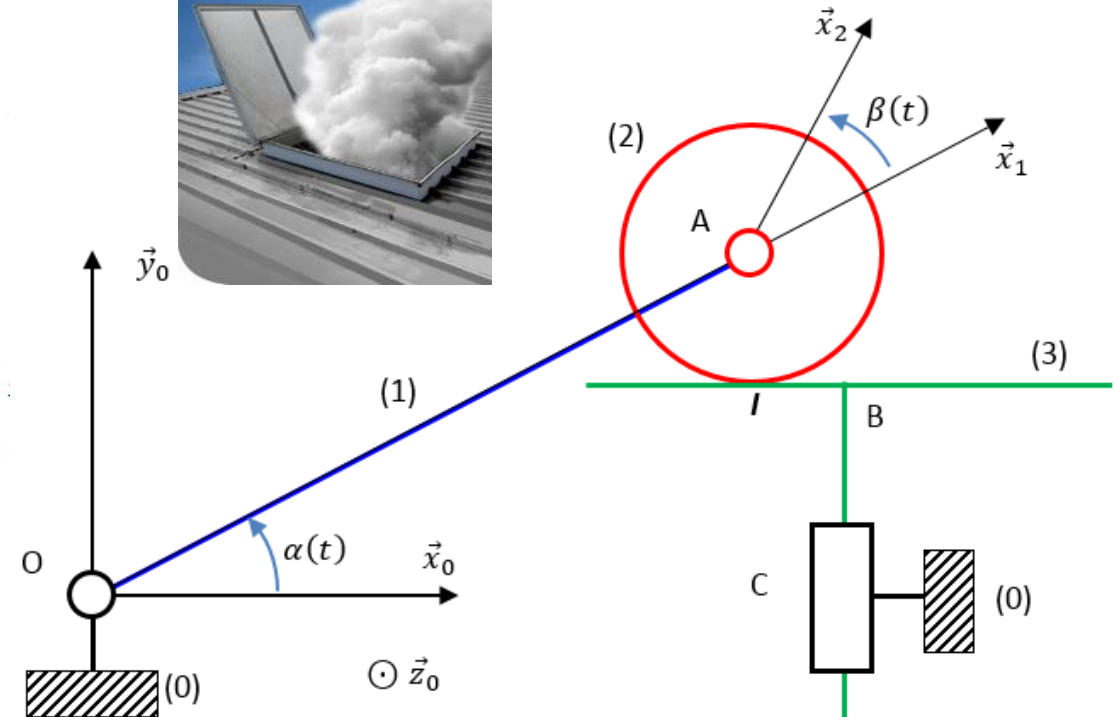
En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déduire l'expression du couple  $C_M$ .

$$4^{\circ} \frac{dE_c(\Sigma/R_0)}{dt} = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_0) + P(\text{int} \bar{a} \bar{\Sigma})$$

$$\frac{dE_c(\Sigma/R_0)}{dt} = J_{eq} \dot{\alpha} \dot{\alpha} + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \frac{dJ_{eq}}{dt}$$

$$\frac{dJ_{eq}}{dt} = \frac{2 C_2 L^2}{R^2} \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \alpha - 2 m_3 L^2 \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha$$

$$= 2 \dot{\alpha} \sin \alpha \cos \alpha \left( \frac{C_2 L^2}{R^2} + m_3 L^2 \right)$$



On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,

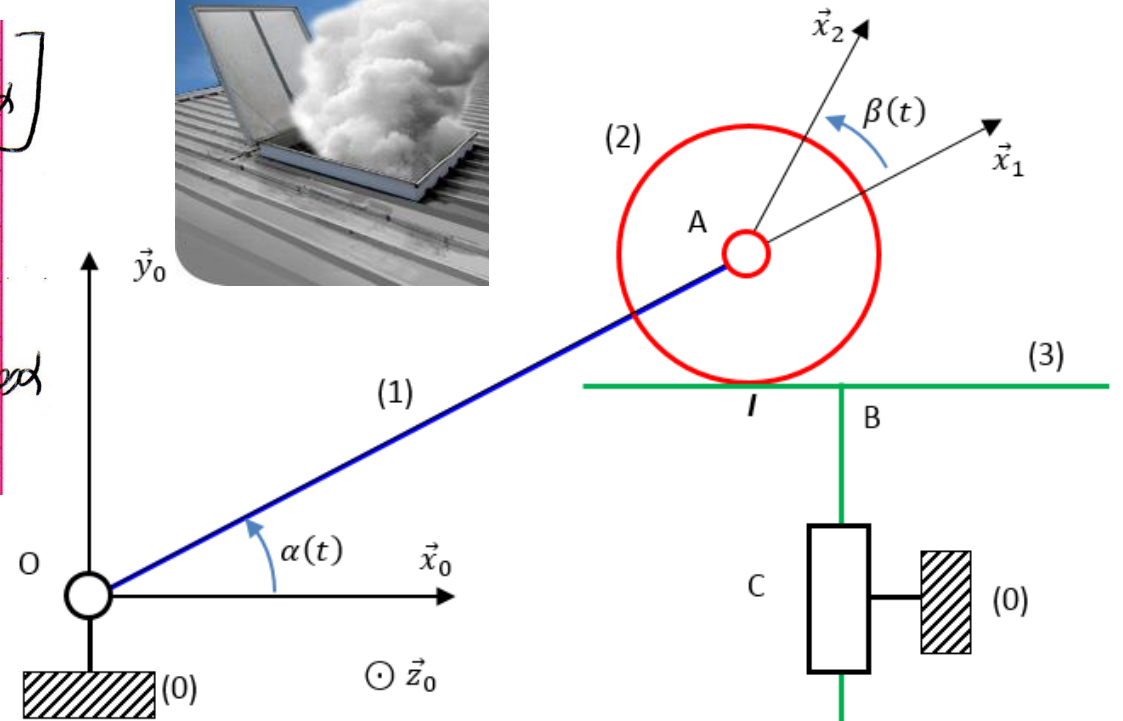
$\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déduire l'expression du couple  $C_M$ .

$$\frac{d}{dt} E_C(\Sigma/R_0) = \dot{\alpha} \left[ J_{eq} \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}^2 \left( m_3 L^2 + C_2 \frac{L^2}{R^2} \right) \sin \alpha \cos \alpha \right]$$

$$= (C_M + \gamma L \cos \alpha) \dot{\alpha}$$

$$\Rightarrow C_M = J_{eq} \ddot{\alpha} + \left( m_3 L^2 + C_2 \frac{L^2}{R^2} \right) \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha - \gamma L \cos \alpha$$



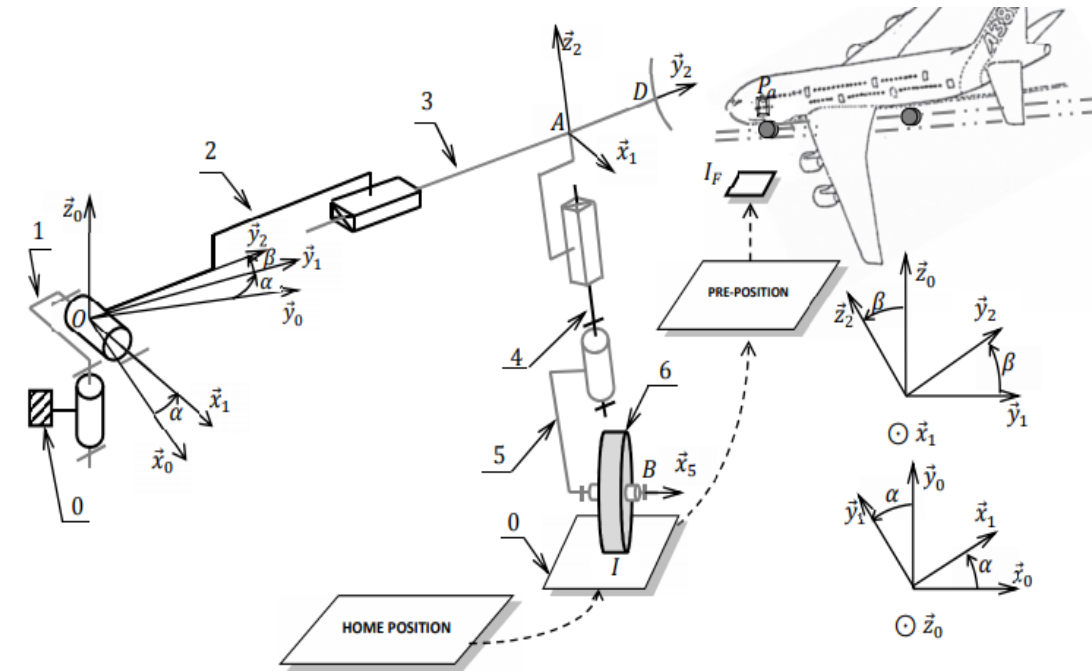
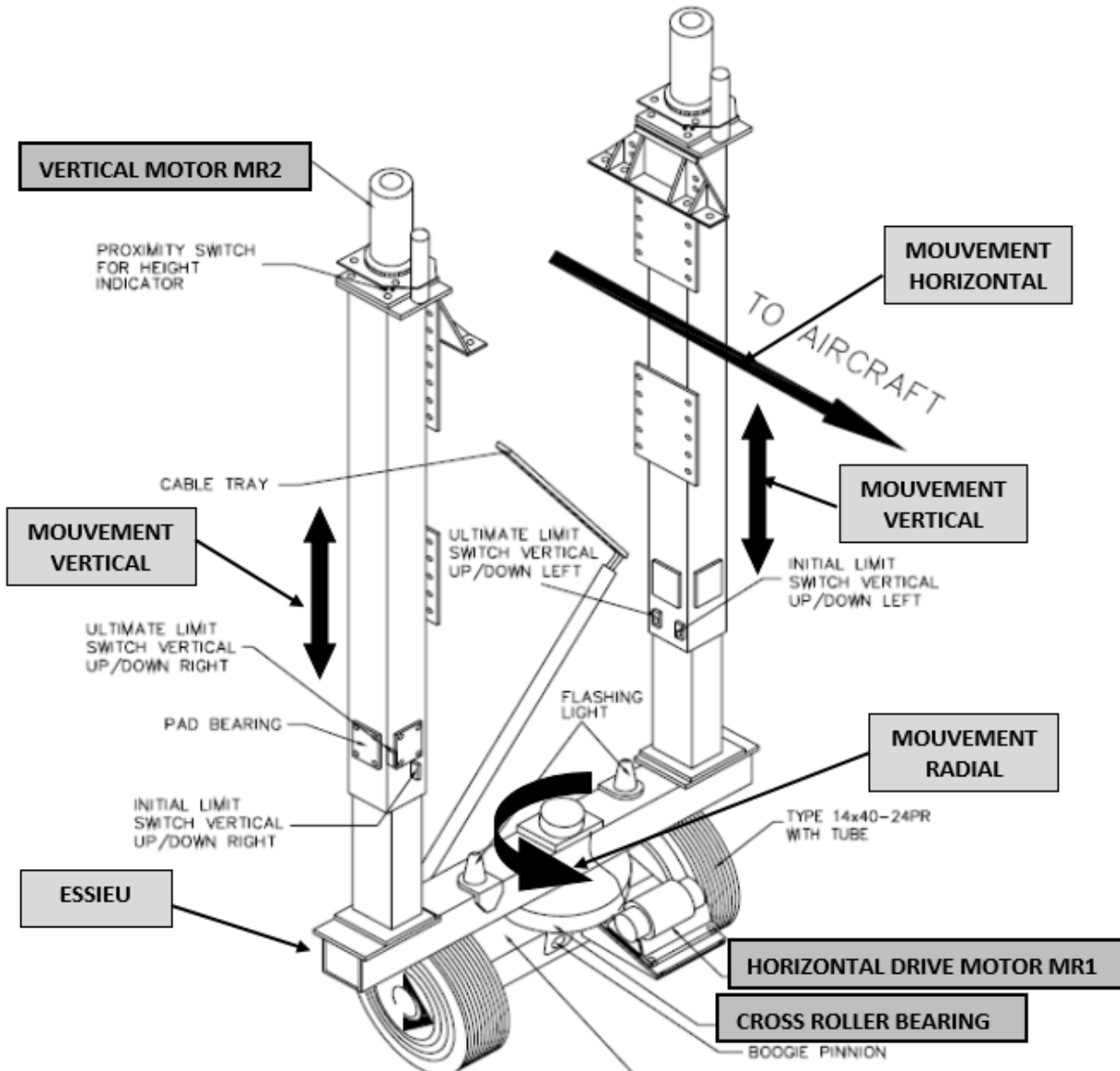
On donne :  $\vec{OA} = L\vec{x}_1$ ,  $\vec{OC} = L\vec{x}_0$ ,  $\vec{IB} = \mu(t)\vec{x}_0$ ,

