Modélisation et paramétrage des liaisons mécaniques

Les mécanismes sont constitués de pièces mécaniques en liaisons les unes avec les autres. Ces liaisons sont supposées de géométries parfaites et sans jeu. On distingue deux familles de liaisons : liaisons simples et liaisons composées.

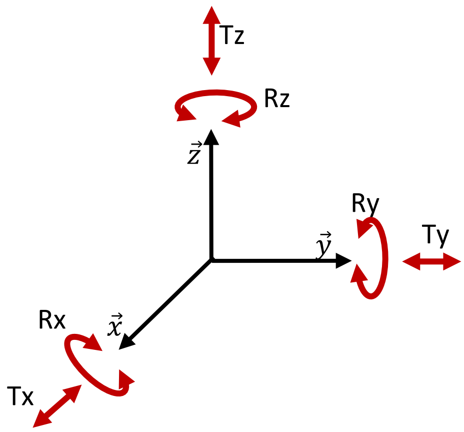
1. Liaisons simples

Une liaison simple est une liaison réalisée par le contact de deux surfaces simples : Plan, cylindre et sphère. Le tableau suivant rassemble les six liaisons simples :

	Plan	**Cylindre**	**Sphère**
Plan	Appui plan	Linéique rectiligne	Ponctuelle
Cylindre		Pivot glissant	Linéaire annulaire
Sphère			Rotule

Remarques :

- Pour étudier ces liaisons (simples ou composées), on adopte les notations et les hypothèses suivantes :
- Les liaisons sont supposées sans frottement (liaisons parfaites) ;
- Un solide placé librement dans l'espace peut faire six degrés de liberté indépendantes ; trois translations (Tx, Ty, Tz) et trois rotations (Rx, Ry, Rz) suivant les trois axes du repère choisi (figure suivante).



Avec :

Tx : translation suivant l'axe $\vec{x}$
Ty : translation suivant l'axe $\vec{y}$
Tz : translation suivant l'axe $\vec{z}$
Rx : rotation autour de l'axe $\vec{x}$
Ry : rotation autour de l'axe $\vec{y}$
Rz : rotation autour de l'axe $\vec{z}$

- Le torseur cinématique du solide S_j dans son mouvement par rapport au solide S_i au point A quelconque est noté par :

$$\{\vartheta(S_j/S_i)\}_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- Le torseur d'action mécanique ou torseur statique du solide S_i sur le solide S_j au point A quelconque est noté par :

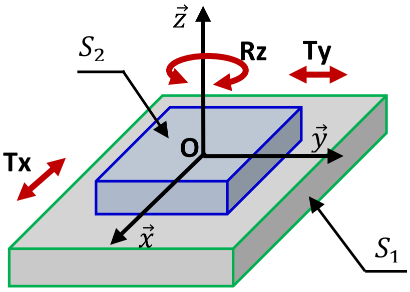
$$\{\mathcal{F}(S_i \rightarrow S_j)\}_A = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

- On note le nombre d'inconnues cinématiques par N_c (également le nombre de degrés de liberté par ddl)
- On note le nombre d'inconnue statique (inconnues d'actions mécaniques) par N_s.
- Pour une même liaison, on a : $N_s + N_c = 6$

1.1. Appui plan de normale $\vec{z}$

Modèle géométrique :

La liaison appui plan est réalisée par le contact entre deux surfaces planes. La figure suivante donne un modèle géométrique de cette liaison.



Degrés de liberté :

Le solide S_2 peut se translater suivant les axes $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ et faire uniquement une rotation autour de l'axe $\vec{z}$.

Le tableau suivant donne les degrés de libertés autorisés et non autorisés :

Translation	Tx	Ty	~~Tz~~
Rotation	~~Rx~~	~~Ry~~	Rz

Torseur cinématique : $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

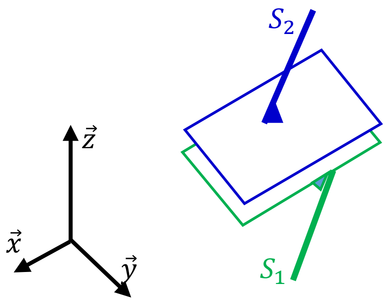
Torseur d'action mécanique : $\{\mathcal{F}(S_1 \to S_2)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Remarque :

