Performances d'un système asservis

1. Stabilité

- Un système linéaire est dit stable si, après qu'une perturbation l'a écarté de sa position d'équilibre, il revient spontanément à cette position.

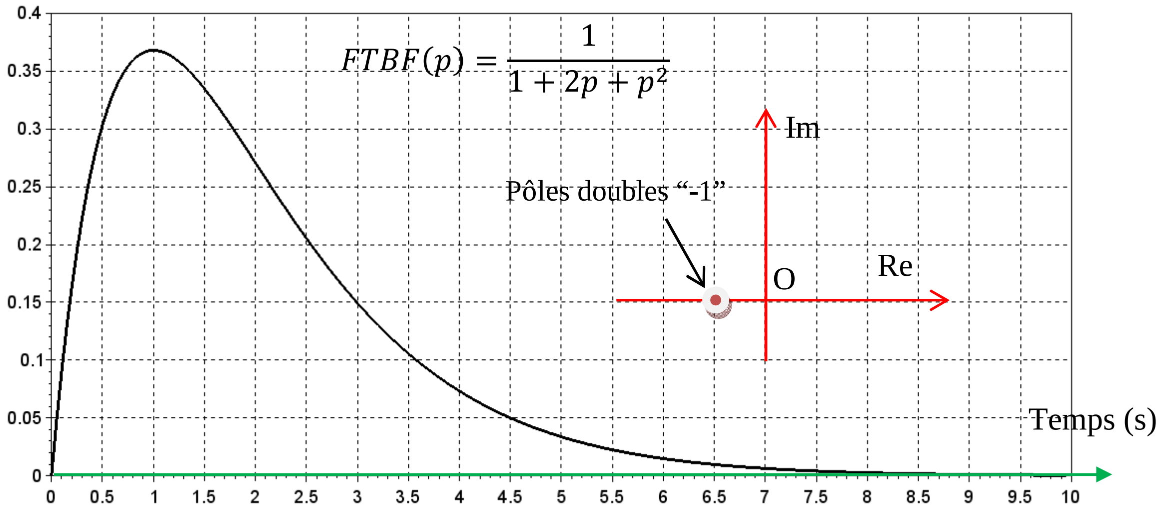
Cela veut dire :

- Un système linéaire est stable si et seulement si la réponse impulsionnelle tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Cela veut dire encore :

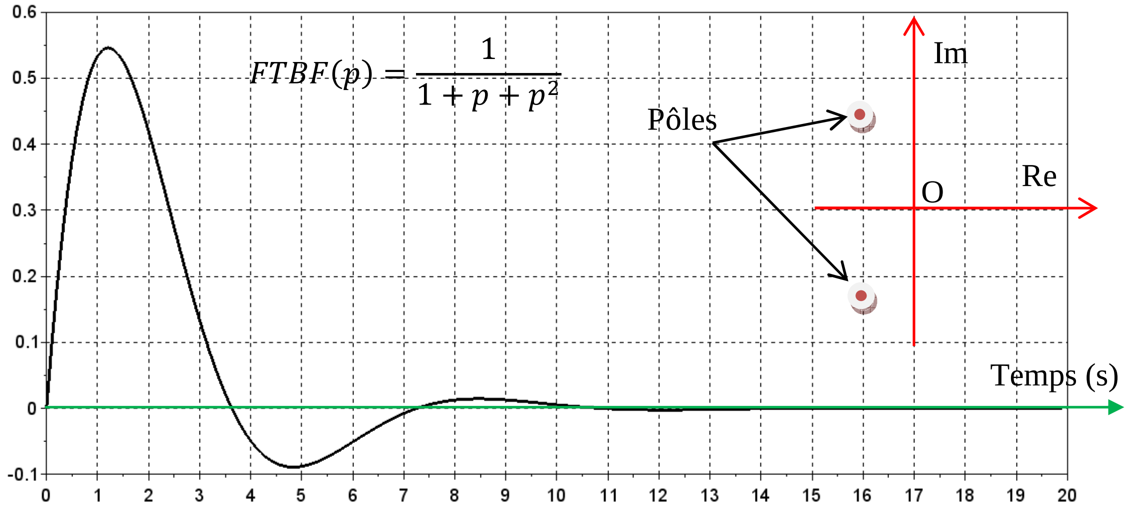
- Un système linéaire est stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative. C.-à-d. : si sa réponse impulsionnelle est une combinaison d'exponentielles dont les exposants réels sont tous négatifs (exponentielles décroissantes)

L'analyse graphique de la position des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée dans le plan complexe permet de visualiser le type de stabilité (ou instabilité) qui affecte le système considéré.