$\vec{CB} = \lambda(t)\vec{y}_0$  et  $\vec{IA} = R\vec{y}_0$

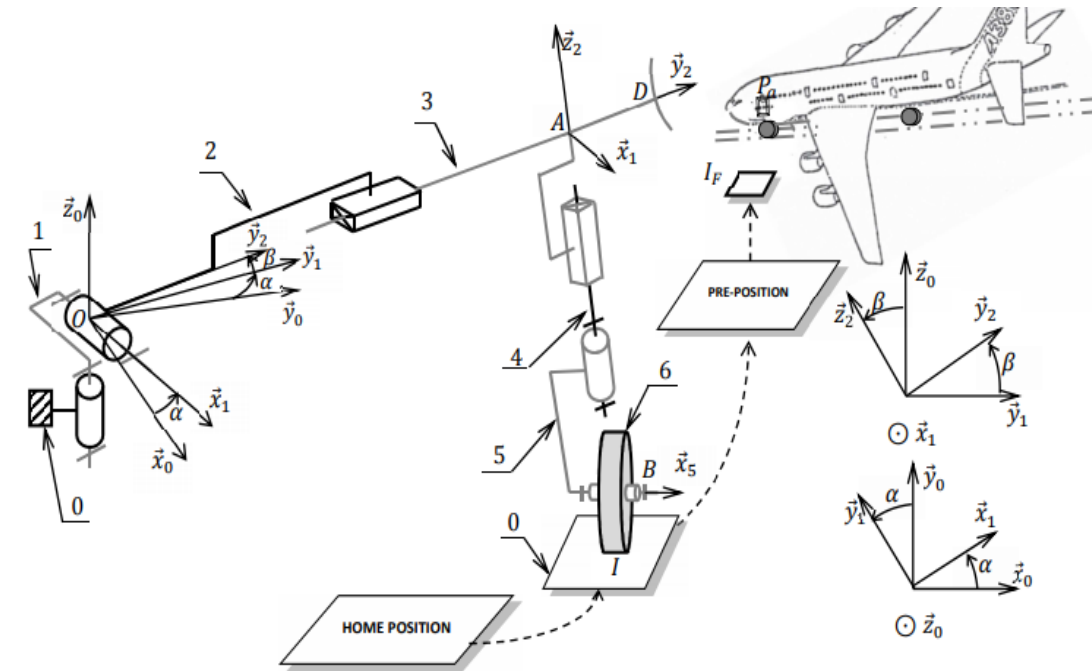




# Exercice 2. Passerelle télescopique (CNIM 2017)



## Exercice 2. Passerelle télescopique (CNIM 2017)



## Exercice 2. Passerelle télescopique (CNIM 2017)

On adopte également les hypothèses suivantes :

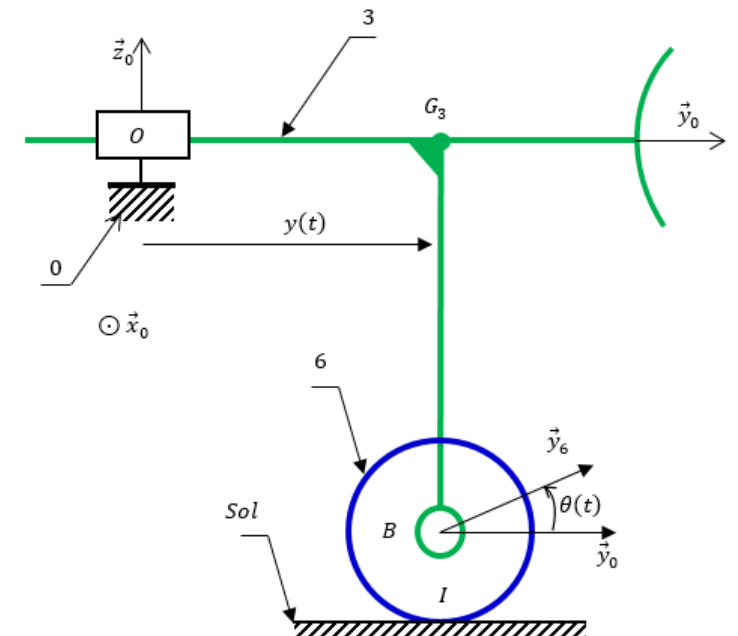
- Le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen.
- La roue (6) est supposée en liaison pivot parfaite d'axe  $(B, \vec{x}_0)$  avec le couloir (3) et en liaison ponctuelle de normale  $(I, \vec{z}_0)$  avec le sol de coefficient de frottement  $f_0$ . Elle est supposée de masse  $m_6$ , de centre d'inertie  $B$ , d'axe principal d'inertie  $(B, \vec{x}_0)$  et de moment principal d'inertie  $A_6$  par rapport à  $(B, \vec{x}_0)$ . On donne  $\overrightarrow{BI} = -\frac{D}{2}\vec{z}_0$  avec  $D = 1m$ .
- Le couloir (3) est supposé de masse  $m_3$  et de centre d'inertie  $G_3$  avec  $\overrightarrow{OG_3} = y(t)\vec{y}_0$ .
- L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g\vec{z}_0$ .
- La liaison glissière entre le bâti (0) et le couloir (3) est supposée avec frottement dont le torseur d'actions mécaniques est

donné par le torseur suivant :  $\{F(0 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ -f_R(t) & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$ .

- Les masses et les inerties des éléments du motoréducteur sont négligées.
- Le rapport de réduction du réducteur est  $K_r = 200$ .
- Le motoréducteur  $MR1$  exerce un couple sur la roue (6) donné par le torseur suivant :

$$\{F(MR1 \rightarrow 6)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -\eta K_r c_m \vec{x}_0 \end{Bmatrix}_B$$

- $\vec{\Omega}(6/0) = \dot{\theta}\vec{x}_0 = -\frac{\omega_m(t)}{K_r}\vec{x}_0$



A partir de la condition de roulement sans glissement au point I entre la roue (6) et le sol, montrer que  $\dot{y}(t) = \frac{D}{2K_r} \omega_m(t)$ . Déduire la vitesse angulaire maximale du moteur  $\omega_{max}$  permettant de répondre au critère imposé par le cahier des charges. On rappelle que la vitesse maximale de déplacement horizontal autorisée pour la passerelle est de 1,2m/s.

$$\begin{aligned} \vec{V}(I \in 6/sol) &= \vec{V}(B \in 6/sol) + \vec{\Omega}(6/sol) \wedge \overline{BI} \\ &= \dot{y}(t)\vec{y}_0 + \left(\frac{-\omega_m(t)}{K_r} \vec{x}_0\right) \wedge \left(\frac{-D}{2} \vec{z}_0\right) \end{aligned}$$

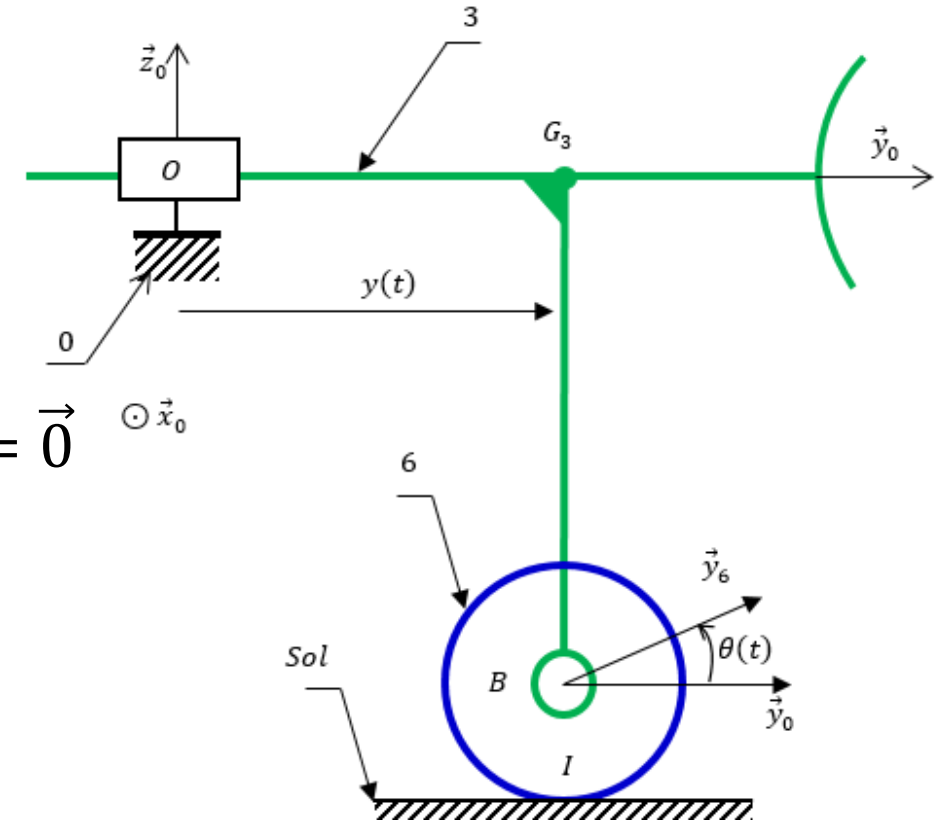
$$\vec{V}(I \in 6/sol) = \left(\dot{y}(t) - \frac{D\omega_m(t)}{2K_r}\right) \vec{y}_0$$

Condition de roulement sans glissement :  $\vec{V}(I \in 6/sol) = \vec{0}$

$$\dot{y}(t) = \frac{D\omega_m(t)}{2K_r}$$

$$\omega_{max} = \frac{2K_r}{D} \dot{y}_{max}$$

$$AN : \omega_{max} = \frac{2 \times 200}{1} \times 1,2 = 480 \text{ rad/s} = 4585 \text{ tr/min}$$



Déterminer l'énergie cinétique du système matériel  $\Sigma$  formé par le couloir (3) et la roue (6) dans son mouvement par rapport à  $R_0$ . Déduire le moment d'inertie équivalente  $J_{eq}$  du système  $\Sigma$ , ramenée sur l'arbre moteur, en fonction de  $m_3$ ,  $m_6$ ,  $D$ ,  $A_6$  et  $K_r$ .

$$E_c(3/0) = \frac{1}{2} m_3 \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m_3 \frac{D^2}{4K_r^2} \omega_m^2(t)$$

