CODE CNIM :

CONCOURS 2018

ÉPREUVE DE SCIENCE DE L'INGENIEUR

Partie 1 : Vérification des performances cinématiques du concasseur à mâchoire

Phase de concassage :

Question 1 : (8pts)

$\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_4O_1} = \vec{0}$ (2pts)

$r_0\vec{y}_0 + r_2\vec{y}_2 + r_3\vec{y}_3 + r_4\vec{y}_4 = \vec{0}$ (2pts)

$r_0\binom{1}{0} + r_2\binom{\cos\theta_2}{\sin\theta_2} + r_3\binom{\cos\theta_3}{\sin\theta_3} + r_4\binom{\cos\theta_4}{\sin\theta_4} = \binom{0}{0}$ (2pts)

$\begin{cases} \boldsymbol{r_0 + r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 + r_4\cos\theta_4 = 0} \\ \boldsymbol{r_2\sin\theta_2 + r_3\sin\theta_3 + r_4\sin\theta_4 = 0} \end{cases}$ **(2pts)**

Question 2 : (8pts)

On a :

$\begin{cases} -r_4\cos\theta_4 = r_0 + r_2\cos\theta_2 + r_3\cos\theta_3 \\ -r_4\sin\theta_4 = r_2\sin\theta_2 + r_3\sin\theta_3 \end{cases}$

$r_4^2 = r_0^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2r_0r_2\cos\theta_2 + 2r_0r_3\cos\theta_3 + 2r_2r_3\cos\theta_2\cos\theta_3 + 2r_2r_3\sin\theta_2\sin\theta_3$

D'où la première équation de Freudenstein découle:

$\cos(\theta_3 - \theta_2) = \frac{r_4^2 - r_0^2 - r_2^2 - r_3^2}{2r_2r_3} - \frac{r_0}{r_3}\cos\theta_2 - \frac{r_0}{r_2}\cos\theta_3$ (1pt)

$\boldsymbol{K_1 = -\frac{r_0}{r_2}}$, $\boldsymbol{K_2 = -\frac{r_0}{r_3}}$ et $\boldsymbol{K_3 = \frac{r_4^2 - r_0^2 - r_2^2 - r_3^2}{2r_2r_3}}$ **(3pts=1+1+1)**

De même :

$\begin{cases} -r_3\cos\theta_3 = r_0 + r_2\cos\theta_2 + r_4\cos\theta_4 \\ -r_3\sin\theta_3 = r_2\sin\theta_2 + r_4\sin\theta_4 \end{cases}$

$r_3^2 = r_0^2 + r_2^2 + r_4^2 + 2r_0r_2\cos\theta_2 + 2r_0r_4\cos\theta_4 + 2r_2r_4\cos\theta_2\cos\theta_4 + 2r_2r_4\sin\theta_2\sin\theta_4$

D'où la deuxième équation de Freudenstein découle:

$\cos(\theta_4 - \theta_2) = \frac{r_3^2 - r_0^2 - r_2^2 - r_4^2}{2r_2r_4} - \frac{r_0}{r_4}\cos\theta_2 - \frac{r_0}{r_2}\cos\theta_4$ (1pt)

$\boldsymbol{K'_1 = -\frac{r_0}{r_2}}$, $\boldsymbol{K'_2 = -\frac{r_0}{r_4}}$ et $\boldsymbol{K'_3 = \frac{r_3^2 - r_0^2 - r_2^2 - r_4^2}{2r_2r_4}}$ **(3pts=1+1+1)**

Question 3 : (8pts)

$\Delta\theta_4 \approx 4{,}1° < 5°$ ➔ Cahier des charges vérifié (4pts=2+2)

$\Delta\theta_3 \approx 1{,}8° < 2°$ ➔ Cahier des charges vérifié (4pts=2+2)

Question 4 : (8pts)

$\theta_2 = 292°$ (4pts)

Dans cette position, la mâchoire mobile se rapproche le maximum de la mâchoire fixe. (4pts)

Question 5 : (8pts)

$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3P} = r_0\vec{y}_0 + r_2\vec{y}_2 + y_{P3}\vec{y}_0 + z_{P3}\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} r_0 + y_{P3} \\ z_{P3} \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix}$ (4pts)

D'où :

$\begin{cases} y_p = r_0 + y_{P3} + r_2\cos\theta_2 \\ z_p = z_{P3} + r_2\sin\theta_2 \end{cases}$ (4pts)

Question 6 : (8pts)

* Le point qui sera utile pour le réglage de CSS est le point O_4. (2pts)

* $Throw = \Delta z \approx 15mm$ (d'après la courbe 10(c)) (2pts)

$\Delta z \approx 15mm < 20mm$ ➔ Cahier des charges respecté (4pts=2+2)

Phase de réglage de l'écartement : Closed Side Set (CSS)

Question 7 : (8pts)

$\overrightarrow{O_5O_3} + \overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_4O_1} + \overrightarrow{O_1O_5} = \vec{0}$ (2pts)