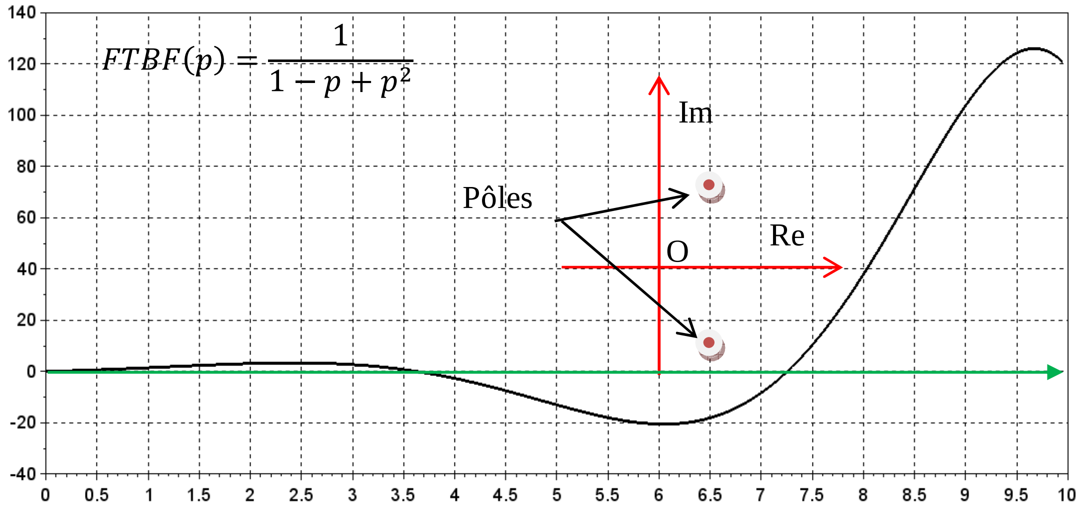


Réponse impulsionnelle : stabilité asymptotique apériodique

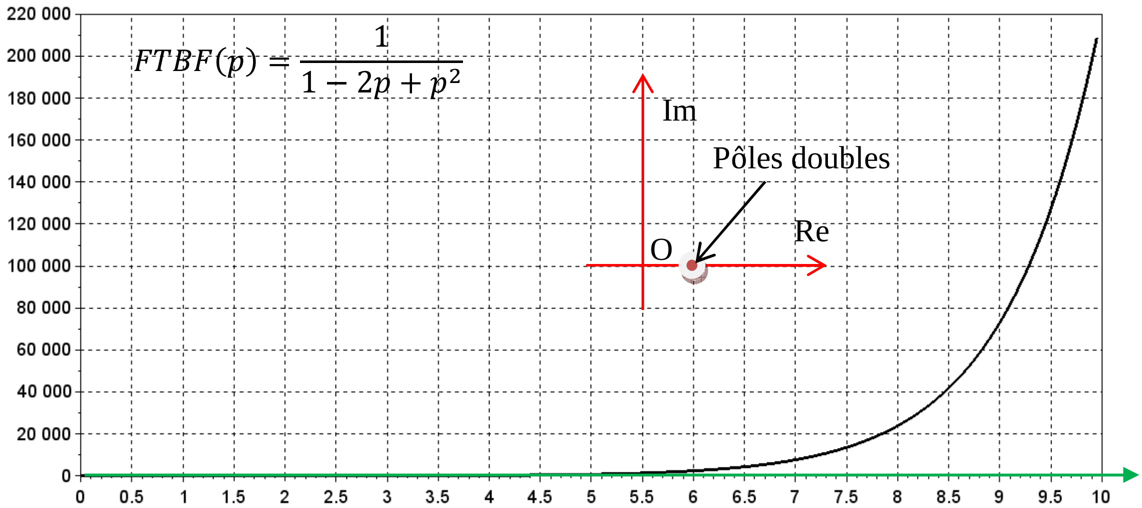
E-mail : lefiabdellaoui2015@gmail.com | Blog : https://lefiabdellaoui.wordpress.com



Réponse impulsionnelle : stabilité asymptotique oscillatoire



Réponse impulsionnelle : instabilité oscillatoire



Réponse impulsionnelle : instabilité apériodique

E-mail : lefiabdellaoui2015@gmail.com | Blog : https://lefiabdellaoui.wordpress.com

1.2. Critère algébrique : Critère de ROUTH

La fonction de transfert en boucle fermée est donnée par : $\boldsymbol{FTBF(p)} = \frac{\boldsymbol{N(p)}}{\boldsymbol{D(p)}}$ avec $\boldsymbol{D(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}$

Dans ce qui suit, nous étudions le polynôme suivant : $\boldsymbol{D(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_0}$

- **Condition 1**

Une condition nécessaire de stabilité est que les coefficients $\boldsymbol{a_i}$ du polynôme soient tous de même signe. (Nous considérons que le signe des coefficients $\boldsymbol{a_i}$ est positif, quitte à changer le signe du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert). Cette condition est généralement vérifiée pour les systèmes physiques.

- **Condition 2**

Dans le cas où la condition 1 est vérifiée, on construit le tableau de Routh à partir des coefficients du polynôme. Les deux premières lignes s'obtiennent en reportant les coefficients du polynôme. Les coefficients des lignes suivantes sont calculés selon les formules ci indiquées.