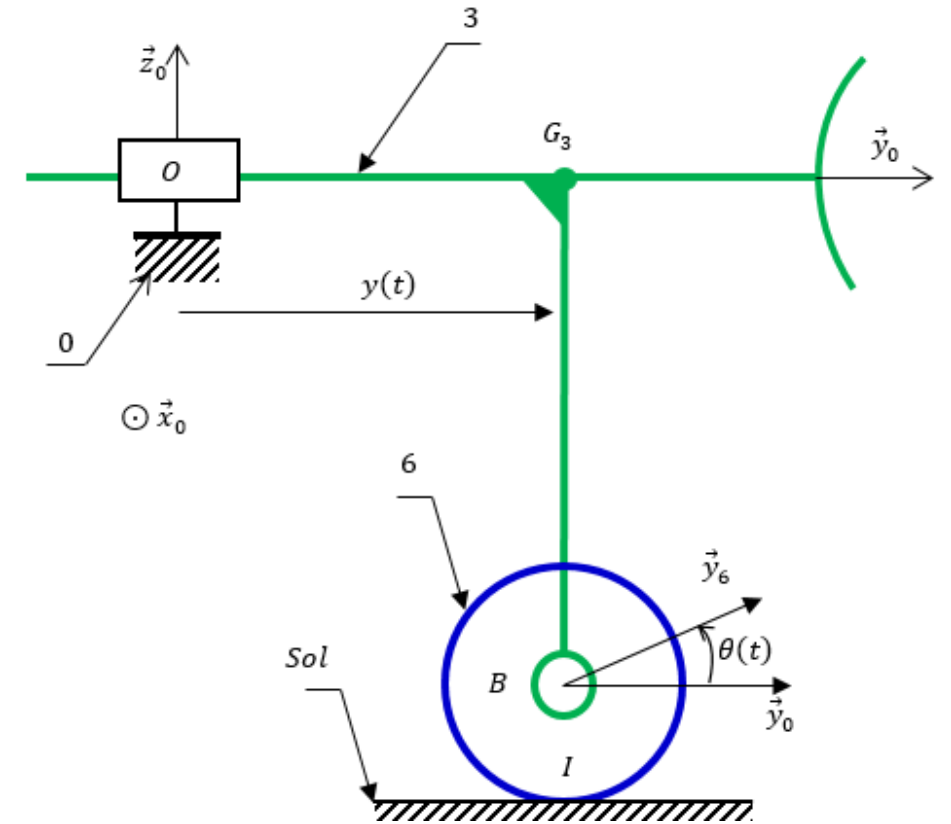
$$E_c(6/0) = \frac{1}{2} m_6 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} A_6 \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m_6 \frac{D^2}{4K_r^2} \omega_m^2(t) + \frac{1}{2} A_6 \frac{\omega_m^2(t)}{K_r^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\omega_m^2(t)}{K_r^2} \left( m_6 \frac{D^2}{4} + A_6 \right)$$

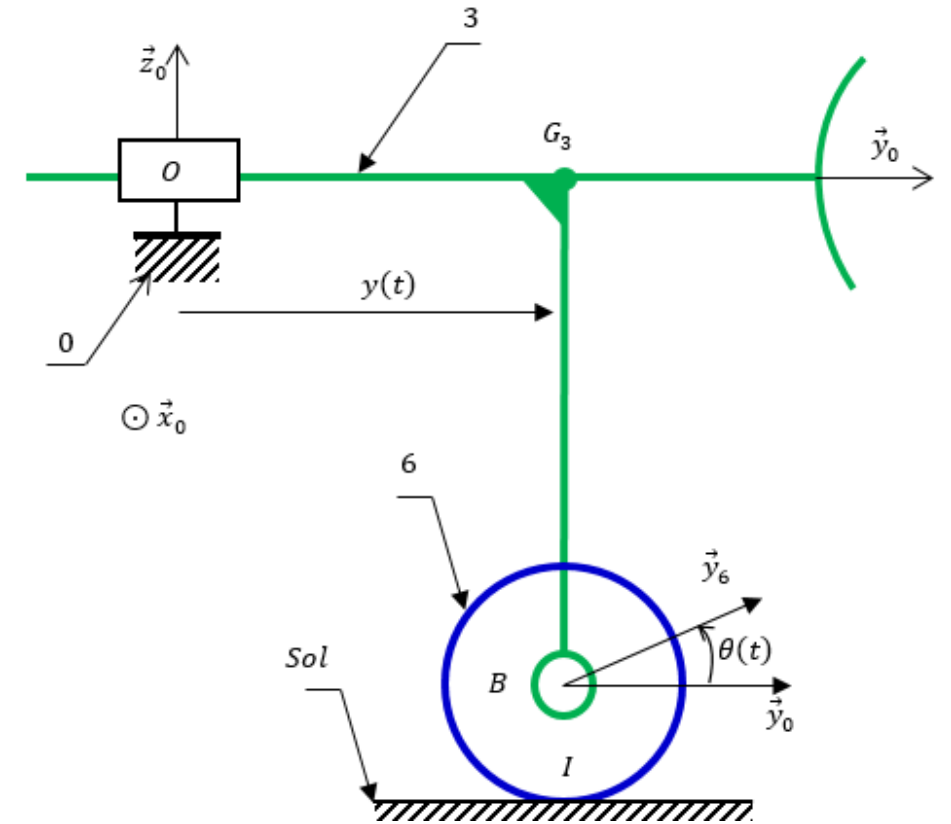
$$E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2} \frac{\omega_m^2(t)}{K_r^2} \left( (m_3 + m_6) \frac{D^2}{4} + A_6 \right) = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_m^2(t)$$

$$\text{Avec: } J_{eq} = \frac{1}{K_r^2} \left( (m_3 + m_6) \frac{D^2}{4} + A_6 \right)$$



Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques intérieures au système matériel  $\Sigma$ .

$$P(\text{int à } \Sigma) = P(6 \leftrightarrow 3) = 0 \text{ car liaison parfaite.}$$



Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures au système matériel  $\Sigma$ .

$$\Sigma = \{3,6\} \rightarrow \bar{\Sigma} = \{0, sol, g, MR_1\}$$

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_0) = P(0 \rightarrow 3/R_0) + P(sol \rightarrow 6/R_0) + P(g \rightarrow 3/R_0) + P(g \rightarrow 6/R_0) + P(MR_1 \rightarrow 6/R_0)$$

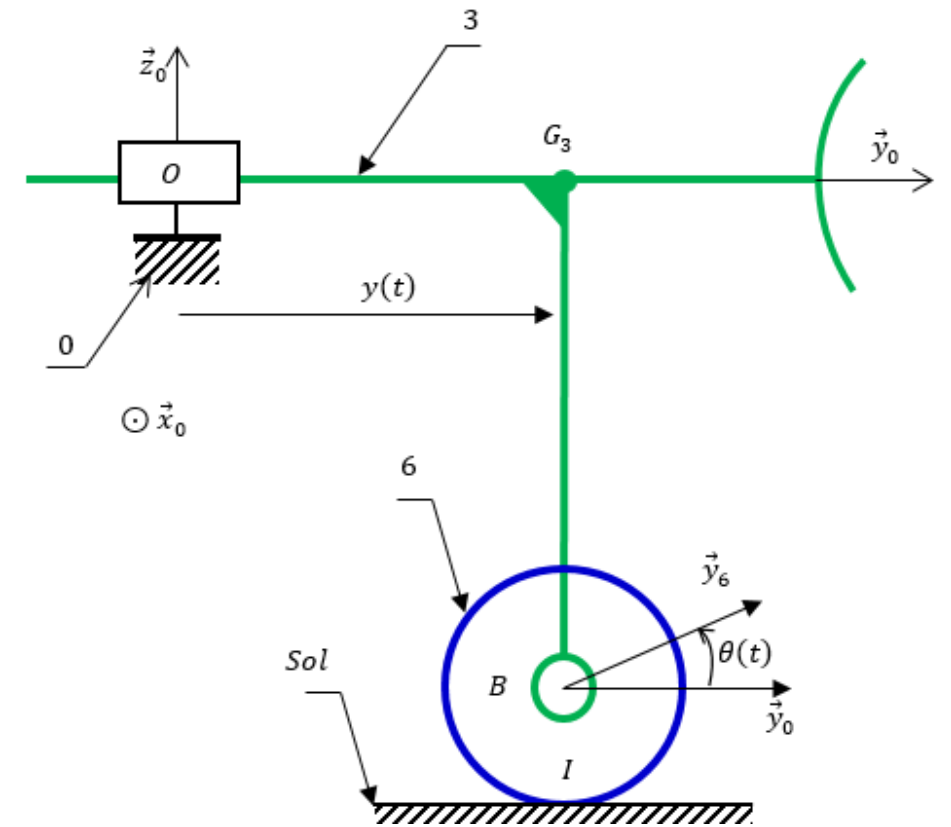
$P(sol \rightarrow 6/R_0) = 0$  car condition de roulement sans glissement

$$P(g \rightarrow 3/R_0) = P(g \rightarrow 6/R_0) = 0$$

$$P(MR_1 \rightarrow 6/R_0) = \eta c_m(t) \omega_m(t)$$

$$P(0 \rightarrow 3/R_0) = -f_R(t) \dot{y}(t) = -\frac{D}{2K_r} f_R(t) \omega_m(t)$$

$$P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_0) = \left( \eta c_m(t) - \frac{D}{2K_r} f_R(t) \right) \omega_m(t)$$

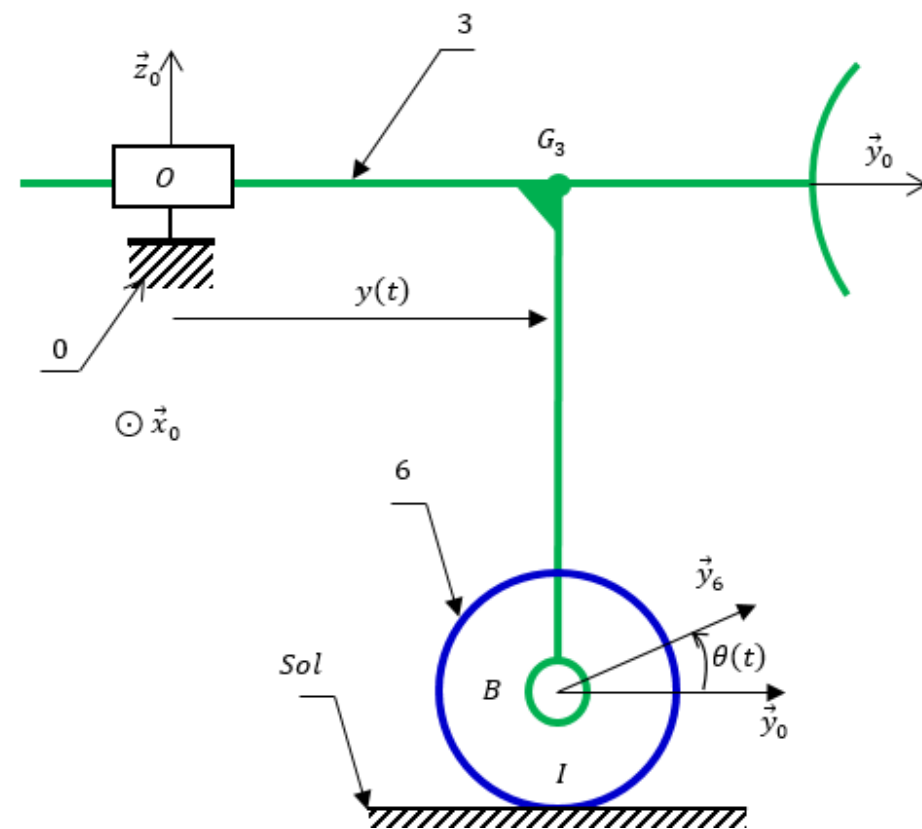


En appliquant le théorème de l'énergie cinétique (Energie-Puissance), exprimer le couple moteur  $c_m(t)$  en fonction de  $J_{eq}$ ,  $f_R(t)$ ,  $D$ ,  $K_r$ ,  $\eta$  et  $\frac{d\omega_m(t)}{dt}$ .

$$\frac{dE_c(\Sigma/R_0)}{dt} = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_0) + P(\text{int à } \Sigma)$$

$$J_{eq}\omega_m(t)\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \omega_m(t)\left(\eta c_m(t) - \frac{D}{2K_r}f_R(t)\right)$$