$a_0\vec{y}_0 + b_0\vec{z}_0 + r_3\vec{y}_3 + r_4\vec{y}_4 + y(t)\vec{y}_5 = \vec{0}$ (2pts)

$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} \cos\theta_3 \\ \sin\theta_3 \end{pmatrix} + r_4 \begin{pmatrix} \cos\theta_4 \\ \sin\theta_4 \end{pmatrix} + y(t) \begin{pmatrix} \cos\theta_5 \\ \sin\theta_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2pts)

$\begin{cases} \boldsymbol{a_0 + r_3\cos\theta_3 + r_4\cos\theta_4 + y(t)\cos\theta_5 = 0} \\ \boldsymbol{b_0 + r_3\sin\theta_3 + r_4\sin\theta_4 + y(t)\sin\theta_5 = 0} \end{cases}$ (2pts)

Question 8 : (8pts)

On a :

$\begin{cases} a_0 + r_3\cos\theta_3 + y(t)\cos\theta_5 = -r_4\cos\theta_4 \\ b_0 + r_3\sin\theta_3 + y(t)\sin\theta_5 = -r_4\sin\theta_4 \end{cases}$

$$r_4^2 = (a_0 + y(t)\cos\theta_5)^2 + (b_0 + y(t)\sin\theta_5)^2 + r_3^2 + 2r_3\cos\theta_3\,(a_0 + y(t)\cos\theta_5) + 2r_3\sin\theta_3\,(b_0 + y(t)\sin\theta_5)$$ (1pt)

Soit encore: (1pts)

$$\frac{r_4^2 - r_3^2 - (a_0+y(t)\cos\theta_5)^2 - (b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}{2r_3\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}} = \frac{\cos\theta_3(a_0+y(t)\cos\theta_5)}{\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}} + \frac{\sin\theta_3(b_0+y(t)\sin\theta_5)}{\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}}$$

Soit α tel que :

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{(a_0+y(t)\cos\theta_5)}{\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{(b_0+y(t)\sin\theta_5)}{\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}} \end{cases}$$

D'où :

$\cos(\theta_3 - \alpha) = \dfrac{r_4^2 - r_3^2 - (a_0+y(t)\cos\theta_5)^2 - (b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}{2r_3\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}}$ (1pt)

avec $\alpha = \pm\,\mathrm{acos}\left(\dfrac{(a_0+y(t)\cos\theta_5)}{\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}}\right) + 2k\pi$ (1pt)

De même:

$\begin{cases} a_0 + r_4\cos\theta_4 + y(t)\cos\theta_5 = -r_3\cos\theta_3 \\ b_0 + r_4\sin\theta_4 + y(t)\sin\theta_5 = -r_3\sin\theta_3 \end{cases}$

$$r_3^2 = (a_0 + y(t)\cos\theta_5)^2 + (b_0 + y(t)\sin\theta_5)^2 + r_4^2 + 2r_4(a_0 + y(t)\cos\theta_5)\cos\theta_4 + 2r_4(b_0 + y(t)\sin\theta_5)\sin\theta_4$$ (1pt)

Soit encore: (1pt)

$$\frac{r_3^2 - r_4^2 - (a_0+y(t)\cos\theta_5)^2 - (b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}{2r_4\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}} = \frac{\cos\theta_4(a_0+y(t)\cos\theta_5)}{\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}} + \frac{\sin\theta_4(b_0+y(t)\sin\theta_5)}{\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}}$$

Soit β tel que :

$$\begin{cases} \cos\beta = \dfrac{(a_0+y(t)\cos\theta_5)}{\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}} \\ \sin\beta = \dfrac{(b_0+y(t)\sin\theta_5)}{\sqrt{(a_0+y(t)\cos\theta_5)^2+(b_0+y(t)\sin\theta_5)^2}} \end{cases}$$

D’où :

$\cos(\theta_4 - \beta) = \frac{r_3^2 - r_4^2 - (a_0 + y(t)\cos\theta_5)^2 - (b_0 + y(t)\sin\theta_5)^2}{2r_4\sqrt{(a_0 + y(t)\cos\theta_5)^2 + (b_0 + y(t)\sin\theta_5)^2}}$ (1pt)

avec $\beta = \pm \operatorname{acos}\left(\frac{(a_0 + y(t)\cos\theta_5)}{\sqrt{(a_0 + y(t)\cos\theta_5)^2 + (b_0 + y(t)\sin\theta_5)^2}}\right) + 2k\pi$ (1pt)

Question 9 : (8pts)

$\theta_3(°) = \frac{162-147}{-400+700} y(mm) + b = 0{,}05y(mm) + b$

$b = 162 - 0{,}05 \times (-400) = 182°$

D’où :

$\boldsymbol{\theta_3(°) = 0{,}05y(mm) + 182°}$ **(4pts)**

De même :

$\theta_4(°) = \frac{236-202}{-400+700} y(mm) + b' = 0{,}113y(mm) + b'$

$b' = 236 - 0{,}113 \times (-400) = 281{,}3°$

D’où :

