Cinétique des solides indéformables

1-Torseur cinétique :

Soit E un système matériel de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère R.

1.1. Définition

Le torseur cinétique du système matériel E dans son mouvement par rapport à un repère R est, en un point A quelconque, le torseur suivant :

$$\{C(E/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} \int_{P\in E} \vec{V}(P/R)dm \\ \int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)dm \end{Bmatrix}$$

- $\int_{P\in E} \vec{V}(P/R)dm$: La résultante cinétique de E dans son mouvement par rapport à R
- $\int_{P\in E} \overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)dm$: Le moment cinétique au point A, de E dans son mouvement par rapport à R. On le note habituellement par : $\vec{\sigma}_A(E/R)$.

1.2. Expression de la résultante cinétique

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_{P\in E}\overrightarrow{OP}dm \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[m\overrightarrow{OG}\right]_R = \left[\frac{d}{dt}\int_{P\in F}\overrightarrow{OP}dm\right]_R$$

Compte tenu du principe de conservation de la masse :

$$m\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}\right]_R = \int_{PGE}\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_R dm \Rightarrow m\vec{V}(G/R) = \int_{PEF}\vec{V}(P/R)dm$$

D'où l'expression du torseur cinétique du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R est le suivant :

$$\{C(E/R)\} = {}_A\begin{Bmatrix} m\vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}_A(E/R) \end{Bmatrix}$$

Avec : $\vec{\sigma}_B(E/R) = \vec{\sigma}_A(E/R) + m\vec{V}(G/R)\wedge\overrightarrow{AB}$

Lorsque le système matériel E se réduit à une masse ponctuelle m au point P, le torseur cinétique devient :

$$\{C(P/R)\} = {}_P\begin{Bmatrix} m\vec{V}(P/R) \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\vec{V}(P/R) \\ \overrightarrow{AP}\wedge m\vec{V}(P/R) \end{Bmatrix}$$

1.3. Moment cinétique d'un solide :

Le moment cinétique d'un solide S, au point A, dans son mouvement par rapport au repère R est :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P\in S/R)dm$$

Si de plus $A\in S$, *Alors* $\vec{V}(P\in S/R) = \vec{V}(A\in S/R) + \vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}$

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_A(S/R) &= \int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\left[\vec{V}(A\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right]dm \\ &= \int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(A\in S/R)dm + \int_{P\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\left[\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right]dm \\ &= \left(\int_{P\in S}\overrightarrow{AP}dm\right)\wedge\vec{V}(A\in S/R) + \left[I_A(S)\right]\vec{\Omega}(S/R) \\ &= m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A\in S/R) + \left[I_A(S)\right]\vec{\Omega}(S/R)\end{aligned}$$

Le moment cinétique du solide (S), de masse m et de centre d'inertie G, dans son mouvement par rapport à R est le vecteur suivant :

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A\in S/R) + \left[I_A(S)\right]\vec{\Omega}(S/R)$$

Remarques :

1. $\left[I_A(S)\right]$ et $\vec{\Omega}(S/R)$ doivent être exprimer dans la même base. Il est conseillé d'exprimer $\vec{\Omega}(S/R)$ dans la base où on a exprimé la matrice d'inertie.
2. Si le point A est fixe dans le repère R : $\vec{\sigma}_A(S/R)=\left[I_A(S)\right]\vec{\Omega}(S/R)$
3. Si le point A et le centre d'inertie G sont confondus : $\vec{\sigma}_G(S/R)=\left[I_G(S)\right]\vec{\Omega}(S/R)$

2-Torseur dynamique :

2.1. Définition

Le torseur dynamique du système matériel E dans son mouvement par rapport à un repère R est, en un point A quelconque, le torseur suivant :

$$\left\{D(E/R)\right\}=\left\{\begin{array}{c}\int_{P\in E}\vec{\Gamma}(P/R)\,dm\\ \int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\Gamma}(P/R)\,dm\end{array}\right\}_A$$

- $\int_{P\in E}\vec{\Gamma}(P/R)\,dm$: La résultante dynamique de E dans son mouvement par rapport à R
- $\int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{\Gamma}(P/R)\,dm$: Le moment dynamique au point A, de E dans son mouvement par rapport à R. On le note par : $\vec{\delta}_A(E/R)$.