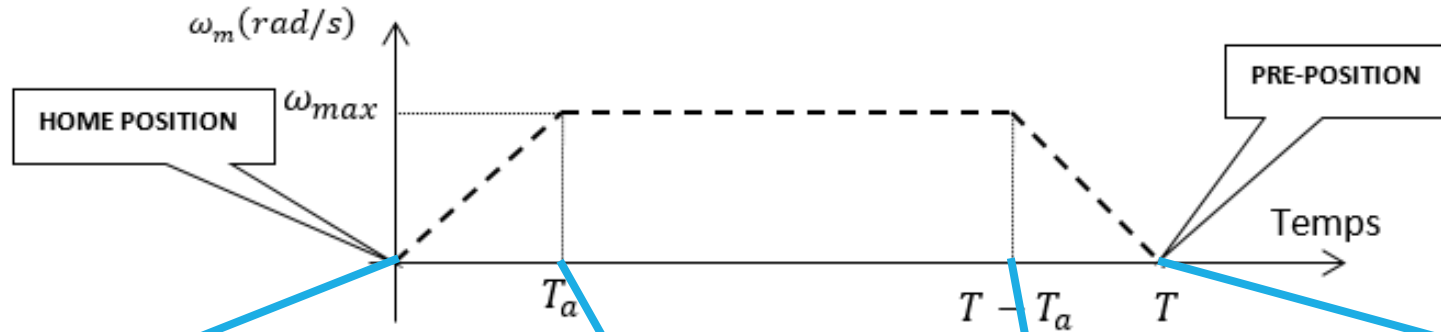
$$c_m(t) = \frac{1}{\eta}\left(J_{eq}\frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{D}{2K_r}f_R(t)\right)$$





En se basant sur la loi de commande du moteur, compléter le tableau suivant et indiquer dans quelle période, le moteur fournit un couple maximal.

On donne : 
$$c_m(t) = \frac{1}{\eta} \left[ \frac{D}{2K_r} f_R(t) + J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} \right].$$

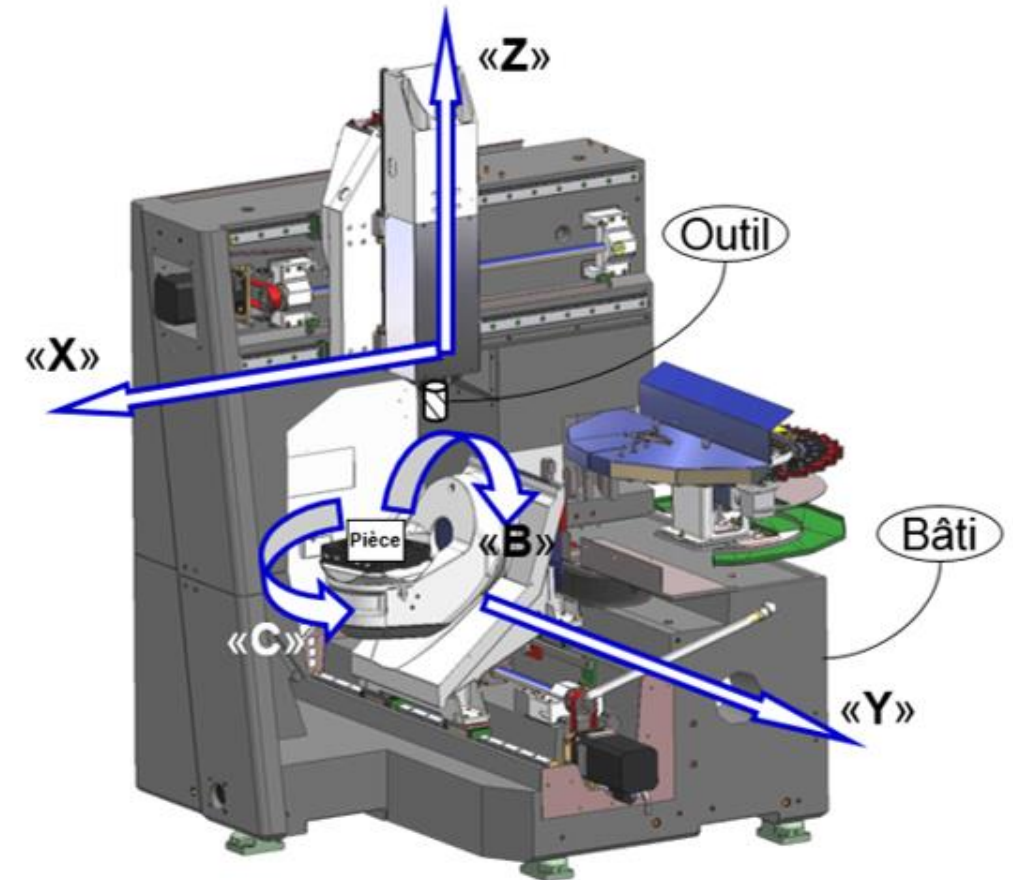


Période	$[0, T_a]$	$]T_a, T - T_a[$	$[T - T_a, T]$
$\frac{d\omega_m(t)}{dt}$ en $(rads^{-2})$	$\frac{\omega_{max}}{T_a}$	0	$-\frac{\omega_{max}}{T_a}$
$c_m(Nm)$	$\frac{1}{\eta} \left( J_{eq} \frac{\omega_{max}}{T_a} + \frac{D}{2K_r} f_R(t) \right)$	$\frac{D}{2\eta K_r} f_R(t)$	$\frac{1}{\eta} \left( -J_{eq} \frac{\omega_{max}}{T_a} + \frac{D}{2K_r} f_R(t) \right)$

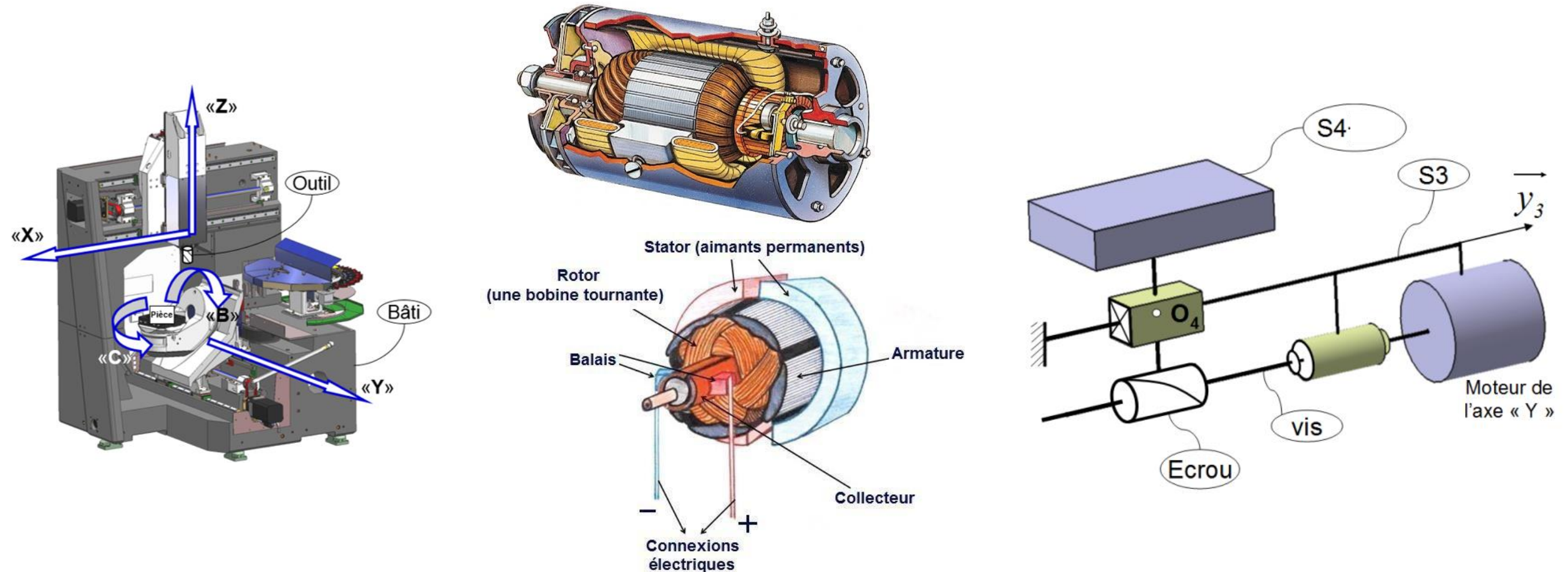
**Le moteur fournit un couple maximal dans la période  $[0, T_a]$**

## Exercice 3. Motorisation de l'axe Y d'un centre d'usinage 5 axes

高速・高精度5軸複合加工機  
High speed, High accuracy



# Exercice 3. Motorisation de l'axe Y d'un centre d'usinage 5 axes



# Exercice 3. Motorisation de l'axe Y d'un centre d'usinage 5 axes

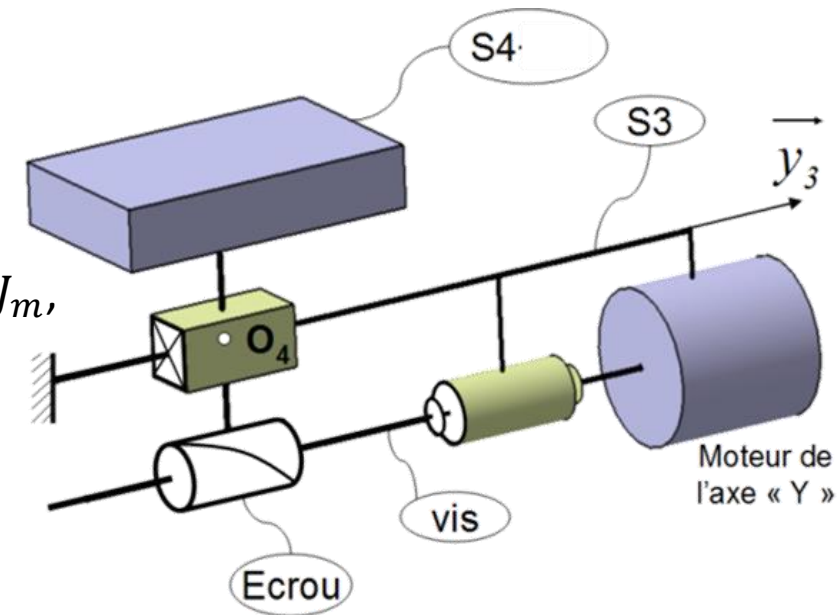
## Données :

- L'axe  $(O_4, \vec{y}_3)$  est parfaitement horizontal,
- L'accélération de la pesanteur est donnée par  $\vec{g} = -g\vec{Z}_3$
- Toutes les liaisons sont supposées parfaites sauf la liaison glissière d'axe  $(O_4, \vec{y}_3)$ . On donne :

$$\{F(S_3 \rightarrow S_4)\}_{O_4} = \begin{Bmatrix} X \\ -f_r(t) \\ Y \\ N \end{Bmatrix}_{R_3}$$

- La vitesse de rotation du moteur par rapport au repère galiléen  $R_3$  est notée  $\omega_m$ ,
- Le moment d'inertie de la vis, par rapport à son axe de rotation est noté  $J_v$ ,
- Le moment d'inertie du rotor moteur par rapport à son axe de rotation est noté  $J_m$ ,
- Le pas de la liaison hélicoïdale est noté "pas".
- Le coulisseau  $S_4$  est de masse  $m_4$  et de centre d'inertie  $G_4$
- Soit le système matériel  $\Sigma = \{vis, S_4, rotor\}$
- La vitesse de déplacement du coulisseau  $S_4$  est donnée par  $\dot{y}(t) = \frac{pas}{2\pi} \omega_m(t)$
- L'action de la pesanteur est négligée sur le rotor et la vis.
- L'action du stator du moteur sur le rotor est donnée par :

$$\{F(stator \rightarrow rotor)\}_{O_3} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ c_m(t)\vec{y}_3 \end{Bmatrix}$$