$\boldsymbol{\theta_4(°) = 0{,}113y(mm) + 281{,}3°}$ **(4pts)**

Question 10 : **(8pts)**

On a: $L_0\vec{z}_0 = CSS\vec{z}_0 + \vec{z}_0.\overrightarrow{O_1O_4} + \vec{z}_0.\overrightarrow{O_5O_1}$ **(4pts)**

Soit encore: $L_0\vec{z}_0 = CSS\vec{z}_0 - \vec{z}_0.\begin{pmatrix} r_4\cos\theta_4 \\ r_4\sin\theta_4 \end{pmatrix} - \vec{z}_0.\begin{pmatrix} y(t)\cos\theta_5 \\ y(t)\sin\theta_5 \end{pmatrix}$ ➔ $L_0 = CSS - r_4\sin\theta_4 - y(t)\sin\theta_5$

D'où:

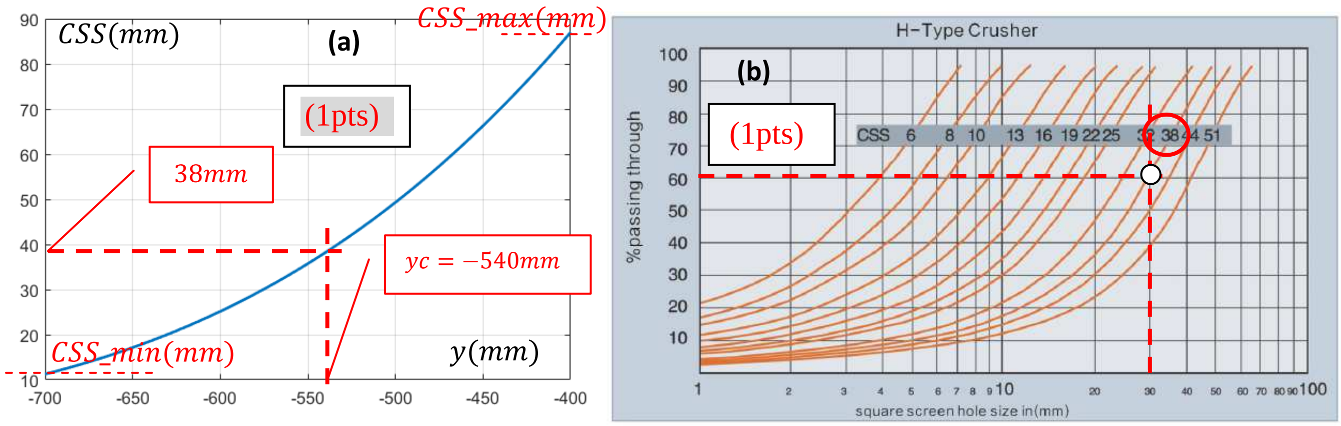
$$\boldsymbol{CSS = L_0 + r_4\sin\theta_4 + y(t)\sin\theta_5}$$ **(4pts)**

Question 11 : **(8pts)**

D'après la courbe (a) : $CSS\_min = 12mm\ et\ CSS\_max = 87mm$ (2pts)

A partir de la courbe (b), On détermine $CSS = 38mm$ (2pts)

D'après la courbe (a), on détermine $y_c = -540mm$ (2pts)



(a) Evolution du CSS (Closed Side Set) en fonction de l'allongement y du vérin.

(b) Courbe de production de concasseur type PE400×600

Partie 2 : Vérification des performances du système de réglage de *CSS*

Masse equivalente ramenée sur l'axe du vérin :

Question 12 : **(8pts)**

$\{\vartheta(S_4/R_0)\}_{G_4} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_4/R_0) \\ \vec{V}(G_4 \in S_4/R_0) \end{Bmatrix}$ (2pts)

$\vec{\Omega}(S_4/R_0) = \dot{\theta}_4\vec{x}_0$ (3pts)

$\vec{V}(G_4 \in S_4/R_0) = \vec{V}(O_1 \in S_4/R_0) + \vec{\Omega}(S_4/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1G_4} = -\dot{y}(t)\overrightarrow{y_5} + \dot{\theta}_4\vec{x}_0 \wedge -y_{G4}\overrightarrow{y_4} = -\dot{y}(t)\overrightarrow{y_5} - y_{G4}\dot{\theta}_4\overrightarrow{z_4}$ (3pts)

$$\boldsymbol{\{\vartheta(S_4/R_0)\}_{G_4} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_4\vec{x}_0 \\ -\dot{y}(t)\overrightarrow{y_5} - y_{G4}\dot{\theta}_4\overrightarrow{z_4} \end{Bmatrix}}$$