$\boldsymbol{p^n}$	$\boldsymbol{a_n}$	$\boldsymbol{a_{n-2}}$	$\boldsymbol{a_{n-4}}$
$\boldsymbol{p^{n-1}}$	$\boldsymbol{a_{n-1}}$	$\boldsymbol{a_{n-3}}$	$\boldsymbol{a_{n-5}}$
$\boldsymbol{p^{n-2}}$	$A_{n-2} = -\frac{a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-1}}$	$B_{n-2} = -\frac{a_n a_{n-5} - a_{n-1}a_{n-4}}{a_{n-1}}$	$C_{n-2} = -\frac{a_n a_{n-7} - a_{n-1}a_{n-6}}{a_{n-1}}$
$\boldsymbol{p^{n-3}}$	$A_{n-3} = -\frac{a_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}a_{n-3}}{A_{n-2}}$	$B_{n-3} = -\frac{a_{n-1}C_{n-2} - A_{n-2}a_{n-5}}{A_{n-2}}$	C_{n-3}
…	…	…	…
$\boldsymbol{p^2}$	A_2	B_2	C_2
$\boldsymbol{p^1}$	A_1	B_1	C_1
$\boldsymbol{p^0}$	$A_0 = -\frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1}$	$A_0 = -\frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1}$	$C_0 = -\frac{A_2 D_1 - A_1 D_2}{A_1}$

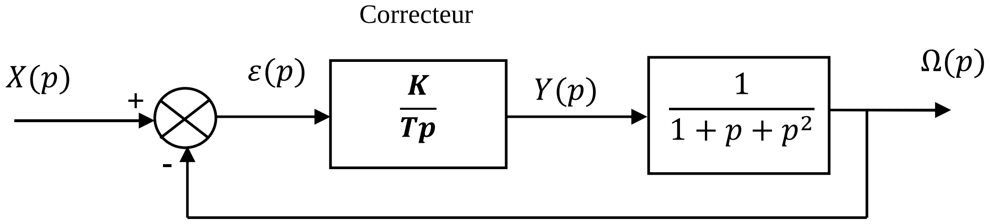
L'interprétation se fait en analysant les coefficients de la première colonne. Une condition nécessaire est suffisante pour que le système soit stable est que tous les coefficients de la première colonne soient positifs.

Application

1. Etudier la stabilité des systèmes dont leurs fonctions de transfert sont :

$$H_1(p) = \frac{1}{1+p+p^2-p^3+p^4+p^5} \text{ et } H_2(p) = \frac{1}{6+11p+6p^2+p^3}$$

2. Soit le système modélisé par le schéma bloc suivant :

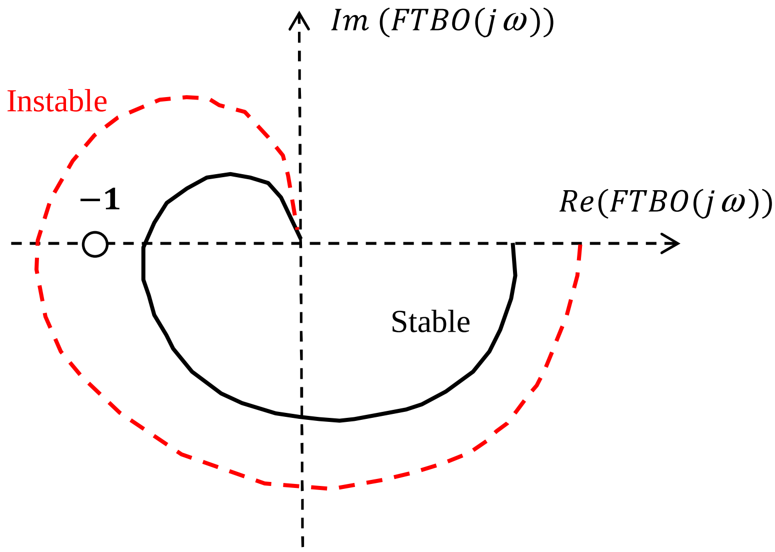


- Déterminer la $FTBO(p)$ et la $FTBF(p)$
- Etudier la stabilité en fonction de K et T.

1.2. Critère graphique : Critère de REVERS

Dans le cas où le système est stable en boucle ouverte, le critère de Nyquist indique que le point $(\mathbf{-1})$ ne doit pas être entouré pour que le système soit stable en boucle fermée. Le critère de Revers découle directement de cette condition.

Un système est stable en boucle fermée si le lieu de Nyquist de la $FTBO$ laisse le point critique d'affixe -1 sur sa gauche lorsque la pulsation augmente de 0 à l'infini.