Déterminer l'énergie cinétique du système matériel  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $R_3$  en déduire le moment d'inertie équivalente  $J_{eq}$  en fonction de  $m_4, J_v, J_m, pas$ .

$$\Sigma = \{ \text{vis}, S_4, \text{rotor} \}$$

$$E_c(\Sigma/R_3) = E_c(\text{vis}/R_3) + E_c(S_4/R_3) + E_c(\text{rotor}/R_3)$$

$$\bullet E_c(\text{vis}/R_3) = \frac{1}{2} J_v \omega_m^2$$

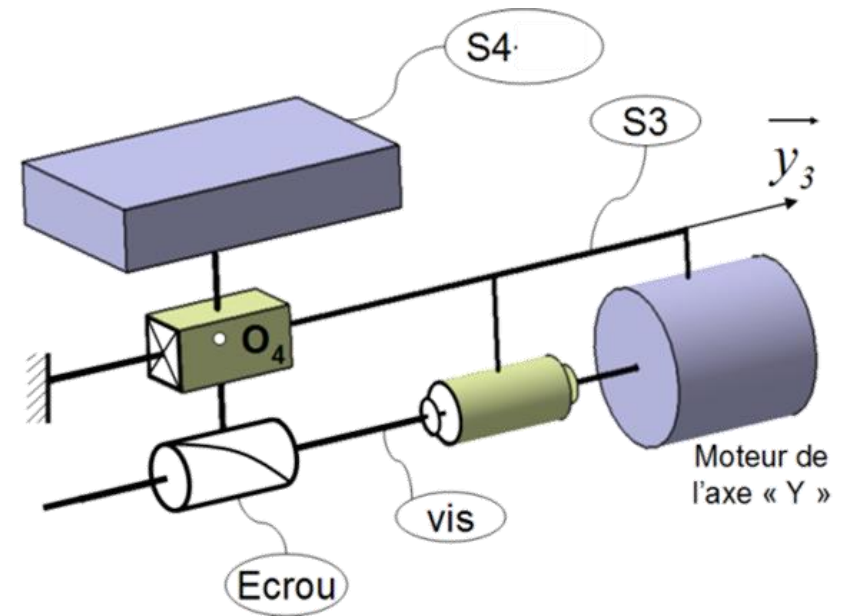
$$\bullet E_c(\text{rotor}/R_3) = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$$

$$\bullet E_c(S_4/R_3) = \frac{1}{2} m_4 \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m_4 \frac{pas^2}{4\pi^2} \omega_m^2$$

$$E_c(\Sigma/R_3) = \frac{1}{2} \left( J_v + J_m + m_4 \frac{pas^2}{4\pi^2} \right) \omega_m^2$$

$$= \frac{1}{2} J_{eq} \omega_m^2 \text{ avec}$$

$$J_{eq} = J_v + J_m + m_4 \frac{pas^2}{4\pi^2}$$

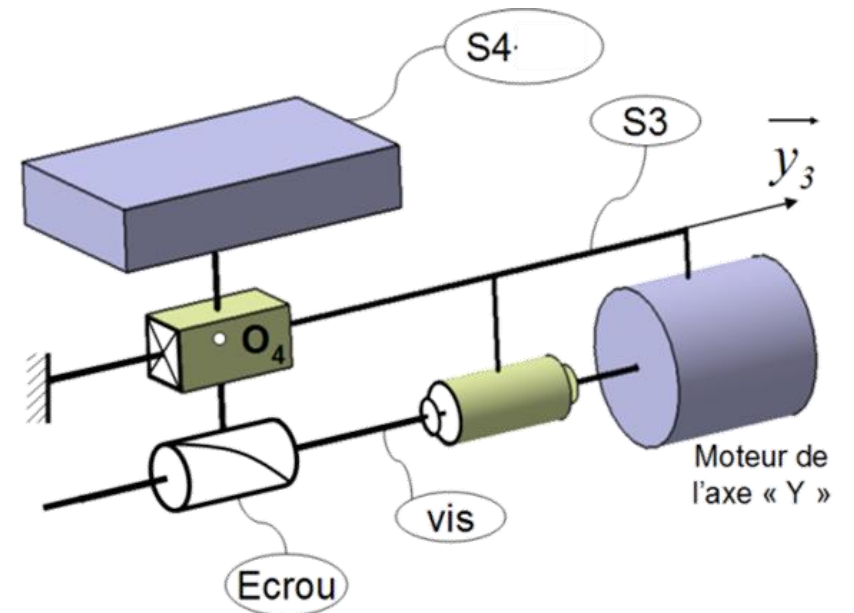


Déterminer l'énergie cinétique du système matériel  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport à  $R_3$  en déduire le moment d'inertie équivalente  $J_{eq}$  en fonction de  $m_4, J_v, J_m, pas$ .

Rq: On peut chercher la masse équivalente ramenée sur l'axe de la vis :

$$E_c(\Sigma/R_3) = \frac{1}{2} M_{eq} \dot{y}^2 \text{ avec}$$

$$M_{eq} = m_4 + \frac{4\pi^2}{pas^2} (J_v + J_m)$$



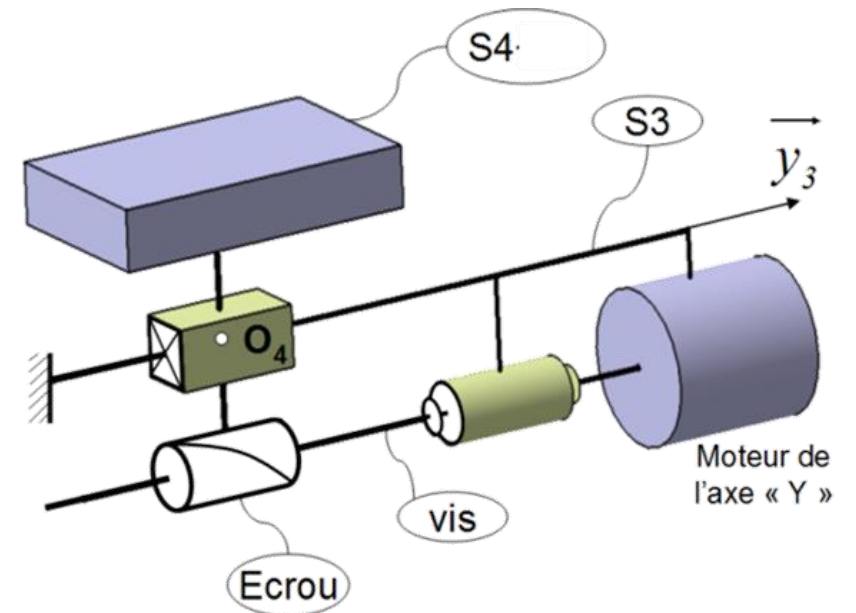


Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures à  $\Sigma$ .

$$3^{\circ} \quad P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_3) = P(\text{stator} \rightarrow \text{rotor} / R_3) + P(S_3 \rightarrow \text{vis} / R_3) + P(S_3 \rightarrow S_4 / R_3) + P(\vec{g} \rightarrow S_4 / R_3)$$

$$\bullet \quad P(\text{stator} \rightarrow \text{rotor} / R_3) = \left\{ F(\text{stator} \rightarrow \text{rotor}) \right\}_{O_3} \otimes \left\{ U(\text{rot} / R_3) \right\}_{O_3}$$

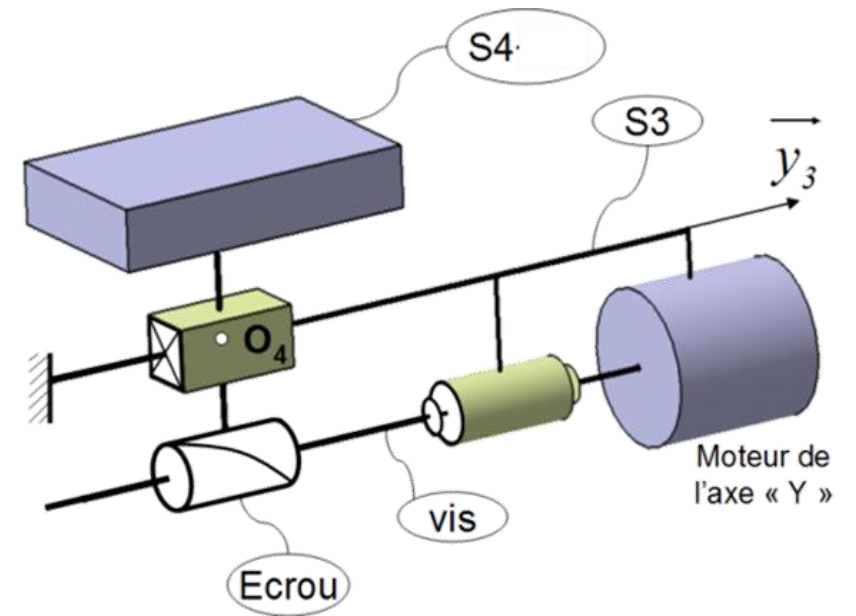
$$= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m(t) \vec{y}_3 \end{array} \right\}_{O_3} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \omega_m(t) \vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_3} = C_m(t) \omega_m(t)$$





Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures à  $\Sigma$ .

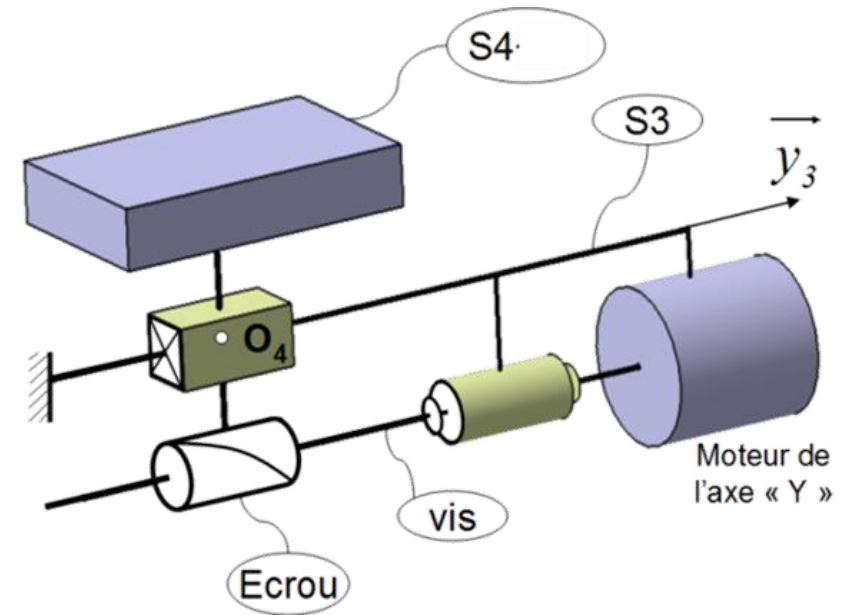
$$\begin{aligned}
 & \bullet P(\vec{g} \rightarrow S_4 / R_3) = 0 \\
 & \bullet P(S_3 \rightarrow \text{vis} / R_3) = 0 \text{ Con liaison parfaite} \\
 & \bullet P(S_3 \rightarrow S_4 / R_3) = \left\{ F(S_3 \rightarrow S_4) \right\}_{O_4} \otimes \left\{ V(S_4 / R_3) \right\}_{O_4} \\
 & = \left\{ \begin{array}{c|c} X & L \\ -f_r(t) & \Pi \\ \gamma & N \end{array} \right\}_{O_4} \otimes \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & \dot{\gamma}(t) \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O_4} \\
 & = -f_r(t) \dot{\gamma}(t) = -f_r(t) \frac{p \omega_s}{2\pi} \omega_m(t)
 \end{aligned}$$



Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures à  $\Sigma$ .