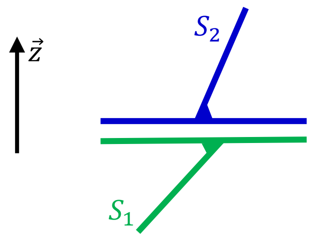
- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $N_c = 3$
- Le nombre d'inconnues d'actions mécaniques est : $N_s = 3$

Schématisation normalisée : Appui plan de normale $\vec{z}$

Représentation spatiale



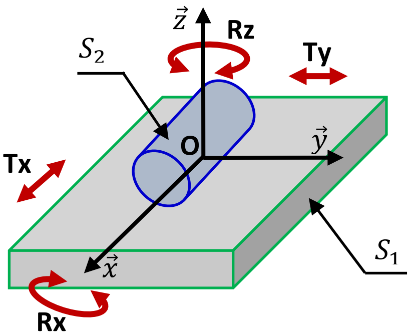
Représentation plane



1.2. Liaison linéique rectiligne d'axe $\vec{x}$ et de normale $\vec{z}$

Modèle géométrique :

La liaison linéique rectiligne est réalisée par le contact entre une surface cylindrique et une autre plane. La figure suivante donne deux modèles géométriques pour cette liaison.



Degrés de liberté :

Le solide S_2 peut se translater suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et faire deux rotations autour de l'axe $\vec{z}$ et l'axe $\vec{x}$.
Le tableau suivant donne les degrés de libertés autorisés et non autorisés :

Translation	Tx	Ty	~~Tz~~
Rotation	Rx	~~Ry~~	Rz

Torseur cinématique : $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

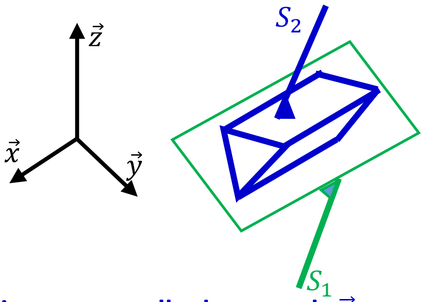
Torseur d'action mécanique : $\{\mathcal{F}(S_1 \to S_2)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Remarque :

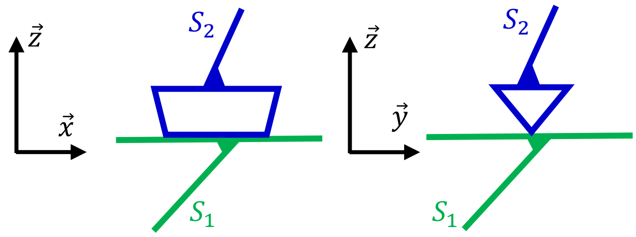
- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $N_c = 4$
- Le nombre d'inconnues d'actions mécaniques est : $N_s = 2$

Schématisation normalisée : Linéique rectiligne d'axe $\vec{x}$ et de normale $\vec{z}$

Représentation spatiale

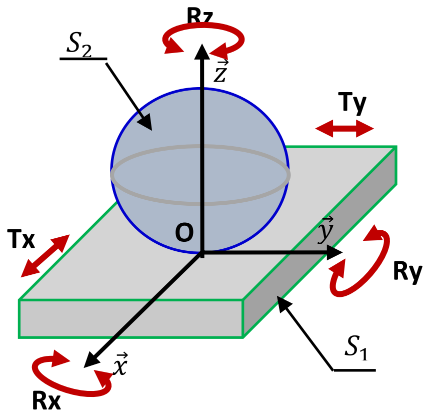


Représentation plane



1.3. Liaison ponctuelle de normale $\vec{z}$:

Modèle géométrique :
La liaison ponctuelle est réalisée par le contact entre une surface sphérique et une surface plane.