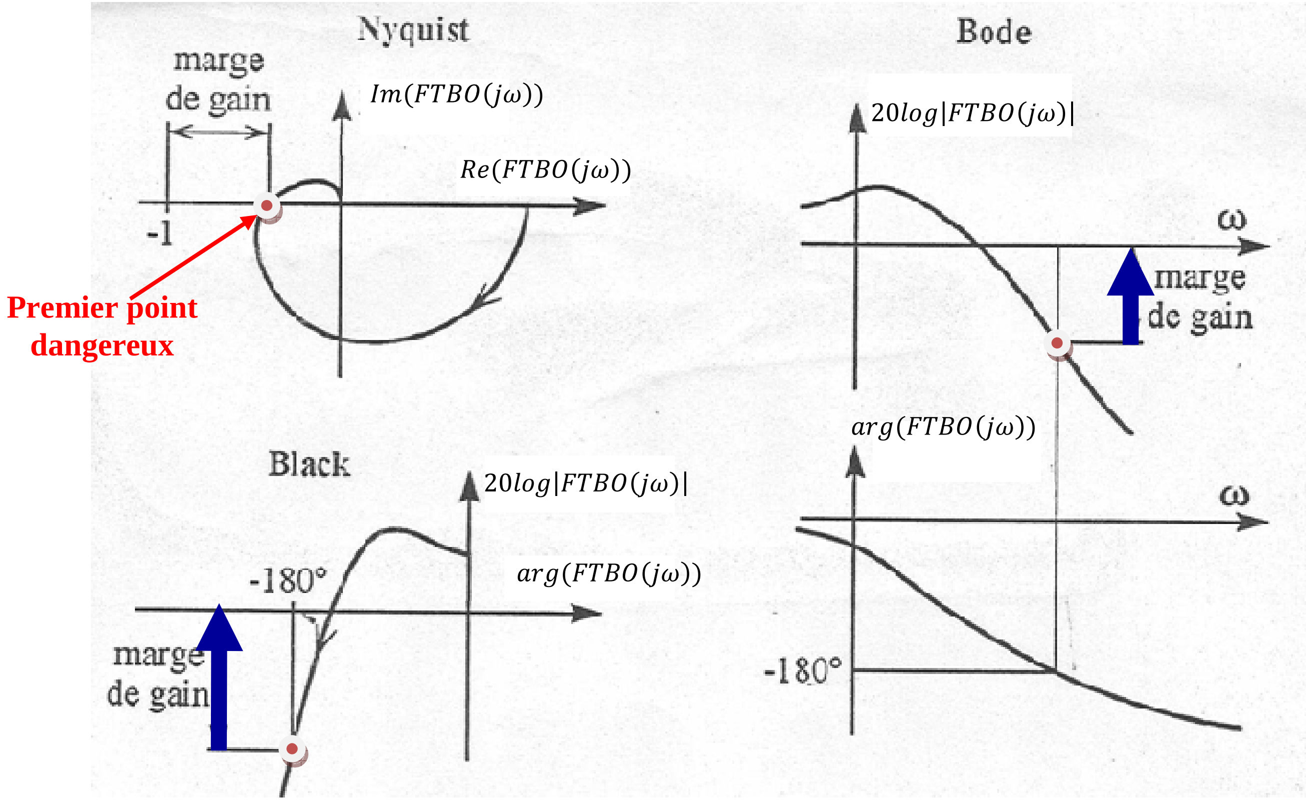
1.3. Conditions de stabilité en pratique

Un système à la limite de la stabilité est mal amorti. Son bon fonctionnement n'est pas assuré car une faible modification de ses caractéristiques peut le rendre instable.
Les lieux des fonctions de transfert peuvent être obtenus par modélisation ou expérimentalement. Quels que soit la méthode utilisée, ces lieux ne sont pas connus de manière exacte.

Ces raisons expliquent qu'en pratique on ne se contente pas de réaliser un système théoriquement stable. On assure la stabilité d'un système en prenant des marges de sécurité. Ces marges se traduisent par une distance à respecter entre le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte et le point critique d'affixe -1.

1.3.1. Marge de gain

L'affixe du point critique a pour module 1 et pour argument -180°. Lorsque l'on se fixe une marge de gain, on se donne une distance à respecter entre le point de la fonction de transfert en boucle ouverte pour lequel la phase vaut -180° et point critique d'affixe -1. Une valeur de la marge de gain couramment utilisée est 10dB.

