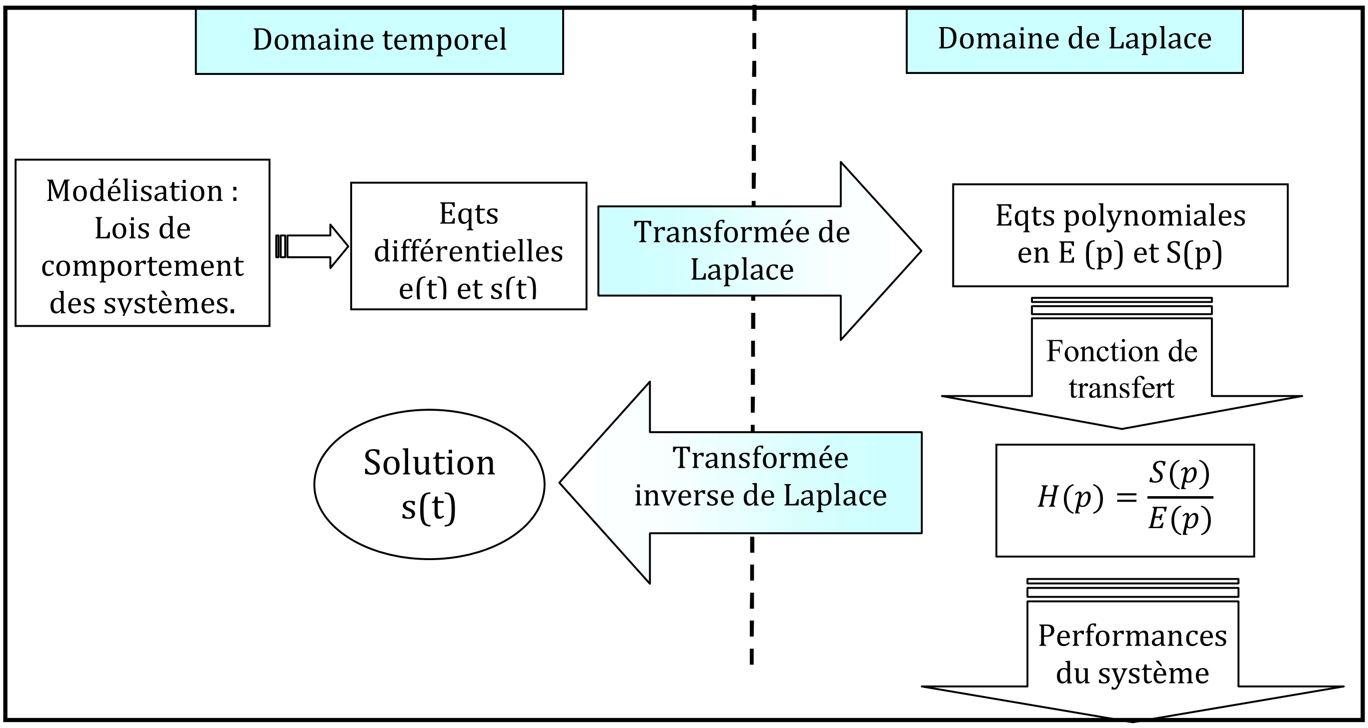
Fiche 2 : Transformée de Laplace

On suppose que les fonctions utilisées présentent toutes les propriétés de régularité nécessaires pour pouvoir leur appliquer ce nouvel opérateur.

Nécessité :



Définitions :

- La transformée de Laplace bilatérale d'une fonction $f: t \to f(t)$ est :

$L[f(t)] = F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \;\; p \in \mathbb{C}$

- Dans le cas où $f(t) = 0 \; pour \; t < 0$, on utilise la transformée de Laplace unilatérale : $L[f(t)] = F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \;\; p \in \mathbb{C}$

Propriétés :

a – Linéarité

$L[f(t) + g(t)] = L[f(t)] + L[g(t)]$

$L[\lambda f(t)] = \lambda L[f(t)]$

$L[0] = 0$

b – Théorème de retard

$L[f(t - T)] = e^{-Tp}F(p)$

E-mail : lefiabdellaoui2015@gmail.com | Blog : https://lefiabdellaoui.wordpress.com

c – Théorème des valeurs initiales et finales

$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$

d – Dérivation

$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0)$

$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$

e– Intégration

$L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{f(0)}{p}$

Dans le cas où les conditions initiales sont nulles, conditions d'Heaviside, alors ;

$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$

$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2F(p)$

$L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$

Tableau des transformés de Laplace :

$f(t)$	$F(p)$
K	$\frac{K}{p}$
Kt	$\frac{K}{p^2}$
Kt^n	$\frac{Kn!}{p^{n+1}}$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$1-e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{p(1+Tp)}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

$f(t)$	$F(p)$
$cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$sh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$ch\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
$e^{-at}sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}}e^{-m\omega_0 t}sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}t\right)$	$\frac{1}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0{}^2}}$
$1-\frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}}e^{-m\omega_0 t}sin\left(\omega_0\sqrt{1-m^2}t+\varphi\right)$	$\frac{1}{p\left(1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0{}^2}\right)}$