Degrés de liberté :
Le solide S_2 peut se translater suivant les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et faire trois rotations autour de l'axe $\vec{x}$, l'axe $\vec{y}$ et l'axe $\vec{z}$.
Le tableau suivant donne les degrés de libertés autorisés et non autorisés :

Translation	Tx	Ty	~~Tz~~
Rotation	Rx	Ry	Rz

Torseur cinématique : $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

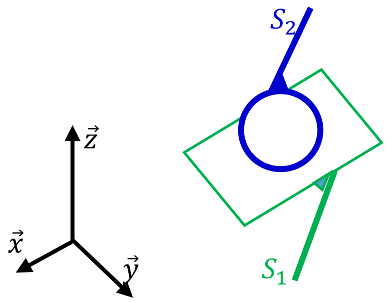
Torseur d'action mécanique : $\{\mathcal{F}(S_1 \to S_2)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

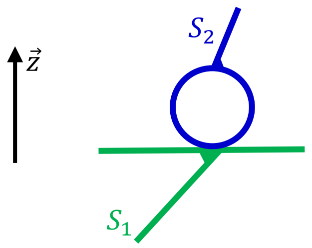
Remarque :

- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $N_c = 5$
- Le nombre d'inconnues d'actions mécaniques est : $N_s = 1$

Schématisation normalisée : liaison ponctuelle de normale $\vec{z}$

Représentation spatiale | **Représentation plane**

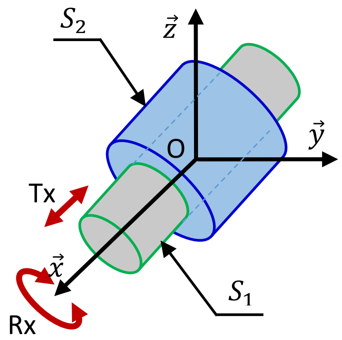




1.4. Liaison pivot glissant d'axe $\vec{x}$:

Modèle géométrique :

La liaison pivot glissant est réalisée par une surface cylindrique placée dans une autre surface cylindrique.



Degrés de liberté :

Le solide S_2 peut se translater suivant les axes $\vec{x}$ et faire une rotation autour de l'axe $\vec{x}$.

Le tableau suivant donne les degrés de libertés autorisés et non autorisés :

Translation	Tx	~~Ty~~	~~Tz~~
Rotation	Rx	~~Ry~~	~~Rz~~

Torseur cinématique : $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

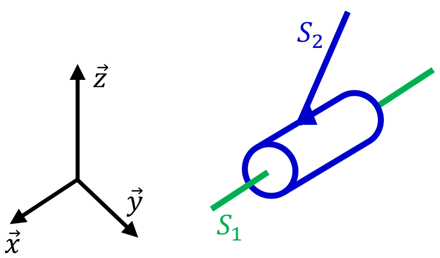
Torseur d'action mécanique : $\{\mathcal{F}(S_1 \to S_2)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

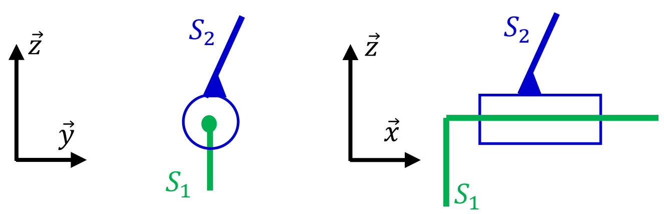
Remarque :

- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $N_c = 2$
- Le nombre d'inconnues d'actions mécaniques est : $N_s = 4$

Schématisations normalisées : pivot glissant d'axe $\vec{x}$

Représentation spatiale | **Représentation plane**

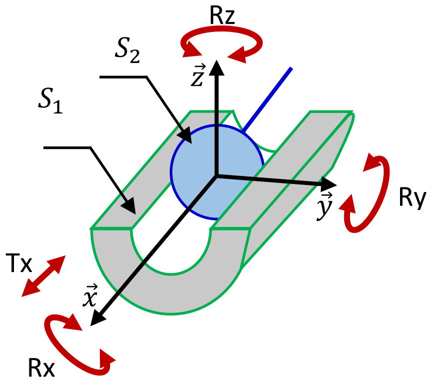




1.5. Liaison linéaire annulaire d'axe $\vec{x}$:

Modèle géométrique :

La liaison linéaire annulaire est réalisée par le contact entre une surface sphérique placée dans une surface cylindrique.



Degrés de liberté :

Le solide S_2 peut se translater suivant les axes $\vec{x}$ et faire trois rotations autour de l'axe $\vec{x}$, l'axe $\vec{y}$ et l'axe $\vec{z}$.