2.2. Expression de la résultante dynamique

$$m\vec{V}(G/R)=\int_{P\in E}\vec{V}(P/R)dm\Rightarrow\frac{d}{dt}\left[m\vec{V}(G/R)\right]_R=\left[\frac{d}{dt}\int_{P\in E}\vec{V}(P/R)dm\right]_R$$

Compte tenu du principe de conservation de la masse :

$$m\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(G/R)\right]_R=\int_{P\in E}\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(G/R)\right]_R dm$$

$$m\vec{\Gamma}(G/R)=\int_{P\in E}\vec{\Gamma}(P/R)dm$$

D'où l'expression du torseur dynamique du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R est le suivant :

$$\left\{D(E/R)\right\}=\left\{\begin{array}{c}m\vec{\Gamma}(G/R)\\ \vec{\delta}_A(E/R)\end{array}\right\}_A$$

Avec $\vec{\delta}_B(E/R)=\vec{\delta}_A(E/R)+m\vec{\Gamma}(G/R)\wedge\overrightarrow{AB}$

Lorsque le système matériel E se réduit à une masse ponctuelle m au point P, le torseur cinétique devient :

$$\left\{D(P/R)\right\}=\left\{\begin{array}{c}m\vec{\Gamma}(P/R)\\ \vec{0}\end{array}\right\}_P=\left\{\begin{array}{c}m\vec{\Gamma}(P/R)\\ \overrightarrow{AP}\wedge m\vec{\Gamma}(P/R)\end{array}\right\}_A$$

2.3. Expression du moment dynamique :

$$\vec{\sigma}_A(E/R)=\int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\,dm$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R=\frac{d}{dt}\left[\int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\,dm\right]_R=\int_{P\in E}\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R)\right]_R dm$$

$$=\int_{P\in E}\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{AP}\right]_R\wedge\vec{V}(P/R)\,dm+\int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(P/R)\right]_R dm$$

$$=\int_{P\in E}\left[\vec{V}(P/R)-\vec{V}(A/R)\right]\wedge\vec{V}(P/R)\,dm+\int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{\Gamma(P/R)}dm$$

$$=\vec{\delta}_A(E/R)-\vec{V}(A/R)\wedge\int_{P\in E}\vec{V}(P/R)\,dm=\overrightarrow{\delta_A(E/R)}-\vec{V}(A/R)\wedge m\vec{V}(G/R)$$

Soit finalement :

$$\vec{\delta}_A(E/R)=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R+m\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(G/R)$$

Le moment dynamique du solide (S), de masse m et de centre d'inertie G, dans son mouvement par rapport à R est le vecteur suivant :

$$\vec{\delta}_A(E/R)=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_A(E/R)\right]_R+m\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(G/R)$$

Remarques :

1. Le vecteur vitesse $\vec{V}(A/R)=\left.\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_R$, il se calcule uniquement par dérivation
2. Si le point A est fixe dans le repère R : $\vec{\delta}_A(S/R)=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_A(S/R)\right]_R$
3. Si le point A et le centre d'inertie G sont confondus : $\vec{\delta}_G(S/R)=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_G(S/R)\right]_R$
4. Si les vecteurs vitesses $\vec{V}(A/R)\;et\;\vec{V}(P/R)$ sont parallèles : $\vec{\delta}_A(S/R)=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_A(S/R)\right]_R$

3-Méthode de résolution :

$$\begin{tikzcd}
\left[I_G(S)\right] \arrow[r, "5"] \arrow[d, "1"] & \left[I_A(S)\right] \arrow[d, "6"] \\
\vec{\sigma}_G(S/R) \arrow[r, "4"] \arrow[d, "2"] & \vec{\sigma}_A(S/R) \arrow[d, "7"] \\
\vec{\delta}_G(S/R) \arrow[r, "3"] & \vec{\delta}_A(S/R)
\end{tikzcd}$$

$(1):\quad \vec{\sigma}_G(S/R)=\left[I_G(S)\right]\vec{\Omega}(S/R)$

$(2):\quad \vec{\delta}_G(S/R)=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_G(S/R)\right]_R$

$(3):\quad \vec{\delta}_A(S/R)=\vec{\delta}_G(S/R)+m\vec{\Gamma}(G\in S/R)\wedge\overrightarrow{GA}$