D'où :

$$P(\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma / R_3) = \left( C_m(t) - \frac{pas}{2\pi} f_r(t) \right) \omega_m(t)$$

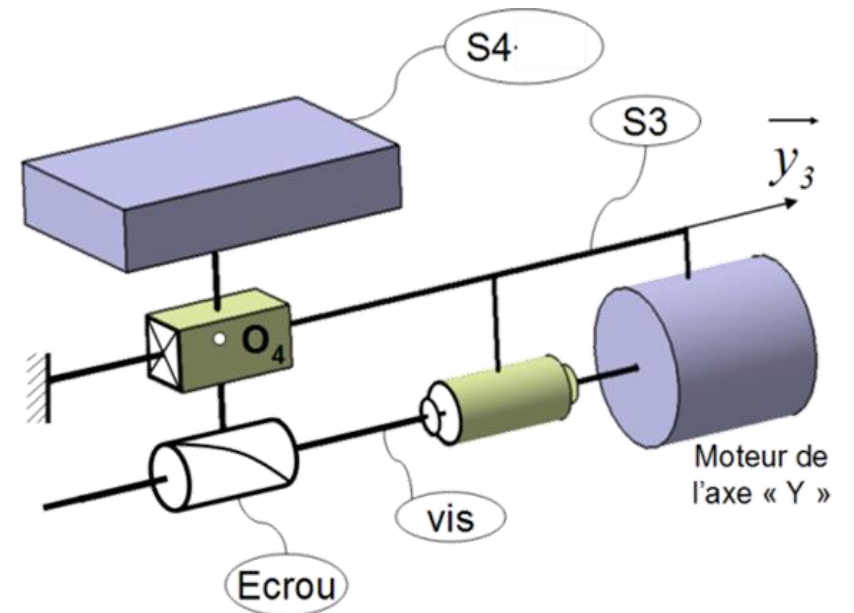


En appliquant le théorème de l'énergie cinétique sur le système matériel  $\Sigma$ , déterminer l'expression du couple moteur  $c_m(t)$ .

$$4^{\circ} \quad \frac{d}{dt} E_c(\Sigma/R_3) = P(\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma/R_3) + P(\text{inta}\Sigma)$$

$$J_{eq} \omega_m(t) \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \left( C_m(t) - \frac{p a \omega f_r(t)}{2\pi} \right) \omega_m(t)$$

$$\Rightarrow C_m(t) = J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{p a \omega f_r(t)}{2\pi}$$



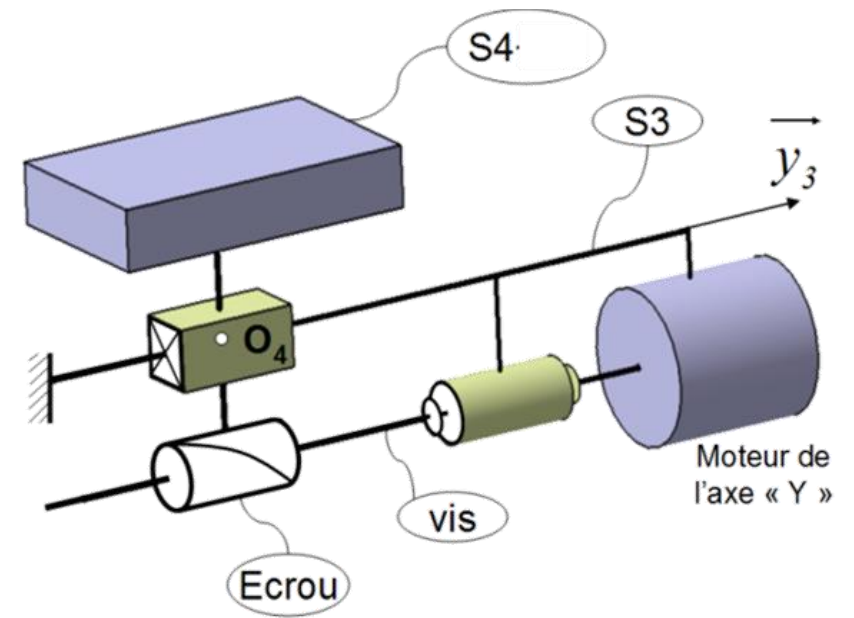
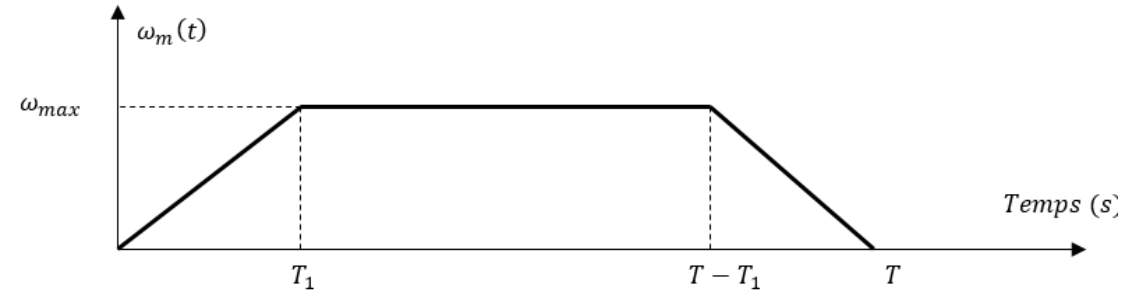
On donne dans la suite la loi de commande du moteur, compléter le tableau suivant :

5°

⊗  $[0, T_1[$  ;  $\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{\omega_{max}}{T_1}$   
 $\Rightarrow C_m(t) = J_{eq} \frac{\omega_{max}}{T_1} + \frac{p\omega_0}{2\pi} f_r(t)$

⊗  $[T_1, T-T_1[$  ;  $\frac{d\omega_m(t)}{dt} = 0$   
 $\Rightarrow C_m(t) = \frac{p\omega_0}{2\pi} f_r(t)$

⊗  $]T-T_1, T]$  ;  $\frac{d\omega_m(t)}{dt} = -\frac{\omega_{max}}{T_1}$   
 $\Rightarrow C_m(t) = -J_{eq} \frac{\omega_{max}}{T_1} + \frac{p\omega_0}{2\pi} f_r(t)$



Traduire les équations qui régissent le fonctionnement du moteur dans le domaine de Laplace sachant que les conditions initiales sont supposées nulles.

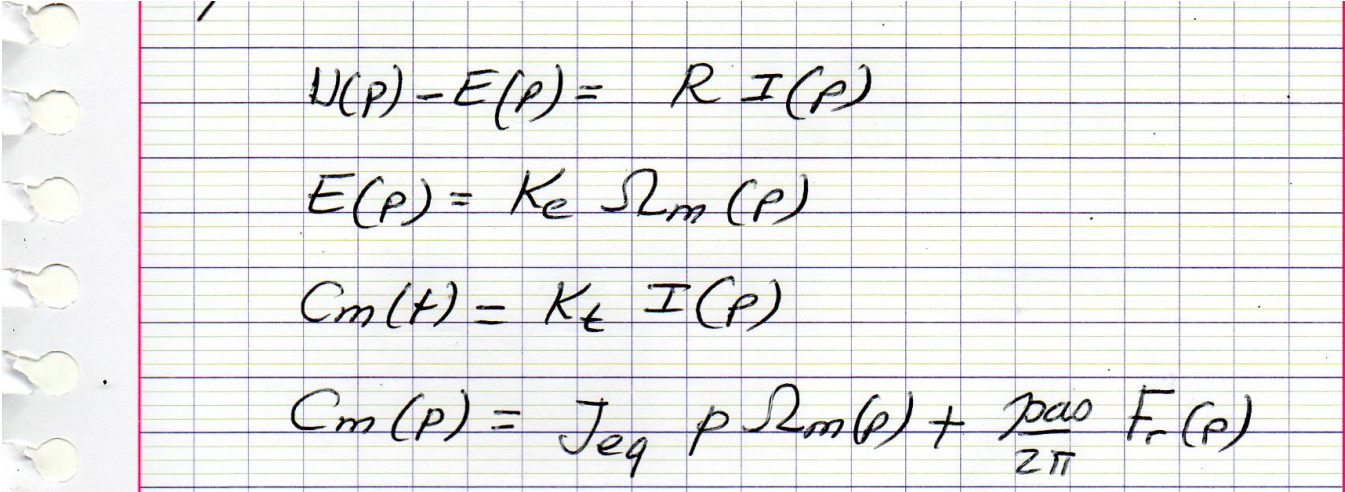
---

$$u(t) = e(t) + Ri(t)$$

$$e(t) = K_e \omega_m(t)$$

$$c_m(t) = K_t i(t)$$

$$c_m(t) = J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{pas}{2\pi} f_r(t)$$



The image shows a vertical strip of a spiral-bound notebook on the left, and a grid background on the right containing four handwritten equations in black ink. The equations are:  $U(p) - E(p) = R I(p)$ ,  $E(p) = K_e \Omega_m(p)$ ,  $C_m(p) = K_t I(p)$ , and  $C_m(p) = J_{eq} p \Omega_m(p) + \frac{pas}{2\pi} F_r(p)$ .

$$U(p) - E(p) = R I(p)$$

$$E(p) = K_e \Omega_m(p)$$

$$C_m(p) = K_t I(p)$$

$$C_m(p) = J_{eq} p \Omega_m(p) + \frac{pas}{2\pi} F_r(p)$$

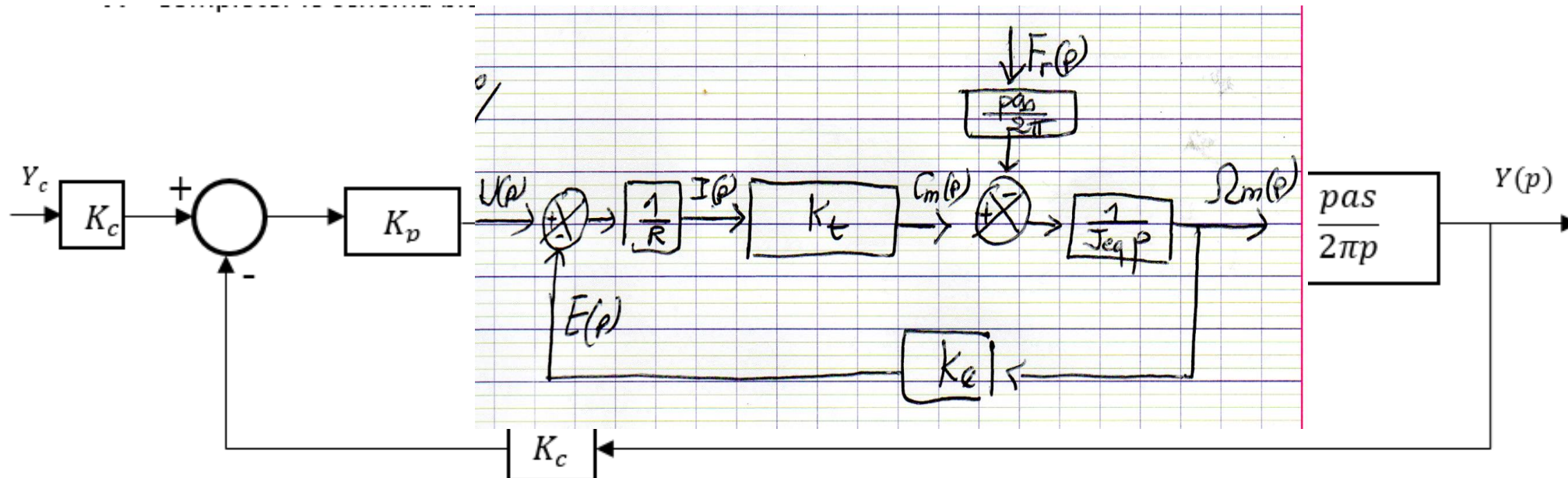
Compléter le schéma bloc suivant :