Le tableau suivant donne les degrés de libertés autorisés et non autorisés :

Translation	Tx	~~Ty~~	~~Tz~~
Rotation	Rx	Ry	Rz

Torseur cinématique : $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

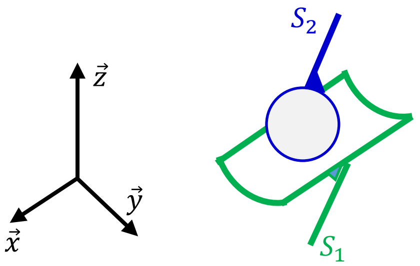
Torseur d'action mécanique : $\{\mathcal{F}(S_1 \to S_2)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Remarque :

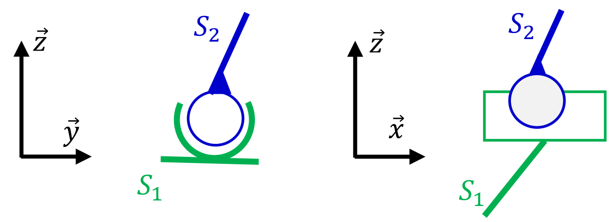
- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $N_c = 4$
- Le nombre d'inconnues d'actions mécaniques est : $N_s = 2$

Schématisation normalisée : linéaire annulaire d'axe $\vec{x}$

Représentation spatiale



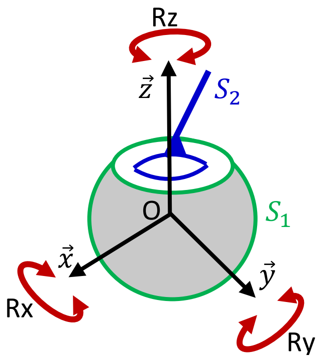
Représentation plane



3.1.6. Rotule de centre O :

Modèle géométrique :

La liaison rotule est réalisée par deux surfaces sphériques.



Degrés de liberté :
Le solide S_2 peut faire trois rotations autour de l'axe $\vec{x}$, l'axe $\vec{y}$ et l'axe $\vec{z}$.
Le tableau suivant donne les degrés de libertés autorisés et non autorisés :

Translation	~~Tx~~	~~Ty~~	~~Tz~~
Rotation	Rx	Ry	Rz

Torseur cinématique : $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

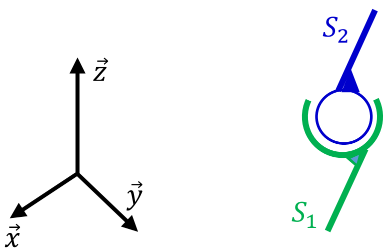
Torseur d'action mécanique : $\{\mathcal{F}(S_1 \rightarrow S_2)\}_A = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Remarque :

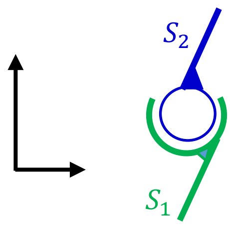
- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $N_c = 3$
- Le nombre d'inconnues d'actions mécaniques est : $N_s = 3$

Schématisation normalisée : liaison rotule de centre O

Représentation spatiale



Représentation plane

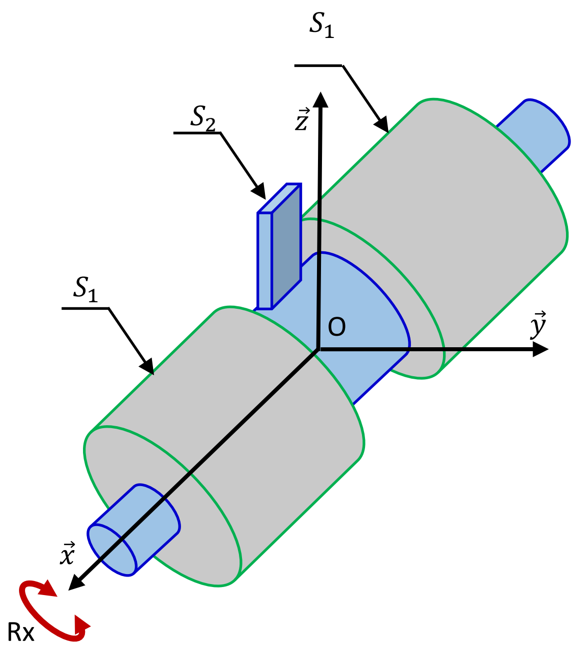


2. Liaisons composées

Une liaison composée est réalisée par l'association en série ou en parallèle d'au moins deux liaisons simples.