$(4):\quad \vec{\sigma}_A(S/R)=\vec{\sigma}_G(S/R)+m\vec{V}(G\in S/R)\wedge\overrightarrow{GA}$

$(5):\quad \textit{Théorème de Hyguens}$

$(6):\quad \vec{\sigma}_A(S/R)=m\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A\in S/R)+\left[I_A(S)\right]\vec{\Omega}(S/R)$

$(7):\quad \vec{\delta}_A(S/R)=\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}_A(S/R)\right]_R+\vec{V}(A/R)\wedge m\vec{V}(G/R)$

4-Energie cinétique :

4.1. Définition :

L'énergie cinétique du système matériel E dans son mouvement par rapport repère R est le scalaire suivant :

$$E_C(E/R)=\frac{1}{2}\int_{P\in E}\left[\vec{V}(P/R)\right]^2 dm$$

4.2. Cas du solide :

Soit (S) : un solide de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à R.

$$E_C(S/R)=\frac{1}{2}\int_{P\in E}\left(\vec{V}(P\in S/R)\right)^2 dm$$

$$2E_C(S/R)=\int_{P\in E}\vec{V}(P\in S/R).\vec{V}(P\in S/R)dm$$

$$Si\ le\ point\ A\in(S),\vec{V}(P\in S/R)=\vec{V}(A\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}$$

$$2E_C(S/R)=\int_{P\in E}\left(\vec{V}(A\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AP}\right).\vec{V}(P\in S/R)dm$$

$$=\vec{V}(A\in S/R)\int_{P\in E}\vec{V}(P\in S/R)dm+\int_{P\in E}\left(\overrightarrow{\Omega(S/R)}\wedge\overrightarrow{AP}\right).\vec{V}(P\in S/R)dm$$

$$=\vec{V}(A\in S/R)m\vec{V}(G\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\int_{P\in E}\overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P\in S/R)dm$$

$$=\vec{V}(A\in S/R)m\vec{V}(G\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}$$

$$=\{\vartheta(S/R)\}_A\otimes\{C(S/R)\}_A$$

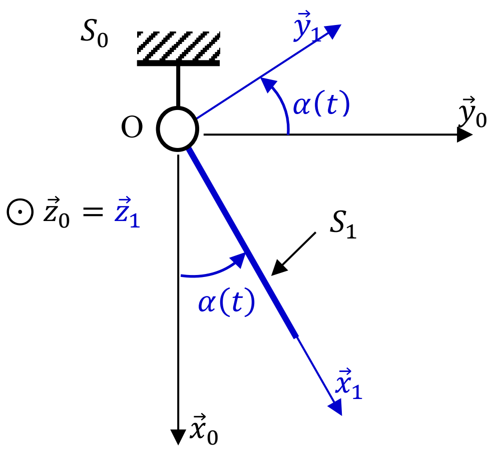
L'énergie cinétique du solide S dans son mouvement par rapport repère R est le scalaire suivant :

$$2E_C(S/R)=\vec{V}(A\in S/R)m\vec{V}(G\in S/R)+\vec{\Omega}(S/R)\overrightarrow{\sigma_A(S/R)}$$

$$=\{\vartheta(S/R)\}_A\otimes\{C(S/R)\}_A$$

Remarques :

1. Si le solide S est supposé de masse négligeable, alors $E_c(S/R)=0$
2. Si le système matériel $\Sigma=\{S_1,S_2\ldots S_n\}$, alors $E_c(\Sigma/R)=\sum_{i=1}^{n}E_c(S_i/R)$
3. Si le solide (S_1) est animé d'un mouvement de rotation pure autour de l'axe $(O,\vec{z}_0)$ du repère R, soient : $I_{Oz_0}=C$ et $\vec{\Omega}(S_1/R_0)=\dot{\alpha}\vec{z}_0$, alors, $E_c(S_1/R)=\frac{1}{2}C\dot{\alpha}^2$



4. Si le solide (S_1), de masse m_1, est animé d'une translation pure de paramètre $\lambda(t)$ suivant par exemple l'axe $(O,\vec{x}_0)$, alors, $E_c(S_1/R)=\frac{1}{2}m_1\dot{\lambda}^2$