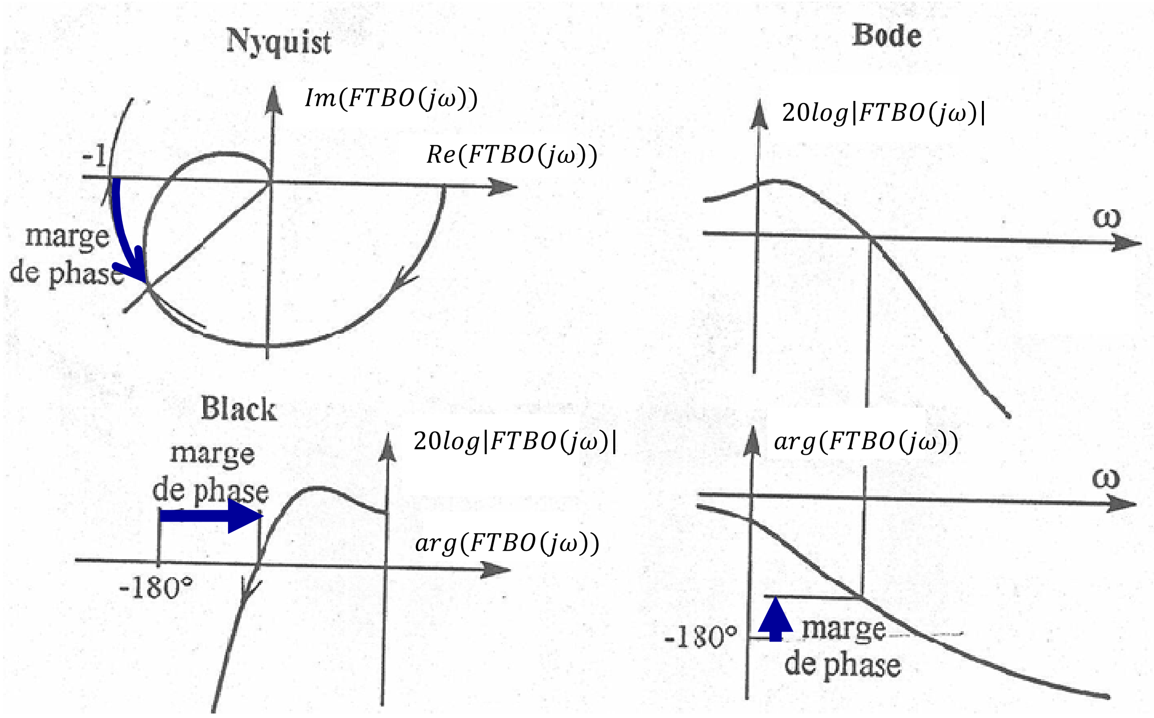


$$MG = -20log|FTBO(j\omega_1)| \text{ avec } arg(FTBO(j\omega_1)) = -180°$$

1.3.2. Marge de phase

La marge de phase est la différence de phase entre la phase du point de la FTBO de module 1 et la phase du point critique -180°. On utilise couramment une marge de phase de 45° qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.

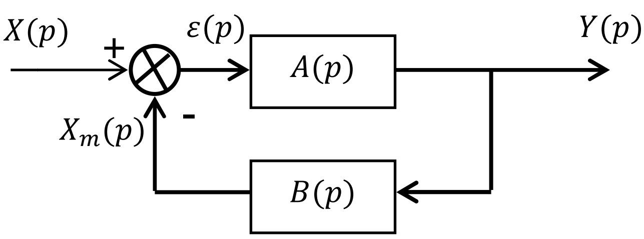
E-mail : lefiabdellaoui2015@gmail.com | Blog : https://lefiabdellaoui.wordpress.com



$$M\varphi = 180° + \arg\left(FTBO(j\omega_2)\right) \text{ avec } |FTBO(j\omega_2)| = 1$$

2. Précision

Un système est précis si la sortie suit l'entrée en toutes circonstances. Considérons un système modélisé par le schéma bloc :



Soit $\varepsilon(p) = X(p) - X_m(p)$: plus cet écart est petit, plus le système est précis.

L'analyse du schéma bloc défini ci-dessus donne :

$$Y(p) = \frac{A(p)X(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

$$X_m(p) = B(p)Y(p)$$

$$\varepsilon(p) = X(p) - X_m(p) = X(p) - B(p)Y(p) = \frac{X(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

Soit finalement : $\varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1+A(p)B(p)}$

L'erreur en régime permanent est :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} pE(p) = \lim_{p\to 0} \frac{pX(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

Or $FTBO(p) = A(p)B(p) \rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{pX(p)}{1+FTBO(p)}$

L'objectif de cette étude est de déterminer l'erreur en régime permanent dans le cas où $\boldsymbol{x(t)}$ prend la forme de :

- Echelon (erreur indicielle, erreur statique, erreur de position)
- Rampe (erreur de trainage, erreur de vitesse, erreur de poursuite)
- Parabole (erreur d'accélération)