Question 13 : (8pts)

$$\{C(S_4/R_0)\}_{G_4} = \begin{Bmatrix} m_4\vec{V}(G_4 \in S_4/R_0) \\ \vec{\sigma}_{G4}(S_4/R_0) \end{Bmatrix} \quad \text{(2pts)}$$

$$\vec{\sigma}_{G4}(S_4/R_0) = [I_{G4}]\vec{\Omega}(S_4/R_0) = A_4\dot{\theta}_4\vec{x}_0 \quad \text{(3pts)}$$

$$m_4\vec{V}(G_4 \in S_4/R_0) = \boldsymbol{-m_4\left(\dot{y}(t)\overrightarrow{y_5} + y_{G4}\dot{\theta}_4\overrightarrow{z_4}\right)} \quad \textbf{(3pts)}$$

$$\boldsymbol{\{C(S_4/R_0)\}_{G_4}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{-m_4\left(\dot{y}(t)\overrightarrow{y_5} + y_{G4}\dot{\theta}_4\overrightarrow{z_4}\right)} \\ \boldsymbol{A_4\dot{\theta}_4\vec{x}_0} \end{Bmatrix}$$

Question 14 : (8pts)

$$E_c(\Sigma/R_0) = E_c(S_3/R_0) + E_c(S_4/R_0) + E_c(S_5/R_0) \quad \text{(1pt)}$$

$$E_c(S_3/R_0) = \frac{1}{2}A_3\dot{\theta}_3^2 \quad \text{(1pt)}$$

$$E_c(S_5/R_0) = \frac{1}{2}m_5\dot{y}(t)^2 \quad \text{(1pt)}$$

$$E_c(S_4/R_0) = \frac{1}{2}\{\vartheta(S_4/R_0)\}_{G_4} \otimes \{C(S_4/R_0)\}_{G_4} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_4\vec{x}_0 \\ -\dot{y}(t)\overrightarrow{y_5} - y_{G4}\dot{\theta}_4\overrightarrow{z_4} \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} -m_4\left(\dot{y}(t)\overrightarrow{y_5} + y_{G4}\dot{\theta}_4\overrightarrow{z_4}\right) \\ A_4\dot{\theta}_4\vec{x}_0 \end{Bmatrix}$$

$$E_c(S_4/R_0) = \frac{1}{2}\left(A_4\dot{\theta}_4{}^2 + m_4\left(\dot{y}(t)^2 + y_{G4}{}^2\dot{\theta}_4{}^2 + 2y_{G4}\dot{y}(t)\dot{\theta}_4\sin(\theta_5 - \theta_4)\right)\right) \quad \text{(1pt)}$$

$$E_c(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2}\left(m_5\dot{y}(t)^2 + A_3\dot{\theta}_3^2 + A_4\dot{\theta}_4{}^2 + m_4\left(\dot{y}(t)^2 + y_{G4}{}^2\dot{\theta}_4{}^2 + 2y_{G4}\dot{y}(t)\dot{\theta}_4\sin(\theta_5 - \theta_4)\right)\right) \quad \text{(1pt)}$$

Soit encore :

$$E_c(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2}\left(m_5 + m_4 + A_4a_4{}^2 + A_3a_3^2 + m_4y_{G4}{}^2a_4{}^2 + 2m_4y_{G4}a_4\sin(\theta_5 - \theta_4)\right)\dot{y}(t)^2 \quad \text{(1pt)}$$

$$E_c(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2}M_{eq}\dot{y}(t)^2$$

Avec :

$$\boldsymbol{M_{eq} = m_5 + m_4 + A_4a_4{}^2 + A_3a_3^2 + m_4y_{G4}{}^2a_4{}^2 + 2m_4y_{G4}a_4\sin(\theta_5 - \theta_4)} \quad \text{(2pt)}$$

Question 15 : (8pts)

$\Delta M_{eq} = 681 - 651 = 30Kg$ (4pts)

L'hypothèse d'un système invariant n'est plus valable car la masse équivalente varie dans le domaine de fonctionnement du vérin. (4pts)

Asservissement de position du système de réglage de l'écartement CSS :

Modélisation du comportement du (Vérin + Masse équivalente)

Question 16 : (8pts)

Théorème de la résultante dynamique donne :

$\vec{R}(\bar{M} \rightarrow M) = M\ddot{y}(t)$

$M\ddot{y}(t) = -K_h y(t) + K_h \int_0^t \frac{q_1(\tau)}{S_1} d\tau - f_v \frac{dy(t)}{dt} - F(t)$ **(4pts)**

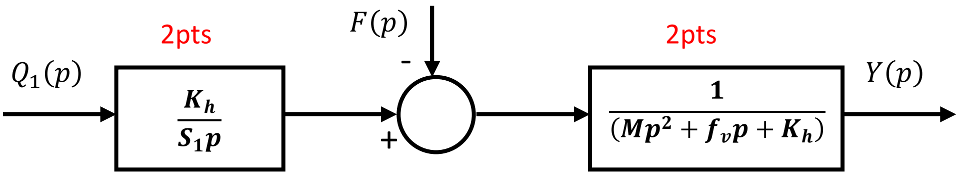
Soit finalement :

$$\boldsymbol{M\ddot{y}(t) + f_v \frac{dy(t)}{dt} + K_h y(t) = K_h \int_0^t \frac{q_1(\tau)}{S_1} d\tau - F(t)}$$ **(4pts)**

Question 17 : (8pts)