$$U(p) - E(p) = R I(p)$$

$$E(p) = K_e \Omega_m(p)$$

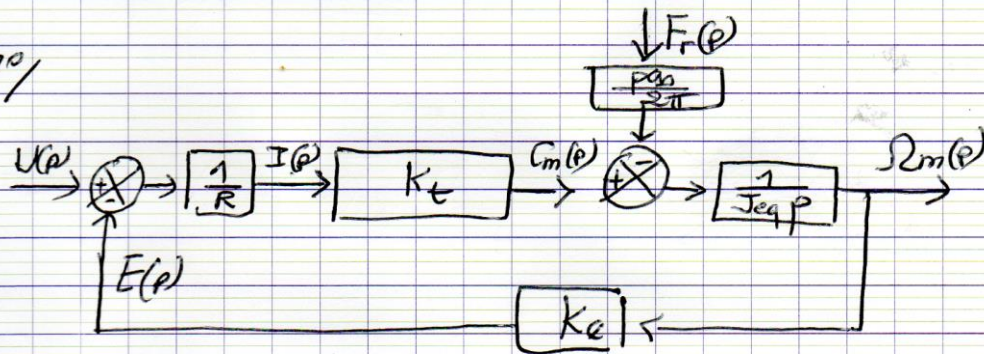
$$C_m(t) = K_t I(p)$$

$$C_m(p) = J_{eq} p \Omega_m(p) + \frac{p a_0}{2\pi} F_r(p)$$

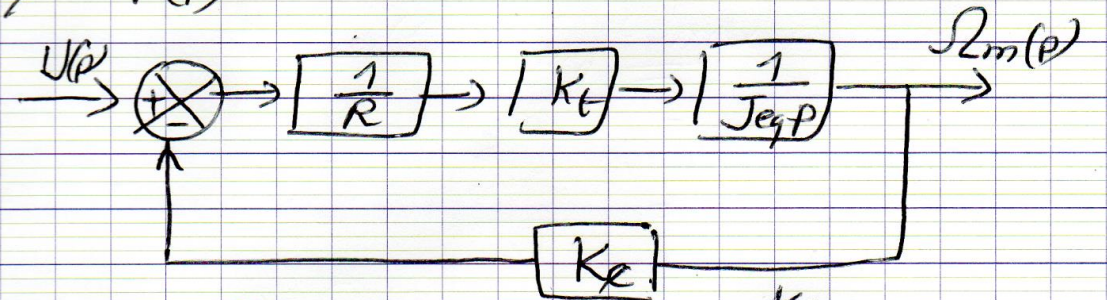


Déterminer la fonction de transfert  $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$  pour  $F_r(p) = 0$

7°



8°  $F_r(p) = 0$

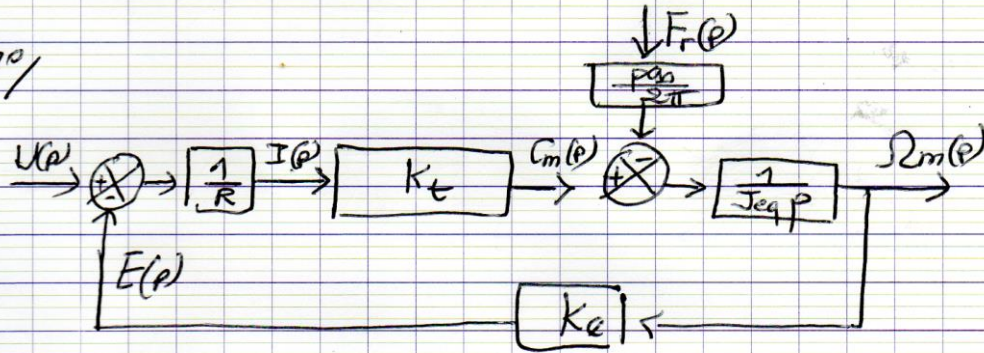


$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \Big|_{F_r(p)=0} = \frac{\frac{K_t}{R J_e q p}}{1 + \frac{K_t K_e}{R J_e q p}}$$

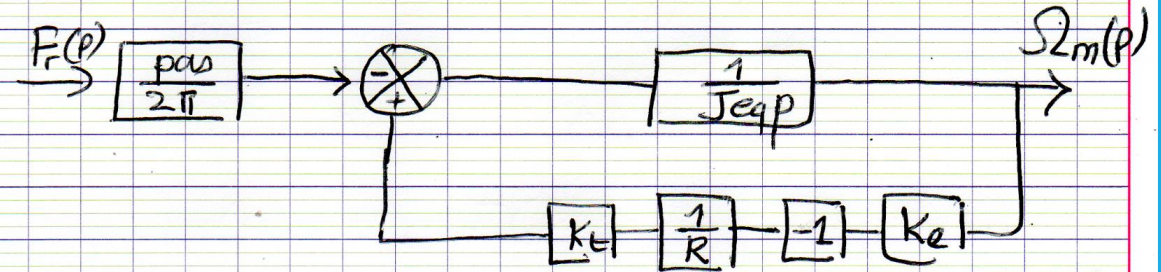
$$= \frac{K_t}{K_t K_e + R J_e q p}$$

Déterminer la fonction de transfert  $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{F_r(p)}$  pour  $U(p) = 0$

7°



9°  $U(p) = 0$

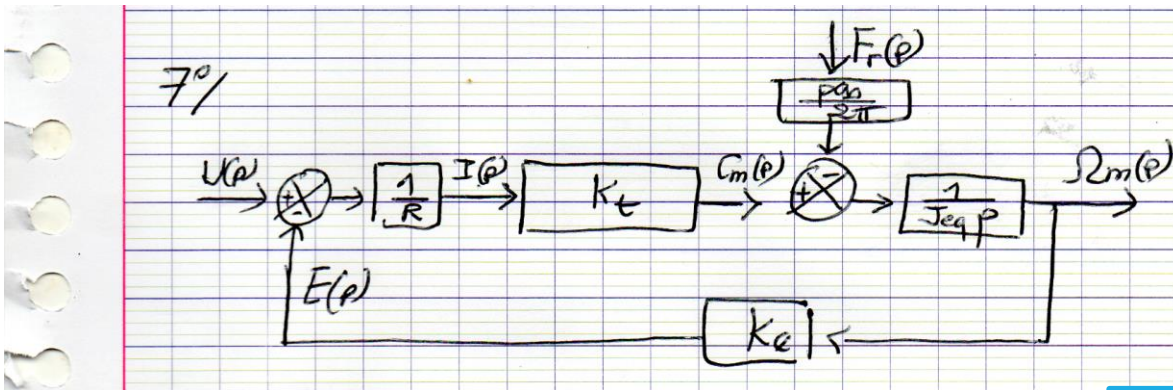


$$H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{F_r(p)} = -\frac{p\omega}{2\pi} \times \left( \frac{\frac{1}{J_{eq} p}}{1 + \frac{K_t K_e}{R J_{eq} p}} \right)$$

$$= \frac{-\frac{R p \omega}{2\pi}}{K_t K_e + R J_{eq} p}$$



Exprimer  $\Omega_m(p)$  en fonction de  $U(p)$  et  $F_r(p)$



10°

$$\Omega_m(p) = H_1(p) U_m(p) + H_2(p) F_r(p)$$

$$= \frac{1}{K_t K_e + R J_e q p} \left( K_t U(p) - \frac{R p \omega}{2\pi} F_r(p) \right)$$

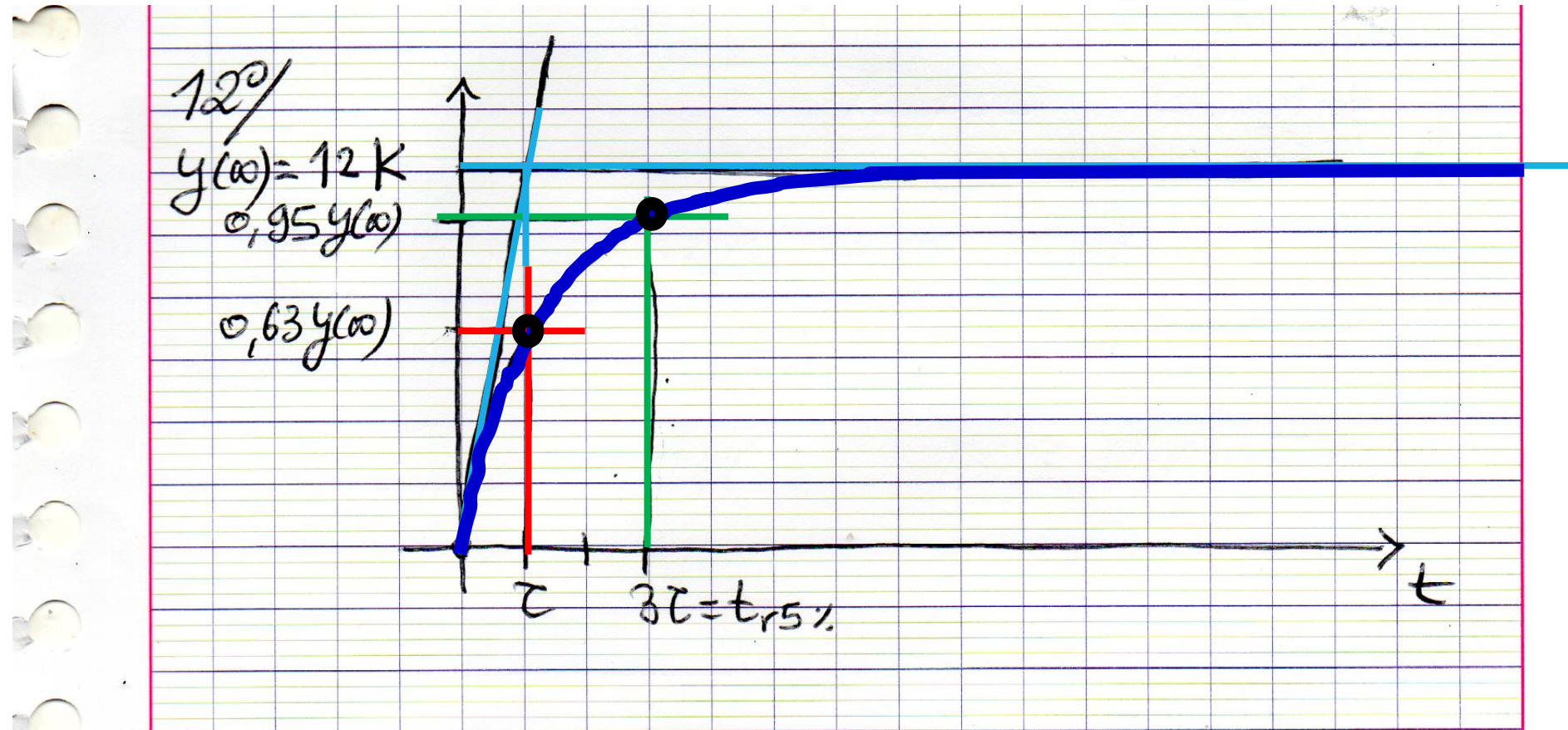
Dans la suite, on suppose que l'effort résistant  $f_r(t) = 0N$

Mettre  $H_1(p)$  sous la forme canonique d'un système de premier ordre  $\left(H(p) = \frac{K}{1+\tau p}\right)$  en déduire l'expression de  $K$  et  $\tau$ .