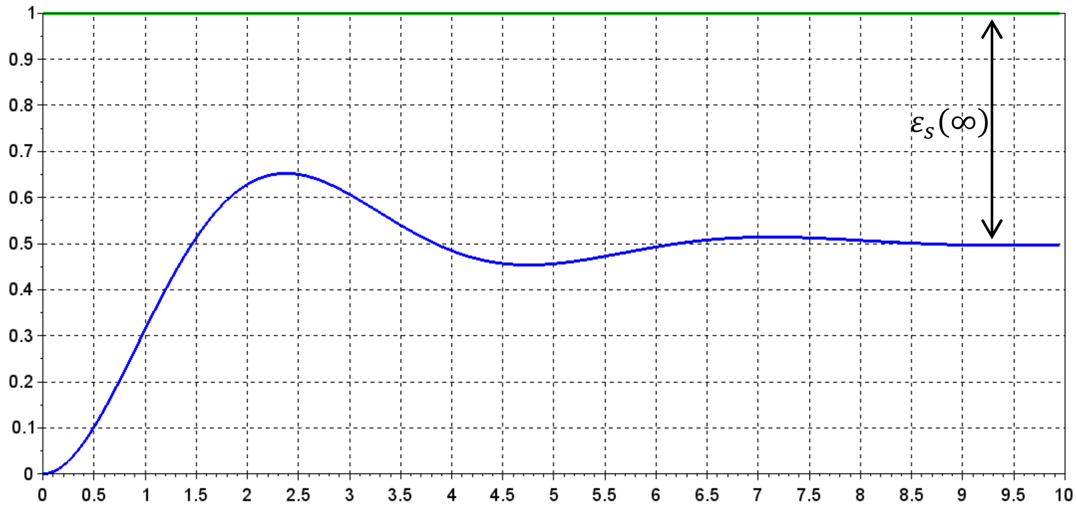
2.1. Erreur statique : $x(t) = au(t)$

$$X(p) = \frac{a}{p} \Rightarrow \varepsilon_s(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{a}{1 + FTBO(p)}$$

La figure suivante présente l'erreur statique lors d'une réponse indicielle unitaire d'un système dont sa fonction de transfert est donnée par :

$H(p) = \frac{1}{1+p+p^2}$

Dans ce cas, $\varepsilon_s(\infty) = 0{,}5$, $\varepsilon_s(\%) = 100\left(\frac{a-y(\infty)}{a}\right) = 50\%$



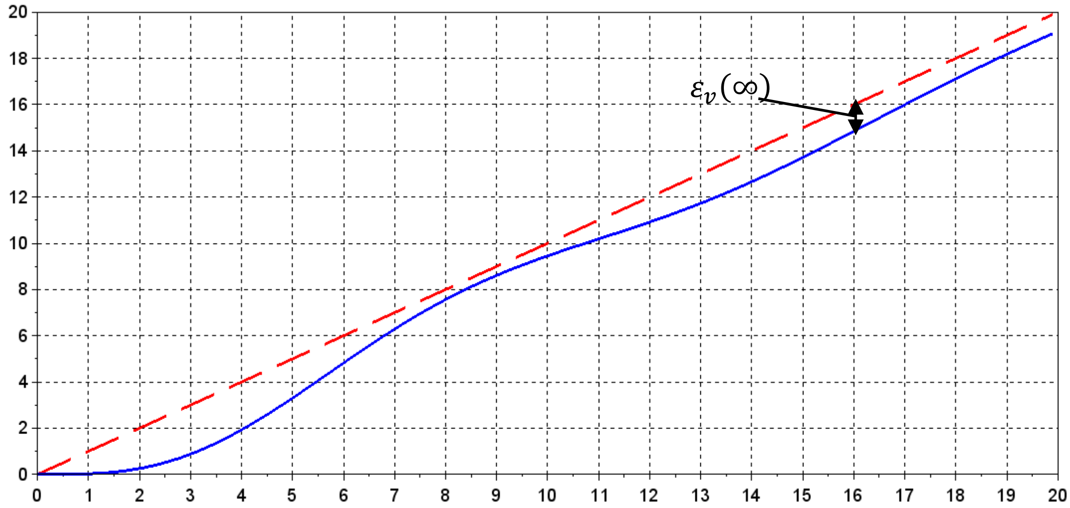
2.2. Erreur de vitesse : $x(t) = atu(t)$

$$X(p) = \frac{a}{p^2} \Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{a}{p\big(1 + FTBO(p)\big)}$$

La figure suivante présente l'erreur de vitesse lors d'une réponse à une rampe de pente 1 d'un système de fonction de transfert donnée par :

E-mail : lefiabdellaoui2015@gmail.com | Blog : https://lefiabdellaoui.wordpress.com

$$H(p) = \frac{1}{p(1 + 3p + p^2)}$$



2.3. Erreur d'accélération : $x(t) = at^2u(t)$

$$X(p) = \frac{2a}{p^3} \Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \frac{2a}{p^2\big(1 + FTBO(p)\big)}$$

2.4. Erreur en fonction de la classe du système

L'erreur peut être calculée à partir de la classe du système en boucle ouverte. En effet, la FTBO(p) peut se mettre sous la forme suivante :

$FTBO(p) = \frac{K_{bo}}{p^\alpha} \times \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + 1}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + 1}$

Avec :

- K_{bo}: Gain de la FTBO
- α: Classe du système

<u>Exemple :</u>

Soient les fonctions de transfert en boucles ouvertes de deux systèmes différents. Déterminer la classe de chaque système.

- $FTBO(p) = \frac{1}{1+p+p^2}$ ➔ Système de classe 0 (Le diagramme de bode présente une asymptote horizontale pour les faibles fréquences)
- $FTBO(p) = \frac{1}{p(1+p+p^2)}$ ➔ Système de classe 1 (Le diagramme de bode présente une asymptote de pente -20dB/décade pour les faibles fréquences)

Il est à noter que la FTBO(p) est équivalente au voisinage de zéro à :

$$FTBO(p) \approx \frac{K_{bo}}{p^{\alpha}}$$

Le tableau suivant résume, en fonction de la classe du système, les erreurs : statique, de vitesse et d'accélération.