2.1. Liaison pivot d'axe $\vec{x}$

Modèle géométrique :
La liaison pivot n'autorise qu'une seule rotation autour de son axe.



Degrés de liberté :
Le solide S_2 peut faire une rotation autour de l'axe $\vec{x}$.
Le tableau suivant donne les degrés de libertés autorisés et non autorisés :

Translation	~~Tx~~	~~Ty~~	~~Tz~~
Rotation	Rx	~~Ry~~	~~Rz~~

Torseur cinématique : $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

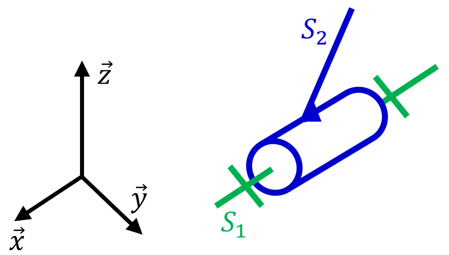
Torseur d'action mécanique : $\{\mathcal{F}(S_1 \rightarrow S_2)\}_A = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Remarque :

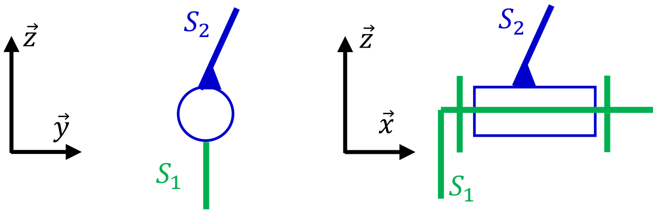
- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $N_c = 1$
- Le nombre d'inconnues d'actions mécaniques est : $N_s = 5$

Schématisation normalisée : Pivot d'axe $\vec{x}$

Représentation spatiale



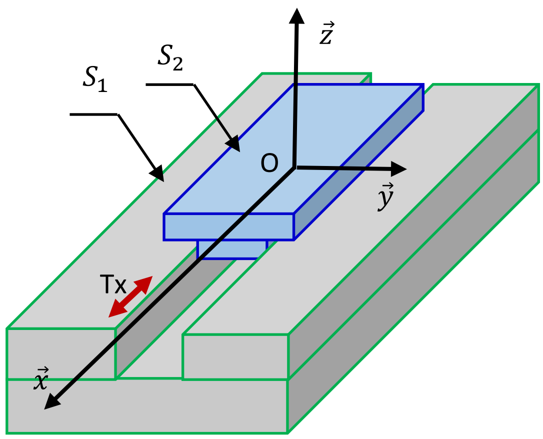
Représentation plane



2.2. Liaison glissière d'axe $\vec{x}$

Modèle géométrique :

La liaison glissière n'autorise qu'une seule translation.



Degrés de liberté :

Le solide S_2 peut faire une translation suivant l'axe $\vec{x}$.

Le tableau suivant donne les degrés de libertés autorisés et non autorisés :

Translation	Tx	~~Ty~~	~~Tz~~
Rotation	~~Rx~~	~~Ry~~	~~Rz~~

Torseur cinématique : $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

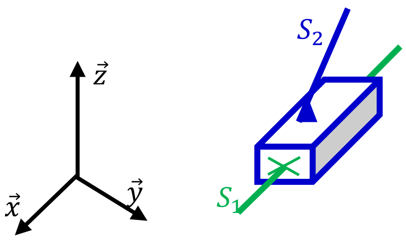
Torseur d'action mécanique : $\{\mathcal{F}(S_1 \rightarrow S_2)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Remarque :

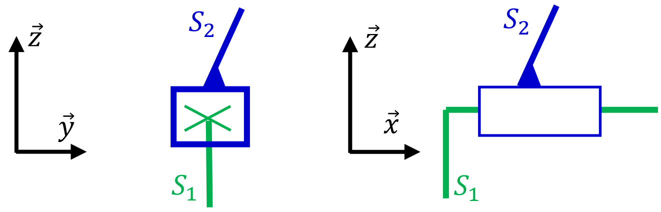
- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $N_c = 1$
- Le nombre d'inconnues d'actions mécaniques est : $N_s = 5$