$Y(p)(Mp^2 + f_v p + K_h) = \frac{K_h Q_1(p)}{S_1 p} - F(p)$

$$Y(p) = \frac{1}{(Mp^2 + f_v p + K_h)} \left(\frac{K_h Q_1(p)}{S_1 p} - F(p) \right)$$ (4pts)



Question 18 : (8pts)

$Q_1(p) = 0,\ F(p) = \frac{F_0}{p}$

$Y(p) = \frac{-F(p)}{(Mp^2 + f_v p + K_h)} = \frac{-F_0}{p(Mp^2 + f_v p + K_h)}$

$\boldsymbol{\Delta y = \lim_{p \to 0} pY(p) = \lim_{p \to 0} \frac{-F_0}{(Mp^2 + f_v p + K_h)} = -\frac{F_0}{K_h}}$ **(4pts)**

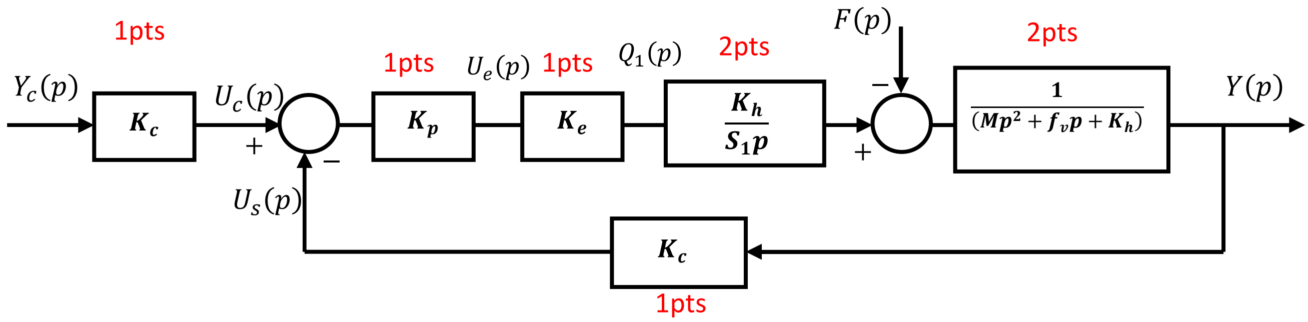
AN :

$|\Delta y| = \frac{F_0}{K_h} = \frac{5.10^2}{5.10^6} = 10^{-4} m = 0{,}1mm$ (2pts)

$|\Delta y| = 0{,}1mm > 0{,}05mm$ ➔ Cahier des charges non respecté (2pts=1+1)

Modélisation du système bouclé avec perturbation

Question 19 : **(8pts)**



Question 20 : **(8pts)**

$Y_c(p) = 0,$

$$P(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = -\frac{\frac{1}{(Mp^2+f_v p+K_h)}}{1+\frac{1}{(Mp^2+f_v p+K_h)}\frac{K_h K_e K_p K_c}{S_1 p}} = -\frac{pS_1}{K_h K_e K_p K_c + pS_1(Mp^2+f_v p+K_h)}$$

(8pts)

Question 21 : (8pts)

* $F(t) = F_0 u(t)$ ➔ $F(p) = \frac{F_0}{p}$

$\Delta y = \lim_{p\to 0} pY(p) = \lim_{p\to 0} pP(p)F(p) = 0$ (3pts)

* $F(t) = F_0 t u(t)$ ➔ $F(p) = \frac{F_0}{p^2}$

$|\Delta y| = \lim_{p\to 0} pY(p) = \lim_{p\to 0} pP(p)F(p) = \lim_{p\to 0} \frac{P(p)F_0}{p} = \frac{\boldsymbol{S_1 F_0}}{\boldsymbol{K_h K_e K_p K_c}}$ (3pts)

Afin de pallier à cette perturbation on utilise un correcteur à action intégrale : $C(p) = \frac{K_p}{p}$ (2pts)

Modélisation du système bouclé sans perturbation

Question 22 : (8pts)

* $FTBO(p) = \frac{25}{p(1+p)}$ (2pts)

* Classe 1 (3pts)

* Système précis (3pts)