	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Erreur statique	$\frac{a}{1 + K_{bo}}$	0	0
Erreur de vitesse	$+\infty$	$\frac{a}{K_{bo}}$	0
Erreur d'accélération	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{2a}{K_{bo}}$

3. Correction des systèmes asservis

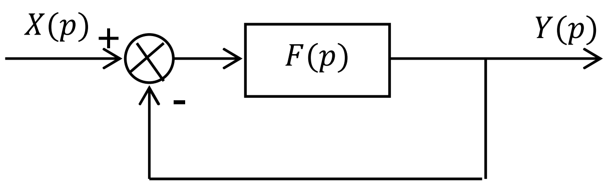
Pour un système asservis, on souhaite :

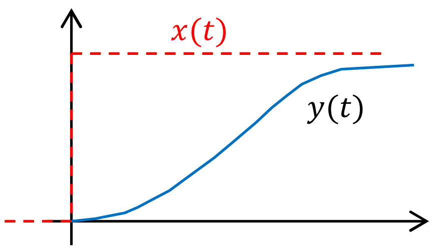
- Bonne stabilité ;
- Bonne précision ;
- Faible temps de réponse ;

Pour améliorer les performances du système, on modifie la structure de l'asservissement en ajoutant des composants qui vont corriger les signaux transmis entre les différents blocs.

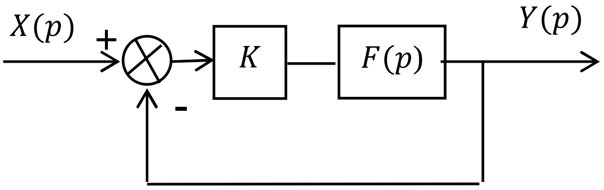
3-1. Correction proportionnelle

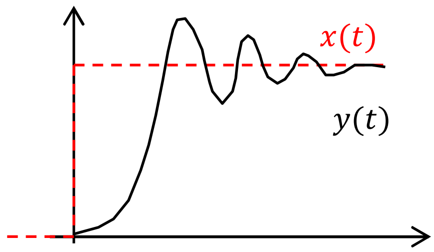
Considérons le système asservis suivant :





Le temps de réponse est jugé trop long. Pour le réduire, on utilise le correcteur proportionnel suivant :





E-mail : lefiabdellaoui2015@gmail.com | Blog : https://lefiabdellaoui.wordpress.com

3.1.1. Interprétation :

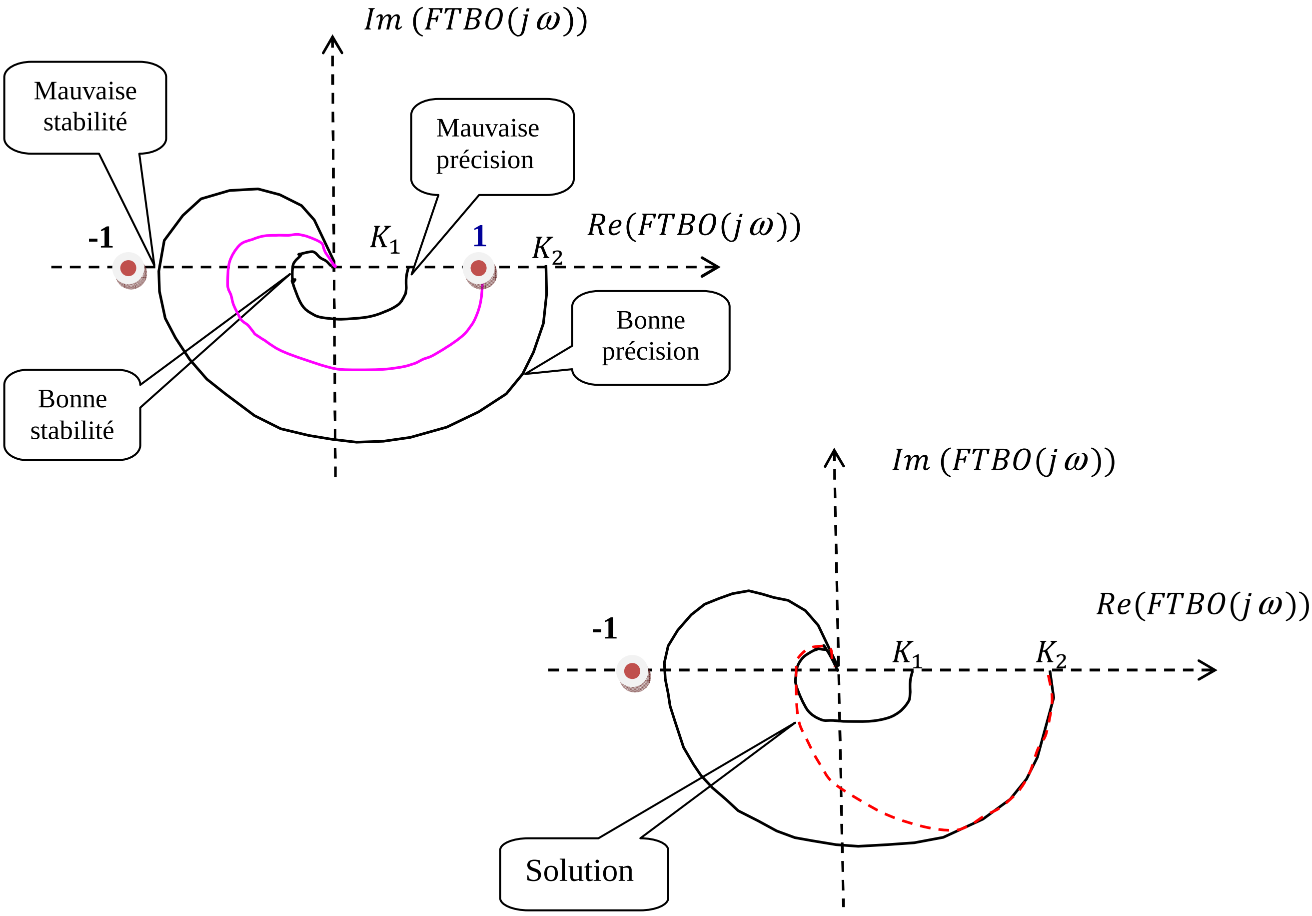
Le temps de réponse est plus faible du fait que l'amplitude du signal d'entrée du bloc F(p) a une amplitude plus grande que précédemment. Ce pendant des oscillations commencent à apparaître. Le système devient moins stable que précédemment.