Schématisation normalisée : Glissière d'axe $\vec{x}$

Représentation spatiale



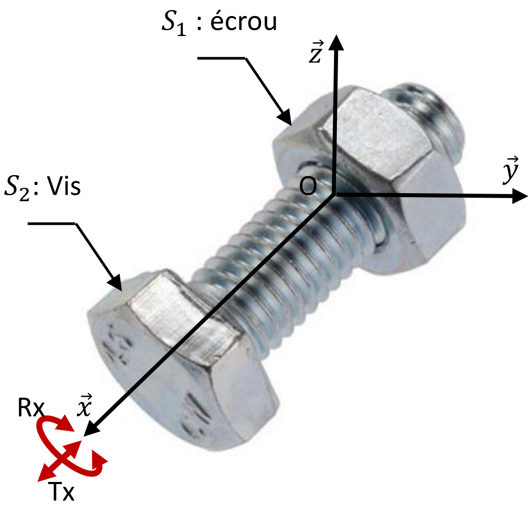
Représentation plane



2.3. Liaison hélicoïdale d'axe $\vec{z}$

Modèle géométrique :

La liaison hélicoïdale présente une rotation et une translation qui sont conjuguées. L'exemple typique de cette liaison est le système vis-écrou. La translation de la vis est liée avec sa rotation ou bien aussi la translation de l'écrou est liée à sa rotation. On distingue deux types de filetage : filetage à gauche et filetage à droite.



Degrés de liberté :

Le solide S_2 peut faire une rotation et une translation conjuguées suivant de l'axe $\vec{x}$.

Le tableau suivant donne les degrés de libertés autorisés et non autorisés :

Translation	Tx	~~Ty~~	~~Tz~~
Rotation	Rx	~~Ry~~	~~Rz~~

Torseur cinématique : $\{\vartheta(S_2/S_1)\}_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Avec :

- $v_x = +\frac{pas}{2\pi}\omega_x$ si le filetage est à droite
- $v_x = -\frac{pas}{2\pi}\omega_x$ si le filetage est à gauche

Torseur d'action mécanique : $\{\mathcal{F}(S_1 \rightarrow S_2)\}_A = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Avec :

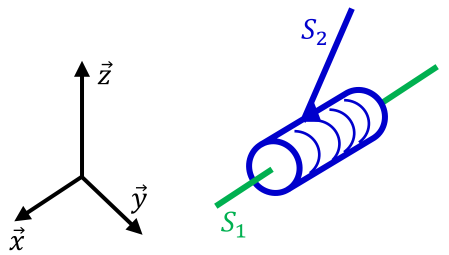
- $L_{12} = -\frac{pas}{2\pi}X_{12}$ si le filetage est à droite
- $L_{12} = +\frac{pas}{2\pi}X_{12}$ si le filetage est à gauche

Remarque :

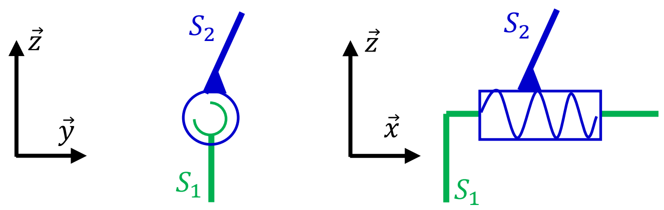
- Le nombre d'inconnues cinématiques est : $N_c = 1$
- Le nombre d'inconnues d'actions mécaniques est : $N_s = 5$

Schématisation normalisée : Pivot d'axe $\vec{x}$

Représentation spatiale



Représentation plane

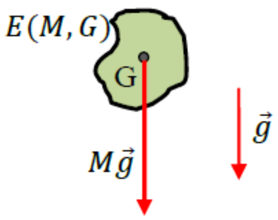


Modélisation de l'action de la pesanteur

On peut représenter globalement l'action de la pesanteur sur un système matériel E de masse m par un torseur suivant :

$$\{F(g \to E)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(g \to E) \\ \vec{M}_A(g \to E) \end{Bmatrix}.$$

Pour le modèle donné ci-dessous, l'action mécanique de la pesanteur sur le système matériel (E) de masse M et de centre d'inertie G est :