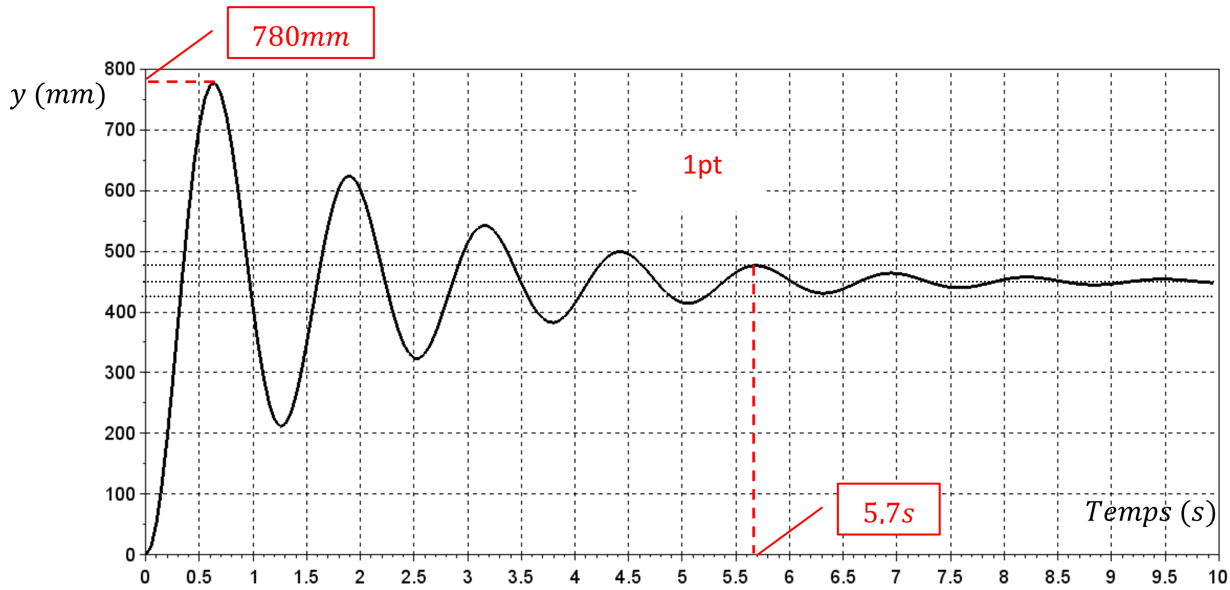
Question 23 : **(8pts)**

$t_{r5\%} \approx 5{,}7s$ ➔ cahier des charges non respecté (1,5pts=1+0,5)

$D\% \approx 100 \times \frac{780-450}{450} = 73{,}3\%$ ➔ cahier des charges non respecté (1,5pts=1+0,5)

$MG = +\infty$ ➔ cahier des charges respecté (1,5pts=1+0,5)

$M\varphi = 10° < 45°$ ➔ cahier des charges non respecté (1,5pts=1+0,5)