3.1.2. Explication par lieu de Nyquist :

- Pour satisfaire la marge de stabilité, $K = K_1$
- Pour satisfaire le critère de précision (rapidité), $K = K_2$

Le réglage du gain uniquement ne permet pas de satisfaire ces deux critères : marge de stabilité et critère de précision.

La meilleure solution, il faut que la fonction de transfert en boucle ouverte corresponde à $K = K_2$ pour les faibles fréquences et $K = K_1$ pour les hautes fréquences.

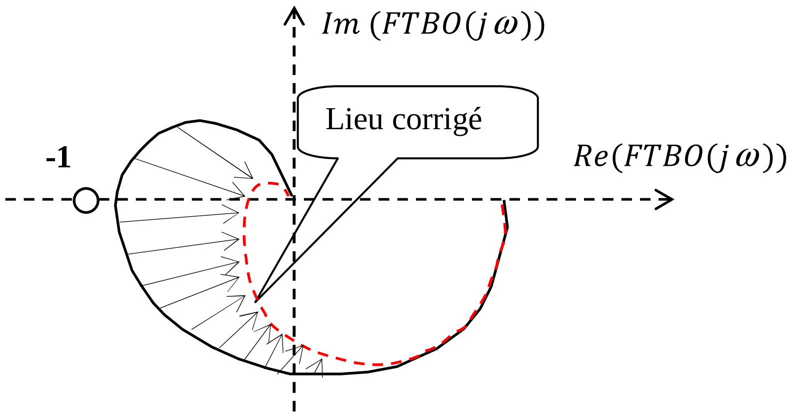


NB : La correction intégrale et dérivée rend service à ce type de problème.

E-mail : lefiabdellaoui2015@gmail.com | Blog : https://lefiabdellaoui.wordpress.com

3-2. Correction dérivée

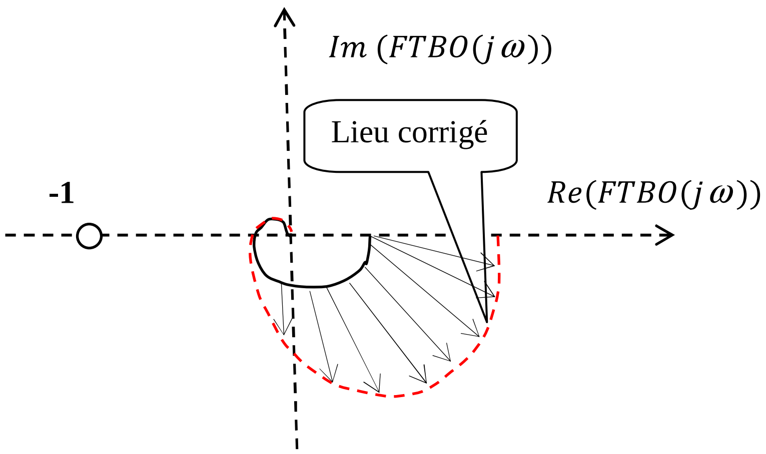
La correction dérivée permet de modifier la fonction de transfert. Ce type de correction n'affecte que la région des pulsations élevées et permet donc d'augmenter la marge de stabilité.



Dans la pratique, on commence par le réglage du gain du système non corrigé conformément au critère de précision, puis le correcteur dérivé est choisi de telle sorte que la marge de gain soit assurée.

3-3. Correction intégrale

Ce type de correction n'affecte que la région des faibles pulsations.



Dans la pratique, on commence par le réglage du système vis à vis la condition de stabilité, puis le correcteur intégrale est choisi afin d'obtenir une précision satisfaisante du système par augmentation du gain pour les faibles pulsations.