- Au point G ; centre d'inertie (centre de gravité ou centre de masse) du système matériel E, letorseur d'action mécanique de la pesanteur sur le système matériel E est donné par :

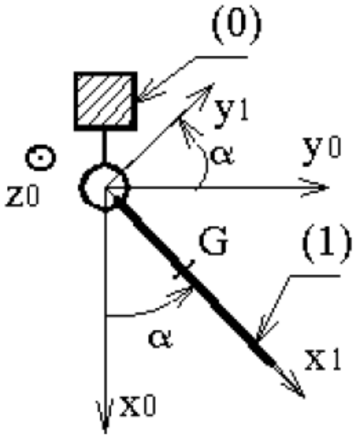
$$\{F(g \to E)\} = {}_G\begin{Bmatrix} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- Au point A quelconque, le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur le système matériel E est donné par :

$$\{F(g \to E)\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\vec{g} \\ \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g} \end{Bmatrix}$$

Application :

On considère le pendule simple (figure suivante) formé d'une tige (1) de masse m et de longueur 2a en liaison pivot avec le bâti (0). Le repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est lié au bâti et le repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)$ est lié à la tige. On demande de chercher le torseur d'action mécanique de la pesanteur au point G, centre d'inertie de la tige, puis au point O, origine du repère R_0.



Réponse :

1) le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur la tige (1) au point G, centre d'inertie, est le torseur suivant : $\{F(g \to 1)\} = {}_G\begin{Bmatrix} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} m\|\vec{g}\| & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$

2) le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur la tige (1) au point O, est le torseur suivant :

$$\{F(g \to 1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} m\vec{g} \\ \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} \end{Bmatrix}$$

avec $\overrightarrow{OG} = a\vec{x}_1$ et $\vec{g} = \|\vec{g}\|\vec{x}_0$ d'où on aura $\overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = ma\|\vec{g}\|\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_0 = -ma\|\vec{g}\|\sin\alpha\vec{z}_0$

$$\{F(g \to 1)\} = {}_O\begin{Bmatrix} m\|\vec{g}\|\vec{x}_0 \\ -ma\|\vec{g}\|\sin\alpha\vec{z}_0 \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} m\|\vec{g}\| & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -ma\|\vec{g}\|\sin\alpha \end{Bmatrix}_{R_0}$$

Théorèmes généraux de la statique des solides indéformables

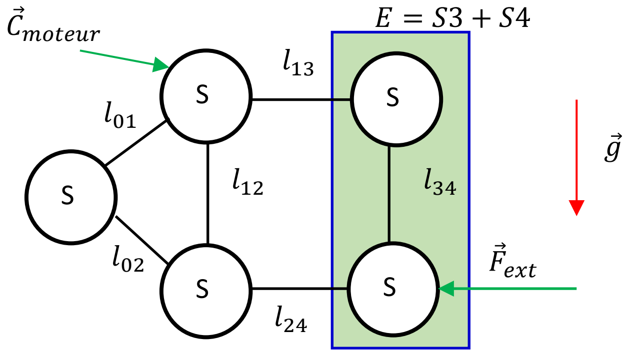
1. Extérieur d'un système matériel :

I.1. Définition :

L'extérieur d'un système matériel E est tout ce qui n'est pas E et capable d'exercer une action mécanique sur E. On le note par $\bar{E}$.

I.2. Exemple :

Soit l'exemple suivant (figure ci-dessous) représentant le graphe de liaisons d'un mécanisme composé de 5 pièces y compris le bâti. Un moteur agit sur le solide 1 et la machine réceptrice agit sur la pièce 3.