Réponse indicielle pour un échelon de position $y_c = 450mm$, C(p)=1

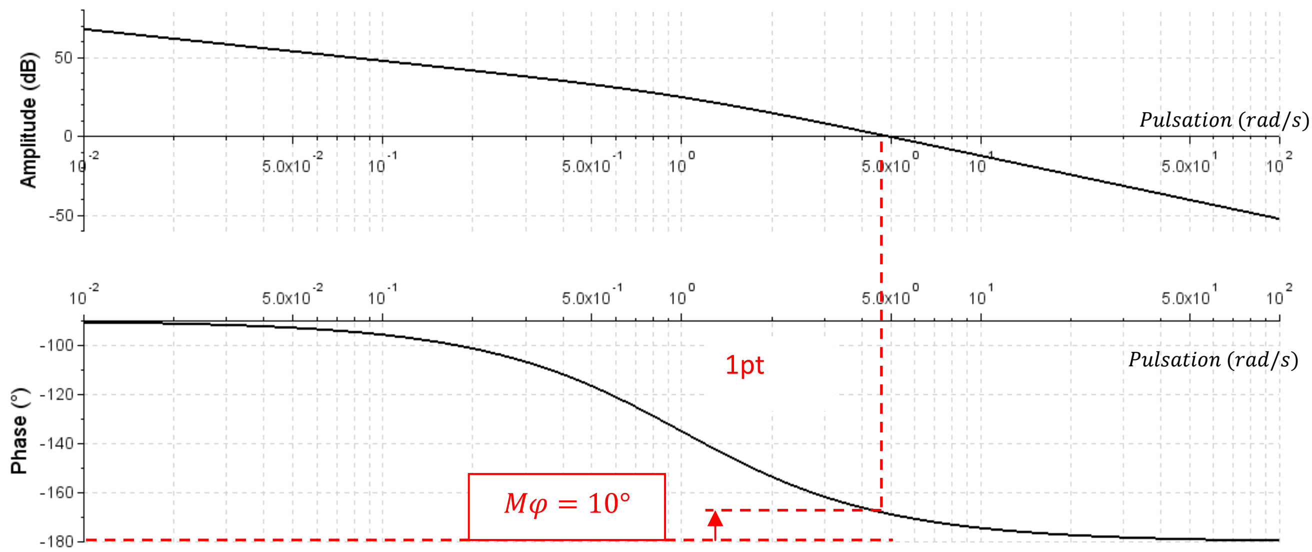


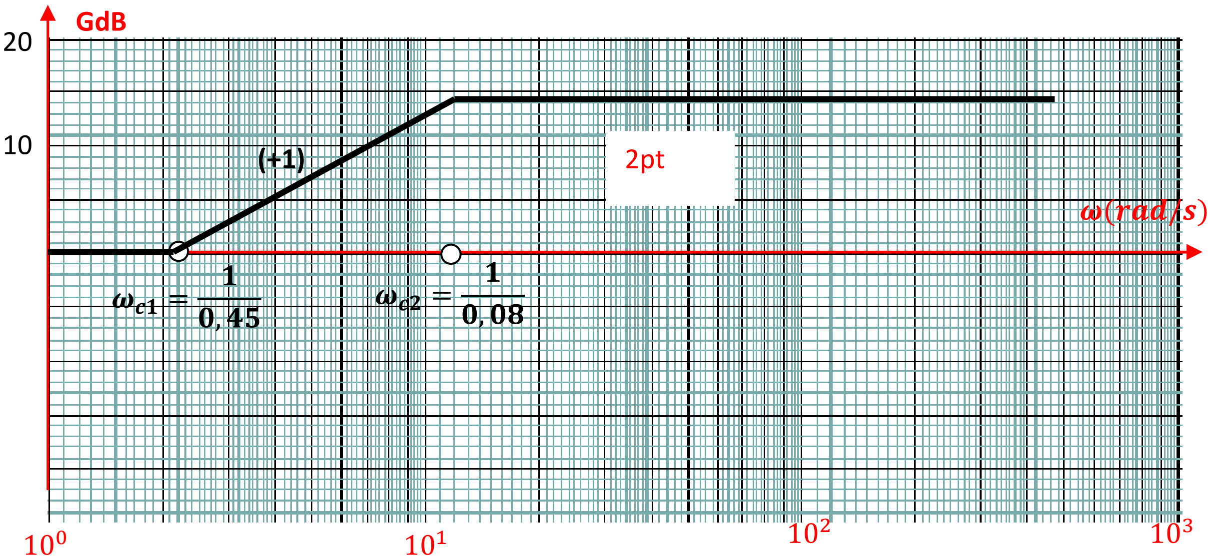
Diagramme de Bode de la FTBO, C(p)=1

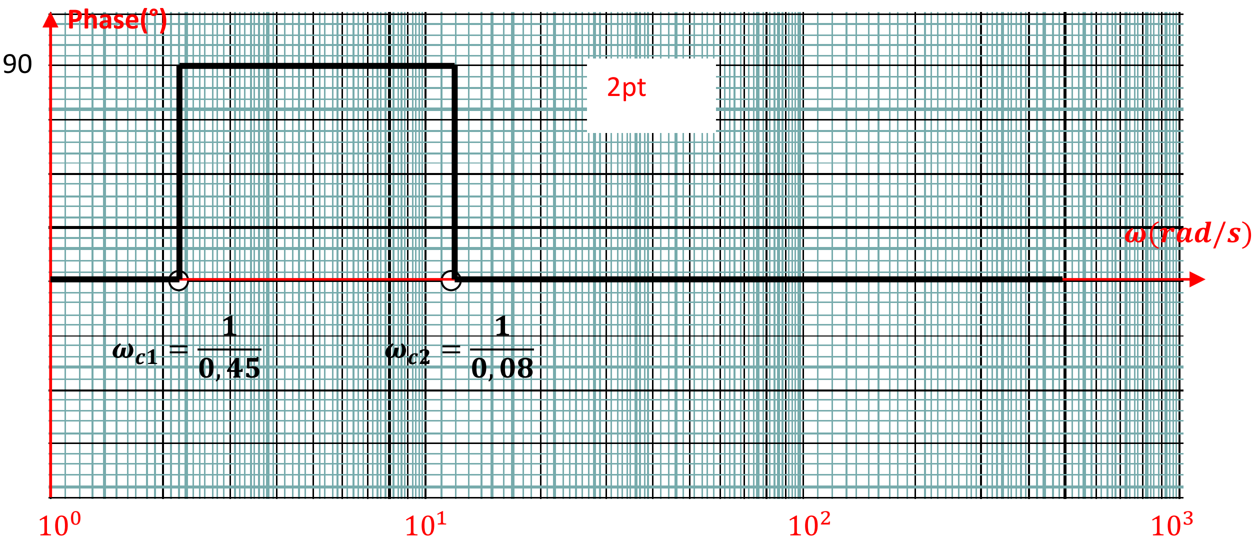
Question 24 : (8pts)

$$\omega_m = 5rad/s \text{ et } \varphi_m = 45° \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\tau\sqrt{a}} = 5 \\ \frac{a-1}{a+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau = \frac{1}{5\sqrt{a}} \\ a = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \approx 5{,}6 \\ \tau \approx 0{,}08s \end{cases}$$ (4pts)

$$C(p) = \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p} = \frac{1 + 0{,}45p}{1 + 0{,}08p}$$