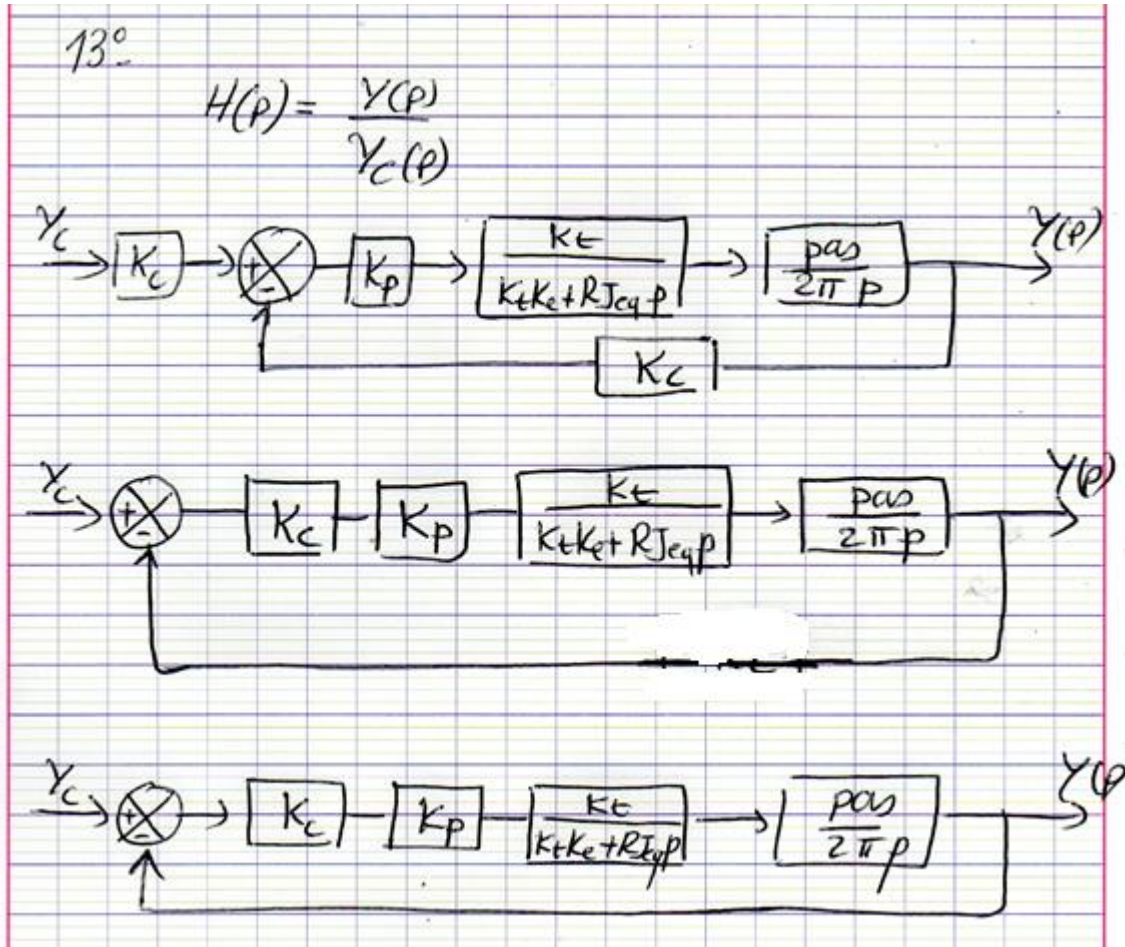
110/

$$F_r(p) = 0$$
$$H_1(p) = \frac{K_e}{K_t K_e + R J_{eq} p} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J_{eq}}{K_t K_e} p}$$
$$= \frac{K}{1 + \tau p} \quad \text{avec } \left. \begin{array}{l} K = \frac{1}{K_e} \\ \tau = \frac{R J_{eq}}{K_t K_e} \end{array} \right\}$$

Donner l'allure de la réponse indicielle  $\omega_m(t)$  pour une tension d'alimentation  $u(t)$  échelon d'amplitude 12V.



Déterminer la fonction de transfert  $H(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)}$



$$H(p) = \frac{K_c K_p K_t p \omega}{2\pi p (K_e K_e + R J_{eq} p)}$$

$$1 + \frac{K_c K_p K_t p \omega}{2\pi p (K_e K_e + R J_{eq} p)}$$

$$= \frac{K_c K_p K_t p \omega}{K_c K_p K_t p \omega + 2\pi p (K_e K_e + R J_{eq} p)}$$

Mettre  $H(p)$  sous la forme canonique d'un système de second ordre  $\left( \frac{K_s}{1 + 2\frac{m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \right)$   
 en déduire l'expression de  $K_s$ ,  $m$  et  $\omega_0$ .

14°

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\pi K_e}{K_c K_p p_{ao}} p + \frac{2\pi R J_{eq}}{K_c K_p K_t p_{ao}} p^2}$$

$$\begin{cases} K_s = 1 \\ \frac{2m}{\omega_0} = \frac{2\pi K_e}{K_c K_p p_{ao}} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{K_c K_p K_t p_{ao}}{2\pi R J_{eq}}} \end{cases}$$

$$m = \frac{\pi K_e}{K_c K_p p_{ao}} \sqrt{\frac{K_c K_p K_t p_{ao}}{2\pi R J_{eq}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi K_t K_e^2}{2 K_c K_p p_{ao} R J_{eq}}}$$

Exprimer, en fonction des paramètres du système, la valeur du correcteur  $K_p$  permettant d'avoir la réponse la plus rapide sans avoir de dépassement.

15°

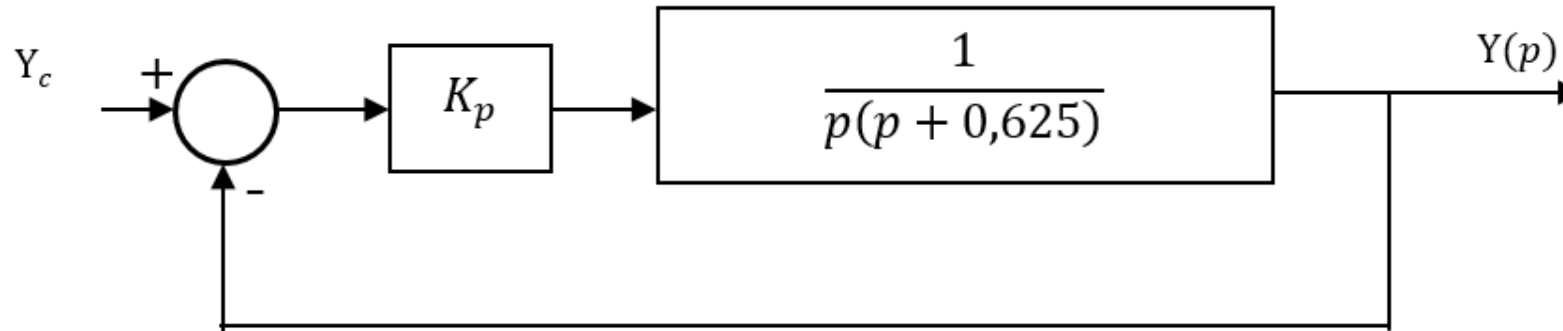
Réponse rapide sans dépassement  
pour un système de 2<sup>nd</sup> ordre:

$$m = 1$$

$$\frac{\pi K_t K_e^2}{2 K_c K_p \tau_{Jeq}} = 1$$

$$\Rightarrow K_p = \frac{\pi K_t K_e^2}{2 \tau_{Jeq} K_c K_p \text{ pas}}$$

Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $FTBF(p)$  et en boucle ouverte  $FTBO(p)$

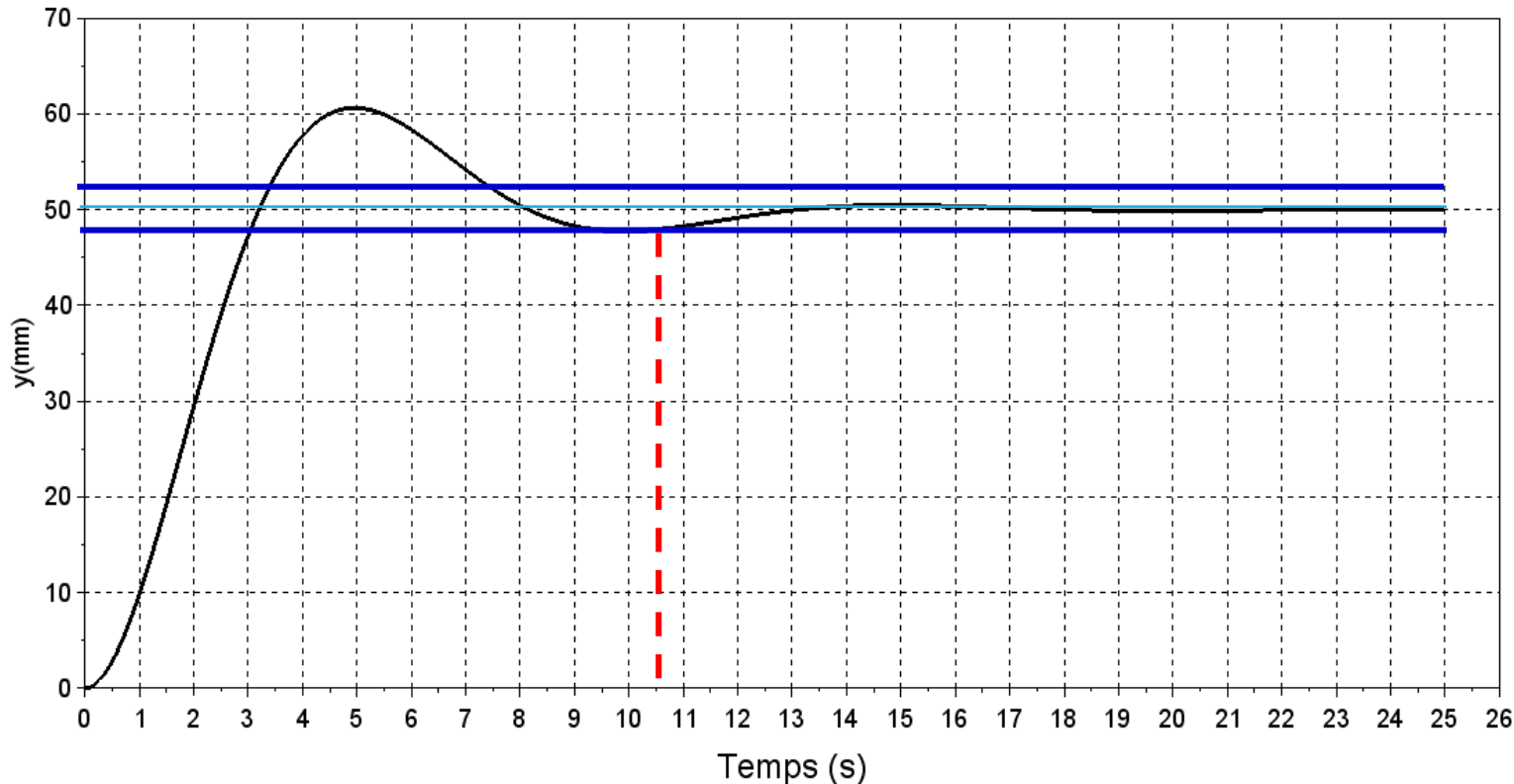


16°

$$FTBO(p) = \frac{K_p}{p(p + 0,625)}$$
$$FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$
$$= \frac{K_p}{K_p + p(p + 0,625)}$$

Déduire le temps de réponse à 5% et l'erreur de position. Conclure quant aux critères de rapidité et de précision sachant que le cahier des charges impose une erreur statique nulle et un temps de réponse minimum de 5s.

On donne ci-après la réponse indicielle du système de positionnement le long de l'axe « Y » pour une consigne de position  $y_c(t) = 50u(t)$  en mm.



$$t_{r5\%} = 10,5s$$

→ Cahier des charges non respecté

$$\varepsilon_s = 0$$

→ Cahier des charges respecté



# Merci pour votre attention

---