$E = S3 + S4$ ➔ $\bar{E} = \{S1, S2, \vec{g}, \vec{F}_{ext}\}$

On souligne que :

- ✓ L'action de S2 sur S4 est une action mécanique de la liaison L_{24},
- ✓ L'action de S1 sur S3 est une action mécanique de la liaison L_{13},
- ✓ L'action de la pesanteur sur 3 et 4 est une action à distance à déterminer,
- ✓ L'action mécanique $\vec{F}_{ext}$ sur S4 est généralement une donnée du problème,

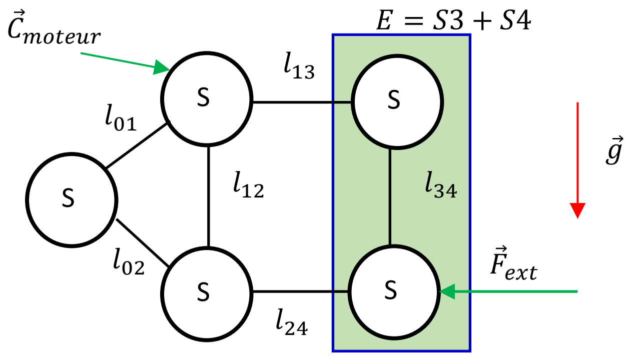
Le torseur d'action mécanique extérieur au système matériel E en un point A quelconque, est la somme du torseur d'action mécanique de la liaison L_{24}, le torseur d'action mécanique de la liaison L_{23}, le torseur d'action de la pesanteur sur 3, le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur 4 et l'action mécanique $\vec{F}_{ext}$ sur S4.

$$\{F(\bar{E} \to E)\}_A = \{F(S1 \to S3)\}_A + \{F(S2 \to S4)\}_A + \{F(g \to S3)\}_A + \{F(g \to S4)\}_A + \left\{F\left(\vec{F}_{ext} \to S4\right)\right\}_A$$

2. Actions mécaniques extérieures et intérieures :

- ✓ Une action mécanique extérieure au système matériel E est une action mécanique provenant de l'extérieur $\bar{E}$.
- ✓ Une action mécanique intérieure au système matériel E est une action mécanique s'exerçant mutuellement entre deux éléments de E.

Exemple :



Soit le système matériel $E = \{S3 + S4\}$, on a:

- ✓ L'action mécanique de S1 sur S3 est une action mécanique extérieure.
- ✓ L'action mécanique de S2 sur S4 est une action mécanique extérieure.
- ✓ L'action mécanique de la pesanteur sur S3 et S4 est une action mécanique extérieure.
- ✓ L'action mécanique entre la pièce S3 et la pièce S4 est une action mécanique intérieure.

3. Principe fondamental de la statique :

Pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un repère Galiléen, **il faut que** le torseur d'action mécanique extérieure à E soit nul :

$$\{F(\bar{E} \rightarrow E)\} = \{0\}$$

Remarque : Le sens inverse n'est pas toujours vrai, on peut citer l'exemple des ciseaux,
Pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un repère Galiléen, il faut et il suffit que :

- ✓ Il soit en équilibre au début de l'étude.
- ✓ Quel que soit un sous-système matériel e de E, on a : $\{F(\bar{e} \rightarrow e)\} = \{0\}$

4. Théorèmes généraux de la statique :

Le torseur d'action mécanique extérieure au système matériel E, au point A est le suivant :

$$\{F(\bar{E} \rightarrow E)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) \\ \vec{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) \end{Bmatrix}$$

4.1. Théorème de la résultante statique :

Pour un système matériel E en équilibre par rapport à un repère Galiléen, la résultante du torseur d'action mécanique extérieure à E est nulle.

$$\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0}$$

C'est une équation vectorielle à partir de laquelle découlent trois équations scalaires :

$$\begin{cases} \vec{x}.\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = 0 & (1) \\ \vec{y}.\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = 0 & (2) \\ \vec{z}.\vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = 0 & (3) \end{cases}$$

4.2. Théorème du moment statique :

Pour un système matériel E en équilibre par rapport à un repère Galiléen, le moment du torseur d'action mécanique extérieure à E est nul.

$$\vec{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0}$$

C'est une équation vectorielle à partir de laquelle découlent trois équations scalaires :

$$\begin{cases} \vec{x}.\vec{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) = 0 & (4) \\ \vec{y}.\vec{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) = 0 & (5) \\ \vec{z}.\vec{M}_A(\bar{E} \rightarrow E) = 0 & (6) \end{cases}$$

5. Théorème des actions mutuelles :

L'action mécanique d'un système matériel $E1$ sur un système matériel $E2$ ($E1 \subset \overline{E2}$) est opposée à l'action mécanique de $E2$sur $E1$.

$$\{F(E2 \rightarrow E1)\} = -\{F(E1 \rightarrow E2)\}$$