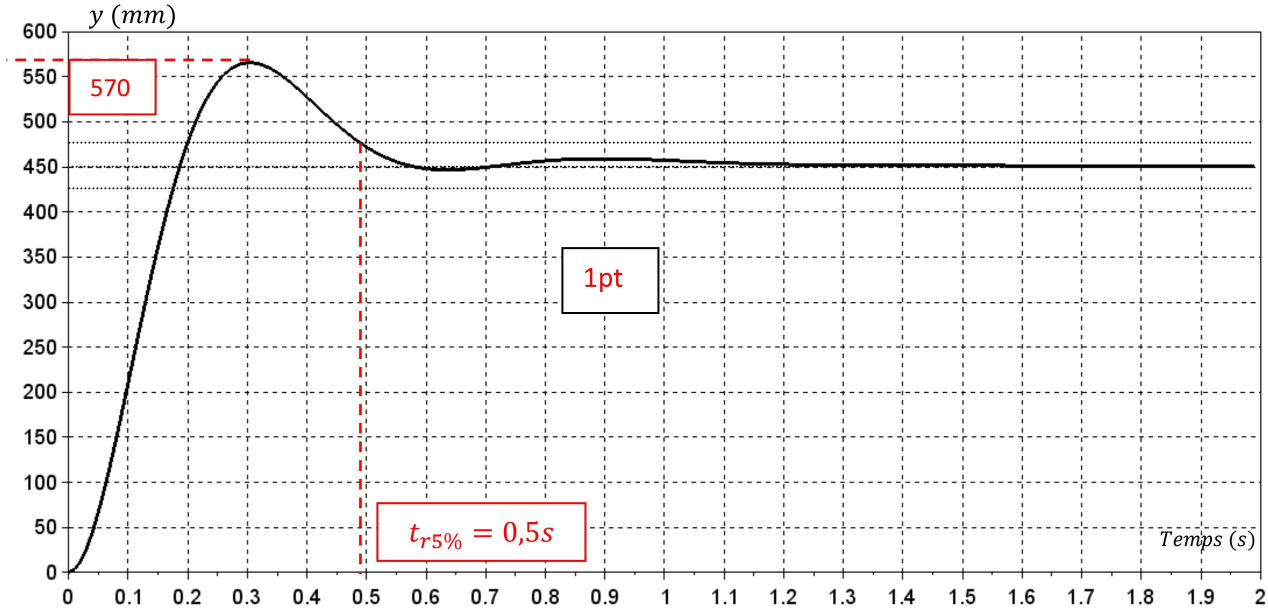
Question 25 : (8pts)

$t_{r5\%} \approx 0{,}5s$ ➔ cahier des charges respecté (1,5pts=1+0,5)

$D\% \approx 100 \times \frac{570-450}{450} = 26\%$ ➔ cahier des charges non respecté (1,5pts=1+0,5)

$MG = +\infty$ ➔ cahier des charges respecté (1,5pts=1+0,5)

$M\varphi = 50° > 45°$ ➔ cahier des charges respecté (1,5pts=1+0,5)



Réponse indicielle pour un échelon de position $y_c = 450mm$, $C(p) = \frac{1+0{,}47p}{1+0{,}08p}$

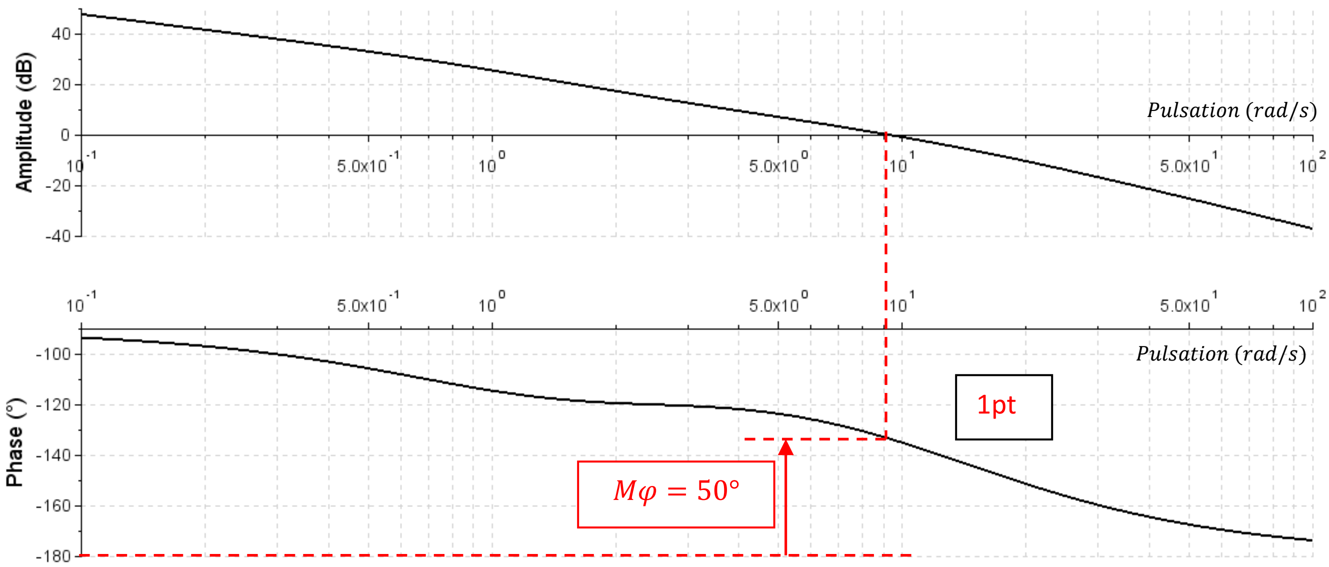


Diagramme de Bode de la FTBO, $C(p) = \frac{1+0{,}47p}{1+0{,}08p}$